

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE LENTES ELECTROSTÁTICOS DE DOS  
ELEMENTOS CON GEOMETRÍA CILÍNDRICA**



**Sara Carmela Angulo Torres**

**Autor**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**Sincelejo - Colombia**

**2019.**

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE LENTES ELECTROSTÁTICOS DE DOS  
ELEMENTOS CON GEOMETRÍA CILÍNDRICA**

**Trabajo de grado para optar al Título de Licenciada en Física**

**Sara Carmela Angulo Torres**

**Autor**

**Prof. Omar Suárez Támara**

**Doctor en Ciencias, Mención Física**

**Director**

**UNIVERSIDAD DE SUCRE**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**Sincelejo - Colombia**

**2019**

## Agradecimientos

Terminar este trabajo de grado no hubiese sido posible sin el apoyo profesional de mi tutor el profesor Omar Suárez Támara, quien depósito reiteradas veces su confianza en mí para hoy día poder alcanzar una de las metas que me he propuesto, conservando su invaluable paciencia y apoyo en los momentos claves, también agradezco a todos los profesores que fueron participé de mi formación; entregando sus conocimientos y valores, a la universidad misma quien es testigo de todo el proceso de mi formación.

También a DIOS quien como guía estuvo presente en el caminar de mi vida, bendiciéndome y dándome fuerzas para continuar con mis metas trazadas, sin excepción alguna a mi familia que me ha apoyado cada uno de mis pasos y me ha levantado en cada uno de mis errores.

Y a todos los que de alguna u otra forma han aportado para que esta etapa finalice satisfactoriamente.

# Resumen

Para trabajar con problema analíticos de óptica de partículas cargadas se utilizan generalmente sistemas de lentes electrostáticas diseñados analíticamente, puesto que, estos son dispositivos que se utilizan para el enfoque de partículas cargadas, los cuales permiten controlar haces de electrones con distintas energía y además, se pueden utilizar con muestras de diferentes materiales. La teoría de la óptica de partículas ha sido la fuente principal que ha generado estudio de dichos sistemas, siendo esta valiosa fuente de información para aquellos estudiantes que trabajan con problemas físicos o biofísicos por ejemplo, biólogos que desean comprender la técnica que se emplea para que se formen las imágenes en los microscopios electrónicos; comprender la óptica de partículas cargadas permite conocer el funcionamiento inteligente de otros instrumentos ópticos, como tubos de rayos catódicos, aceleradores, espectrómetros de masas de tiempo de vuelo, pistolas de electrones / iones y analizadores de energía.

Las propiedades opticas de los sistemas de lentes electrostáticos a menudo son estudiadas empleando el uso de simuladores, mediante paquetes computacionales considerando las condiciones del sistema en estudio y son pocos los modelos analíticos que se realizan para el diseño de dichas lentes. Con base a lo anterior se estudian en este trabajo un sistema de lentes electrostáticos de dos elementos con geométrica cilíndrica. Inicialmente se realizarán cálculos analítico del diseño del sistema de lentes cilíndricos (coaxiales) constituido por los dos elementos que tiene igual diámetro “ $D$ ”, separados a una distancia “ $g$ ” y con potenciales  $V_1$  y  $V_2$ . El sistema de lentes consta de tres regiones, por lo cual se deberá calcular el potencial electrostático en cada una de ellas, resolviendo la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Se modelan las trayectorias de las partículas cargadas y se caracterizarán las propiedades focales del haz de iones.

# Índice

<b>1. Capítulo 1: Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Capítulo 2: Fundamentación Teórica</b>	<b>7</b>
2.1. Preámbulo . . . . .	7
<b>3. Capítulo 3: Problema en estudio</b>	<b>10</b>
3.1. Preámbulo . . . . .	10
3.2. Sistema de dos lentes . . . . .	11
<b>4. Capítulo 4: Cálculo de campo eléctrico y trayectorias.</b>	<b>16</b>
4.1. Cálculos del campo eléctrico. . . . .	16
4.2. Ecuaciones de movimiento y modelado de las trayectoria. . . . .	18
<b>5. Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>6. Apéndices</b>	<b>27</b>
6.1. Apéndice A: Cálculo de las funciones potenciales en cada región .	27
6.2. Apéndice B: Cálculo de la densidad de energía total del sistema de dos lentes . . . . .	28
6.3. Apéndice C: Cálculo del coeficiente $B_n$ y potenciales finales en términos de las variables adimensionales . . . . .	32
6.4. Apéndice D: Cálculo del campo eléctrico. . . . .	34
6.5. Apéndice E: Ecuación de movimiento. . . . .	35
<b>7. Referencias bibliográficas.</b>	<b>40</b>

# Objetivos

## Objetivo general

- Diseñar analíticamente un sistema de lentes electrostáticos de dos elementos con geometría cilíndrica para enfocar un haz de iones.

## Objetivos específicos

- Plantear la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas en cada una de las regiones del sistema de lentes de dos elementos electrostático.
- Calcular la función potencial para el sistema de lentes en cada región.
- Calcular la trayectoria de las partículas cargadas al pasar por el sistema de lentes electrostáticos.
- Analizar el enfoque de un haz de iones como función de los parámetros geométricos del sistema de lentes

# 1. Capítulo 1: Introducción

Desde hace años se ha visto un notable resurgimiento del interés en la óptica de iones y electrones a raíz de los avances tecnológicos y la innovación desde el ámbito de la instrumentación analítica, lo que ha permitido realizar investigaciones mediante cálculos numéricos realizados a partir del potencial electrostático. Hacer observaciones del efecto que produce el campo eléctrico sobre las partículas en el sistemas de lentes electrostáticos y caracterizar los parámetros ópticos es el objetivo principal de la modelación.

Al realizar estudio de las propiedades ópticas de un sistema electrostático con geometría cilíndrica es necesario dar solución a dos problemas básicos. El primero consiste en calcular la distribución del potencial en cada una de las regiones usando la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y en segunda instancia; a partir del potencial se determina el campo eléctrico en el interior del sistema de lentes.

Se trabaja con un sistema de electrodos cilíndricos, por lo que, este trabajo es estructurado en el siguiente orden: En el Capítulo 2, se presentan los fundamentos teóricos en los cuales se sustentan los cálculos analíticos que se realizan a partir de la ecuación de Laplace. En el Capítulo 3, se muestran los cálculos analíticos del potencial para el sistema de dos cilindros electrostáticos donde el potencial es expresado en término de las funciones de Bessel. En el Capítulo 4, se exponen los cálculos del campo eléctrico. Una vez obtenido el potencial y campo se procede con el planteamiento de las ecuaciones de movimiento para cada partícula considerando que estas son partículas no interactuantes, estas ecuaciones de movimiento se resolverán numéricamente con ayuda del software Mathematica lo que permitirá hacer un análisis de las trayectorias. En el Capítulo 5, finalmente se presentan las conclusiones.

## 2. Capítulo 2: Fundamentación Teórica

### 2.1. Preámbulo

Hoy día se han elaborado distintas configuraciones de lentes electrostáticas, desde las lentes de dos cilindros hasta las lentes de electrodos múltiples, que además conservan distintas

propiedades como se menciona a continuación: las lentes de dos elementos se utilizan principalmente para enfocar, acelerar o desacelerar los haces de electrones y de iones ya que son dispositivos que auxilian en el transporte de partículas cargadas, ampliamente utilizadas en espectroscopia electrónica para controlar haces de partículas de diferentes energías; las lentes de tres elementos son utilizadas para ayudar al diseño de lentes que tienen una posición de imagen fija, pero el aumento no es constante; el sistemas de cuatro elementos puede ser operado con un aumento constante para producir una imagen en una posición específica y los sistemas de lentes electrostáticos con más de cuatro elementos generalmente se usan en estudios experimentales, para mantener el zoom con voltaje general de aumento constante. Vergara F, (2018), *Cálculo del potencial electrostático en un sistema de lentes de cinco elementos con geometría cilíndrica*.

Una de las lentes más utilizadas en la óptica de partículas cargadas es la lente de dos electrodos, que por lo general se usa cuando se requiere que la imagen y el objeto estén bajo potenciales distinto, de tal modo que se pueda estudiar el sistema haciendo una analogía con la ley de Snell en el que la luz pasa a través regiones con índice de refracción distintos, que en este caso particularmente serian potenciales distintos. A continuación se realizan cálculos del diseño (analítico) de un sistema de lentes cilíndricos con dos elementos, por lo que se debe encontrar una solución analítica exacta de la ecuación de Laplace en el caso de simetría azimutal, donde el potencial,  $V(z, r)$ , será expresado como el producto de funciones separadas,  $Z(z)$  y  $R(r)$  de las coordenadas axial y radial. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es dada en la forma:

$$\nabla^2 V(z, r) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

Como  $V(z, r) = Z(z)R(r)$ , tenemos que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial (Z(z)R(r))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (Z(z)R(r))}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (Z(z)R(r))}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Utilizando el método de separación de variables para E.D.P.

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 (R(r))}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial (R(r))}{\partial r} + R(r) \frac{\partial^2 (Z(z))}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

Se pueden escribir las ecuaciones para las funciones  $Z(z)$  y  $R(r)$ , como sigue:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \quad (6)$$

La solución para  $Z(z)$  es sencilla:

$$Z(z) = A_k e^{k_n z} + B_k e^{-k_n z} \quad (7)$$

Mientras que para  $R(r)$  requiere de una solución de mayor complejidad, que es determinada con las funciones de Bessel de orden cero de primer y segundo tipo, en la que se debe considerar las condiciones de contorno. En virtud de lo anterior, la solución formal se expresa como sigue:

$$R(k_n r) = C_1 J_0(k_n r) + C_2 N_0(k_n r) \quad (8)$$

Donde  $J_0$  y  $N_0$  son las funciones de Bessel de orden cero de primer y segundo tipo, respectivamente. Este último se vuelve infinito  $\lim_{r \rightarrow 0} N_0 \rightarrow \infty$  y, por lo tanto, no puede dar una descripción físicamente real del potencial en el eje, por lo que  $C_2 = 0$  y la solución general para el potencial se convierte en

$$V(z, r) = \left( A_k e^{k_n z} + B_k e^{-k_n z} \right) J_0(k_n r) \quad (9)$$

### 3. Capítulo 3: Problema en estudio

#### 3.1. Preámbulo

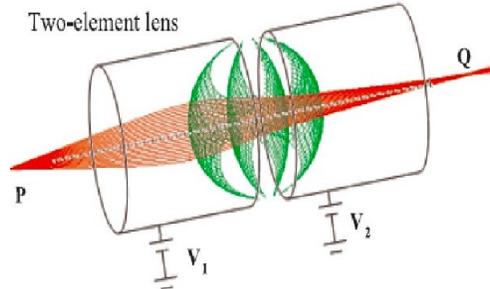


Figura 1: Omer Sise, Melike Ulu, Mevlut Dogan, Simulación SIMION 2 elementos: Se muestra la posición de la imagen correspondiente a una distancia de objeto dada, con la relación de aceleración ( $V_2/V_1 > 1$ ) como parámetro (los datos correspondientes para lentes retardantes ( $V_2/V_1 < 1$ ))

Una lente electrostática es un dispositivo que auxilia en el transporte de partículas cargadas, dichos dispositivos han realizado importantes contribuciones en distintas ramas de la ciencia; Por ejemplo, un caso particular, se evidencia cuando a través de lentes electrostáticas son guiados electrones emitidos a partir de una muestra a un analizador electrónico, análogo a la manera como una lente óptica auxilia en el transporte de la luz en un instrumento óptico (microscopios electrónicos). El reciente desarrollo de la espectroscopia electrónica hace posible revelar la estructura electrónica de moléculas, aunque esta ha sido realizada principalmente por analizadores de electrones; las lentes electrostáticas también desempeñan un papel significativo en el desarrollo de la espectroscopia de electrones (Nicki Dennis, 2000, *Electrostatic Lens Systems*, Institute of Physics Publishing, wholly owned by The Institute of Physics, London).

Una lente de dos electrodos consta de dos cilindros coaxiales, que están a diferentes potenciales; los cilindros son ubicados de tal forma que haya un espacio entre ellos, (Véase la figura 1). Estos sistemas se consideran como dispositivos que aceleran o desaceleran los haces de partículas cargadas, se destacan además por ser usados generalmente para aumentar la sensibilidad y la resolución. Es bien sabido que tiene una importante acción de enfoque, por lo tanto, es esencial que las propiedades focales de dichas lentes se conozcan con precisión.

Con base de las distintas investigaciones que se han realizado sobre los sistemas de electrodos cilíndricos y con el fin de realizar un aporte a ello, se elabora este trabajo enfocado principalmente sobre sistemas de dos cilindros, en el que se determina mediante cálculos analíticos la distribución del potencial en cada una de las tres regiones, usando la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas; como la solución general de dicha ecuación ya se conoce se determina la solución en cada región, estas soluciones quedan expresadas en términos de coeficientes específicos los cuales serán determinados. Luego, para determinar en cada región la función potencial, se consideran las condiciones de continuidad y de contorno de la función potencial. Esto con el fin de determinar los coeficientes en cada región, en términos de un único coeficiente, el cual finalmente, es determinado por un proceso de minimización de la energía respecto al coeficiente a determinar. Una vez definida la función potencial, se procede con la obtención del campo eléctrico en cada región que será calculado a partir de la función potencial y por último se establecen las ecuaciones de las trayectorias seguidas por las partículas cargadas, en términos del campo electrostático.

En este trabajo se usa el software Mathematica el cual permite modelar las trayectorias de las partículas que posteriormente son analizadas.

### 3.2. Sistema de dos lentes

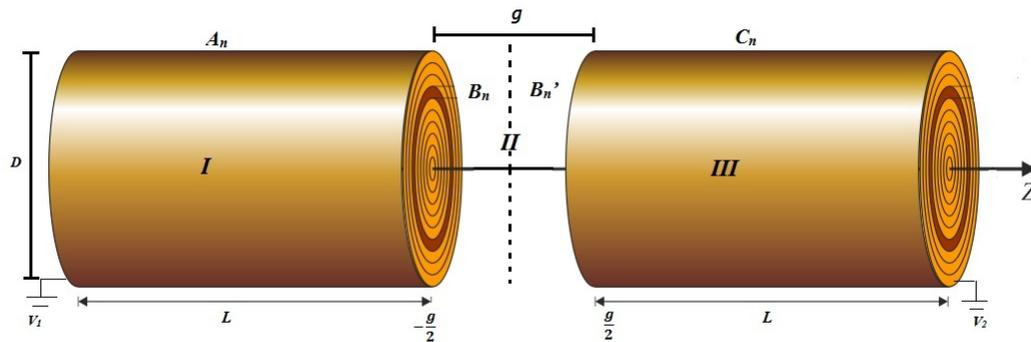


Figura 2: Sistema de lentes electrostáticas con dos elementos.

Este sistema de lentes electrostáticas está conformado por dos electrodos cilíndricos coaxiales de igual diámetro, “D”, separados por una distancia axial “g” y con potenciales  $V_1$  y  $V_2$ . Se

plantea una función potencial definida en cada una de las tres regiones que constituyen este sistema de lentes como se muestra en la Figura 2. El potencial total, será la suma de los potenciales de cada región, después de aplicar las condiciones de continuidad del potencial entre las regiones, y de reescribir los coeficientes en términos del coeficiente  $B_n$ .

De la ecuación 9 y considerando un potencial inicial  $V_0$ , en una situación asimétrica del eje puede expresarse como:

$$V(r, z) = (A_n e^{kz} + B_n e^{-kz}) J_0(kr) + V_0 \quad (10)$$

La solución de la función potencial total para una geometría de lente particular consistirá en una suma de dichos términos (Nicki Dennis, 2000, *Electrostatic Lens Systems*, Institute of Physics Publishing, wholly owned by The Institute of Physics, London). Como en el sistema de lentes de dos elementos, se tienen tres regiones, en cada una de las cuales la función potencial tendrá un expresión particular:

$$V_I(z, r) = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{k_n z} J_0(k_n r) \quad (11)$$

$$V_{II}(z, r) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) z + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n e^{-k_n z} + B'_n e^{k_n z}) J_0(k_n r) \quad (12)$$

$$V_{III}(z, r) = V_2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n z} J_0(k_n r) \quad (13)$$

La continuidad del potencial a través del límite entre las regiones (I y II), (II y III) implica que la componente radial del potencial es continua a través de este límite, con lo cual los coeficientes que aparecen en la Ecs (11), (12) y (13), se pueden escribir en términos de un único coeficiente, que en este caso se escoge  $B_n$ . Los potenciales son reescritos en la forma:

$$V_I(z, r) = V_1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 - e^{k_n g}) e^{k_n z} J_0(k_n r) \quad (14)$$

$$V_{II}(z, r) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{-k_n z} - e^{k_n z} \right) J_0(k_n r) \quad (15)$$

$$V_{III}(z, r) = V_2 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( 1 - e^{k_n g} \right) e^{-k_n z} J_0(k_n r) \quad (16)$$

El último coeficiente  $B_n$  es determinado aplicando el principio variacional  $\frac{\partial W}{\partial B_n} = 0$ , donde  $W$  es la densidad de energía del campo eléctrico, la cual es dada por:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$E = -\nabla V$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (-\nabla V)^2 d\tau$$

$$W = 2\pi\epsilon_0 \left\{ \int_{-L}^{-\frac{g}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \left[ \left( \frac{\partial V_I}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_I}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \right. \quad (17)$$

$$\left. + \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left[ \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \right\}$$

Por lo que finalmente, después de realizar el proceso de minimización de la energías se encuentra que  $B_n$  está dado por:

$$B_n = (V_2 - V_1) \frac{e^{-\frac{k_n g}{2}}}{\frac{g}{2} k_n^2 D J_1 \left( k_n \frac{D}{2} \right)}$$

Para facilitar los cálculos, se realiza convenientemente un cambio de variables donde estas quedan expresadas en terminos del diámetro del cilindro como se muestra a continuación:

$$G = \frac{g}{D}, \quad Z = \frac{z}{D}, \quad R = \frac{2r}{D}, \quad K_n = \frac{k_n D}{2}.$$

$$B_n = (V_2 - V_1) \frac{e^{-K_n G}}{2K_n^2 G J_1(K_n)}. \quad (18)$$

Por tanto, los potenciales pueden ser reescritos como:

$$V_I(Z, R) = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{2K_n G} - 1 \right) e^{2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (19)$$

$$V_{II}(Z, R) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \left( \frac{V_2 - V_1}{G} \right) Z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{-2K_n Z} - e^{2K_n Z} \right) J_0(K_n R) \quad (20)$$

$$V_{III}(Z, R) = V_2 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{2K_n G} - 1 \right) e^{-2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (21)$$

Detalles del procedimiento para concluir a las expresiones de la distribución del potencial en cada región, se encuentran consignados desde el apéndice A hasta el apéndice C. Entre tanto, se muestra a continuación gráficos referentes a la distribución del potencial del sistema de electrodos.

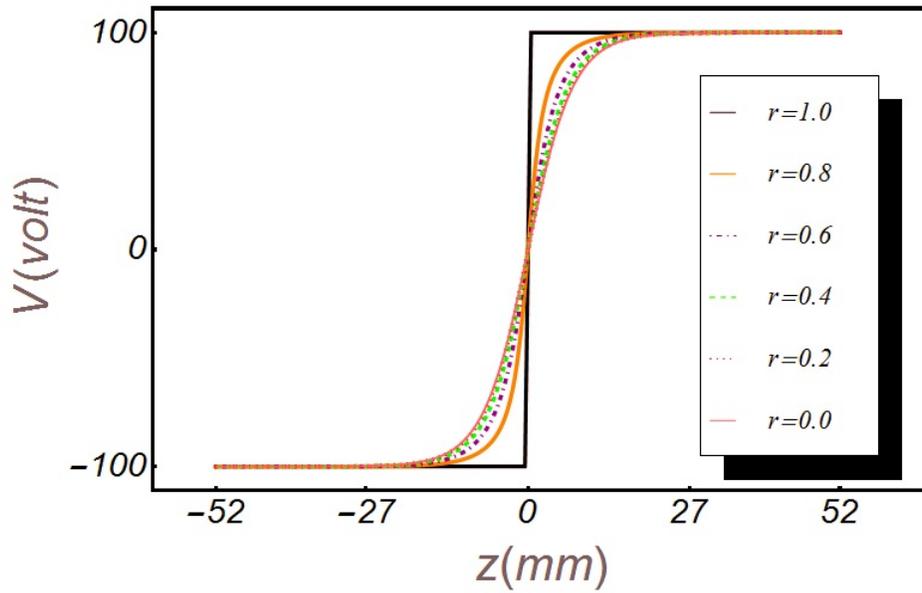


Figura 3: Gráfico del potencial electrostático de dos electrodos cilíndricos para diferentes posiciones a lo largo del radio, dado por las funciones  $V_I$ ,  $V_{II}$  y  $V_{III}$ . El sistema de lentes tiene Longitud 104 mm,  $D = 20\text{mm}$ , longitud de cada cilindro es de 50 mm, la separación entre cilindros 2 mm, voltajes sobre electrodos, -100 V y 100V.

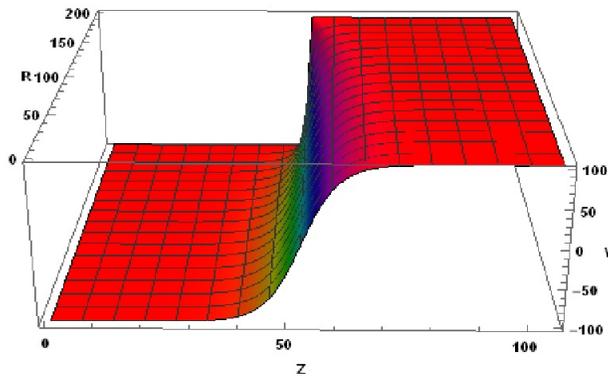


Figura 4: Gráfico del potencial electrostático de dos electrodos cilíndricos dado por las mismas condiciones de la figura 3, en forma tridimensional.

De las Figuras 3 y 4, se aprecia cómo las funciones describen correctamente el comportamiento del potencial electrostático en el sistema de lentes particular que se ha modelado. Por otra parte, se observa que en gran parte de las regiones I y III el potencial permanece constante; pero a diferencia de estas, en la región II se puede notar que el potencial varía.

## 4. Capítulo 4: Cálculo de campo eléctrico y trayectorias.

En un sistema de lentes electrostático de dos elementos con geometría cilíndrica, circula un haz de partículas cargadas que experimentan una fuerza eléctrica debido a la interacción de la partículas con el campo eléctrico; en consecuencia de lo anterior se determina el campo eléctrico que se genera, partiendo de la función potencial, lo cual se muestra en el Capítulo 3. Además, se plantean las ecuaciones de movimiento de las partículas para realizar una descripción de las trayectorias y observar el efecto que genera la acción del campo eléctrico sobre estas. Por consiguiente en este capítulo se determina el campo eléctrico y la ecuación de movimiento; resolviendo estas numéricamente con el software (Wolfram Mathematica) y se realiza un análisis detallado del comportamiento de las partículas sometidas bajo los efectos antes mencionados.

### 4.1. Cálculos del campo eléctrico.

Se considera que el haz de iones, está constituido por átomos de Helio, los cuales poseen una carga de  $q_{He} = 3,2 \times 10^{-19}C$  y una masa de  $m_{He} = 3,4 \times 10^{-27}Kg$ .

El haz de iones se hace incidir sobre el sistema de lentes (bajo condiciones de vacío); circula por el primer lente que posee un potencial  $V_1$ , siguen su movimiento y a medida que se acercan a la región central se genera un campo eléctrico y por ende una fuerza eléctrica. El campo eléctrico ocasiona un efecto sobre la trayectoria de las partículas generando una acción de enfoque, luego al salir de dicha región la fuerza eléctrica desaparece y las partículas entran al segundo electrodo que dispone de un potencial  $V_2$  siguiendo nuevamente su trayectoria; moviéndose a velocidad constante. Cabe mencionar que en las regiones donde el potencial es constante no hay fuerza eléctrica por ende no hay campo eléctrico.

Entre tanto, para determinar el campo eléctrico al que están sometidas las partículas se considera la siguiente ecuación.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \tag{22}$$

Sabemos que  $\vec{E} = -\nabla V$ ; como  $V$  es dependiente de  $r$  y  $z$  se tiene que  $\vec{E} = E_r \hat{r} + E_z \hat{z}$ . Por lo que:

$$\vec{E} = - \left[ \frac{\partial V(z, r)}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial V(z, r)}{\partial z} \hat{z} \right] \quad (23)$$

Teniendo en cuenta que la función potencial, se define como la suma del potencial que se genera en cada región; esto es,  $V(z, r) = V_I(z, r) + V_{II}(z, r) + V_{III}(z, r)$ . Así pues:

$$E_r = - \frac{\partial V(z, r)}{\partial r} = - \left[ \frac{\partial V_I(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial V_{II}(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial V_{III}(z, r)}{\partial r} \right] \quad (24)$$

$$E_{r1} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{2K_n Z} J_1(K_n R)$$

$$E_{r2} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( e^{-2K_n Z} - e^{2K_n Z} \right) J_1(K_n R)$$

$$E_{r3} = - \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{-2K_n Z} J_1(K_n R)$$

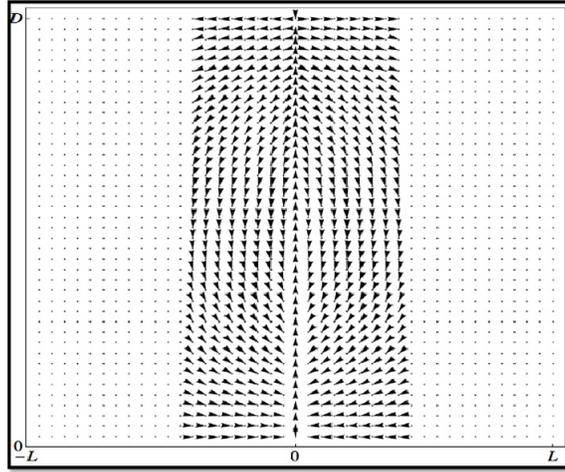
$$E_z = - \frac{\partial V(z, r)}{\partial z} = - \left[ \frac{\partial V_I(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial V_{II}(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial V_{III}(z, r)}{\partial z} \right] \quad (25)$$

$$E_{z1} = - \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{2K_n Z} J_0(K_n R)$$

$$E_{z2} = \left( \frac{V_1 - V_2}{G} \right) + \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( e^{-2K_n Z} + e^{K_n Z} \right) J_0(K_n R)$$

$$E_{z3} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{-2K_n Z} J_0(K_n R)$$

En la Figura 5, se muestra el campo eléctrico, que se genera en un sistema de lentes, cuyos electrodos están a diferentes potenciales.



*Figura 5:* Campo eléctrico generado en el sistema de los lentes electrostáticos.

Se observa en la Figura 5, que el campo eléctrico que se genera evidencia un efecto en la región central del sistema de lentes, que es comprendida por la región II y parte de las regiones I y III. Las regiones donde no se pronuncia el campo eléctrico se debe, a que, el potencial es constante y como resultado de esto, se obtiene que la divergencia del potencial es cero, en consecuencia, el campo eléctrico es cero.

#### 4.2. Ecuaciones de movimiento y modelado de las trayectoria.

Para conocer la fuerza eléctrica que se genera en el sistema de lentes, se debe conocer el campo eléctrico y la carga de las partículas en estudio; lo cual es mostrado en la sección 4.1. Con base a lo anterior se conoce la fuerza eléctrica que se genera, esta fuerza provoca que la partícula altere su movimiento inicial a causa del efecto que genera el campo; haciendo que su velocidad inicial varíe y en consecuencia se produce una aceleración, por lo que, utilizando la segunda ley de Newton se establecen las ecuaciones de movimiento que permiten dar una descripción de las trayectorias de las partículas, esto es:

$$m\vec{a} = -q\vec{E} \quad (26)$$

$$\vec{a} = -\frac{q}{m} \vec{E} \quad (27)$$

Con  $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_z \hat{z}$ , con  $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2}$  y  $a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{q}{m} E_r \quad (28)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{q}{m} E_z \quad (29)$$

Como el campo eléctrico está dado en términos de  $R$  y  $Z$ , variables adimensionales, por tanto las ecuaciones deberán expresarse en término de las mismas; considerando que  $R = \frac{2r}{D}$  y  $Z = \frac{z}{D}$ . En consecuencia se tiene que:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2 \frac{q}{m} \frac{E_r}{D} \quad (30)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{E_z}{D} \quad (31)$$

Para más detalles, respecto a el procedimiento efectuado, diríjase hacia el apéndice E.

Las ecuaciones (30) y (31) son ecuaciones diferenciales de segundo orden, que permiten modelar las trayectorias de las partículas que pasan por el sistema de lentes, las cuales se resuelven numericamente y teniendo en cuenta las condiciones iniciales impuestas para el sistema; esto con ayuda del software Wolfram Mathematica (que es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemática y áreas computacionales capaz de hacer cálculos y desplegar visualizaciones de Mathematica en línea). Para ello se estima que los iones entran al sistema de lentes por una pupila de 0.4 mm de radio, formando un ángulo muy pequeño respecto al eje  $Z$  y con una energía cinética fija  $E_c$ , la cual es asumida de  $K \cdot eV$ , donde  $K$  es un valor arbitrario de la energía cinética que se desee establecer para las partículas; con dicha información se determina las condiciones iniciales para la posición y velocidad de las partículas (En el apéndice E, se encuentra especificado el cálculo analítico que se realiza

para obtener expresiones de las condiciones iniciales).

Se muestra a continuación una serie de figuras, tomadas del software Mathematica donde fueron programadas; sobre las cuales se realiza un respectivo análisis, ya que se efectúa una variación de parámetros con los que se pueden ver efectos significativos, con base en el comportamiento de las partículas.

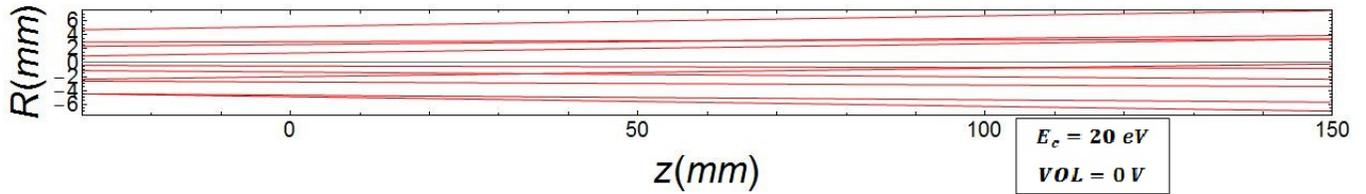


Figura 6: Trayectoria de las partículas que atraviesan el sistema de lentes electrostáticas de longitud total de  $2L = 10,05mm$ , diámetro  $D = 20mm$ , con un potencial de  $0V$  y una energía de  $20eV$ .

En la Figura 6, se muestra la trayectoria de las partículas que entran a través de la pupila del lente con diámetro de  $0.4\text{ mm}$  y un ángulo de incidencia de  $0.02$  grados (tomado convenientemente bajo la circunstancia del ángulo que se forma al incidir sobre el sistema). Se define una energía cinética de  $20\text{ eV}$ , manteniendo un potencial de  $0V$ . En esta se observa la dispersión de las partículas, es decir, que el sistema aún no está en funcionamiento.

De las Figura 7, 8 y 9, es conveniente mencionar que las partículas inciden sobre el sistema con un ángulo de  $0.02$  grados, para cada una de las condiciones que allí se muestran.

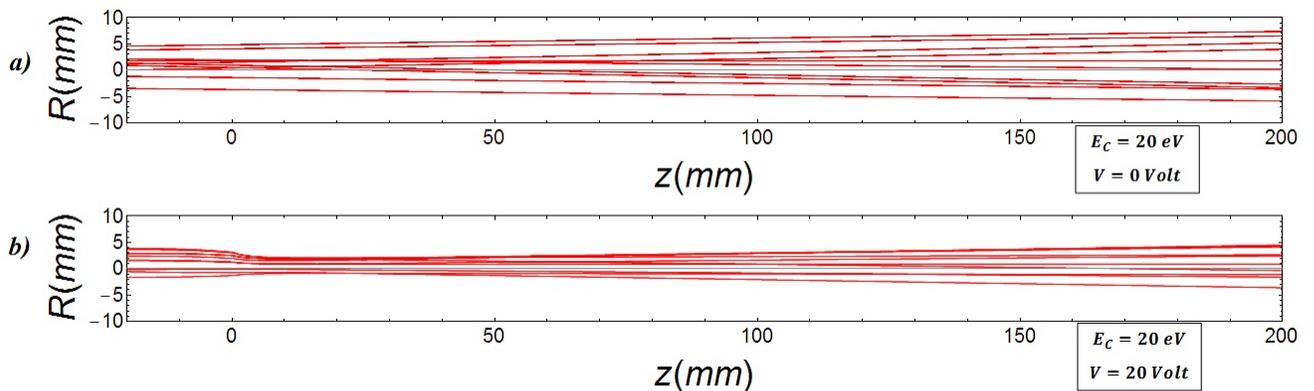


Figura 7: Trayectoria de las partículas que pasan por el sistema de lentes electrostáticas de longitud total de  $2L = 10,05mm$ , diámetro  $D = 20mm$  con  $E_c = 20eV$ . (a)  $V = 0\text{ Volt}$  y (b)  $V = 20\text{ Volt}$ .

En la figura 7, se visualiza las trayectorias de las partículas para potencial de  $0$  y  $20\text{ Volt}$ . Se logra apreciar el efecto de enfoque que se produce en las partículas cuando son sometidas

a un potencial de 20 Volt a partir de ello, se infiere que la trayectoria se ve afectada por el campo eléctrico.

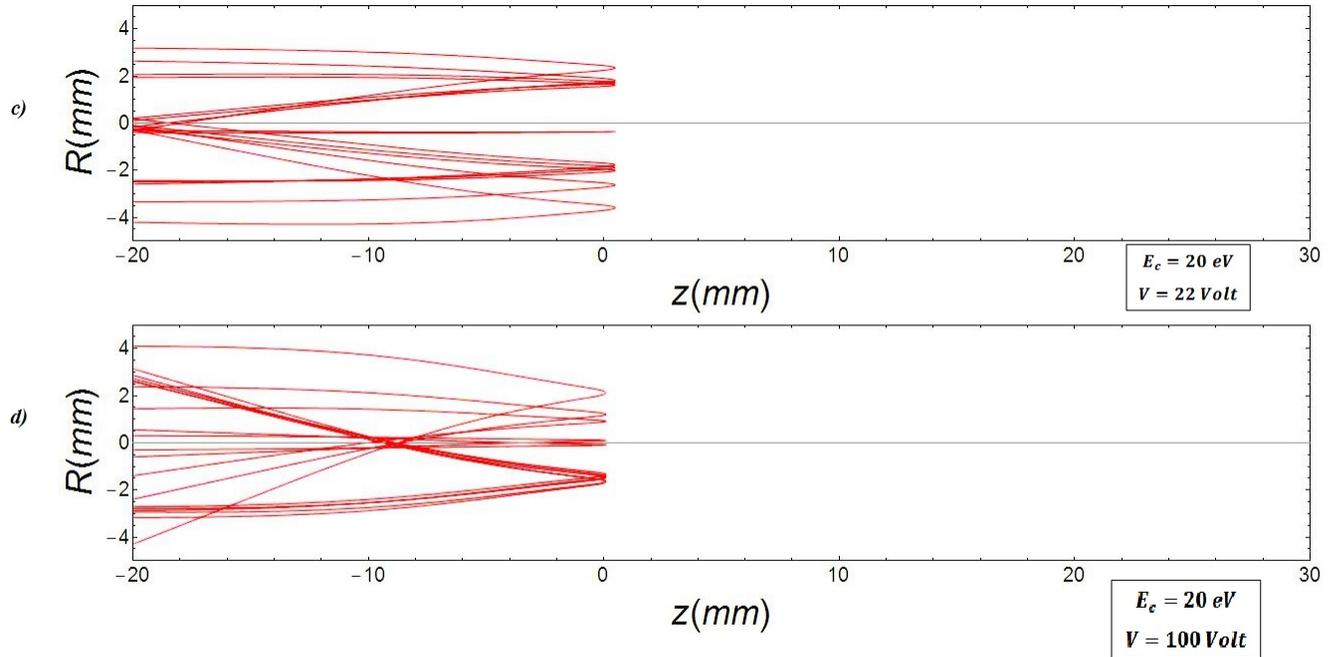


Figura 8: Trayectoria de las partículas que atraviesan el sistema de lentes electrostáticas de longitud total de  $2L = 10,05mm$ , diámetro  $D = 20mm$  con  $E_c = 20eV$ . (c)  $V = 22Volt$  y (d)  $V = 100Volt$

En la figura 8, se visualiza las trayectorias de las partículas para energías iguales y potenciales de 22 y 100 Volt; se muestra que las partículas no logran pasar de la región central debido a la acción del campo que actúan como barrera a partir de cierto potencial, en este caso 22 Volt. En consecuencia, las partículas son devueltas a la región de incidencia; dado que, para cada valor de la energía cinética de las partículas, existe un potencial a partir del cual estas no atraviesan el sistema de lentes y posteriormente son devueltas a la región de partida.

Con relación a la Figura 9, se divisa la trayectoria de las partículas en el que se estiman distintos valores para la energía y potencial.

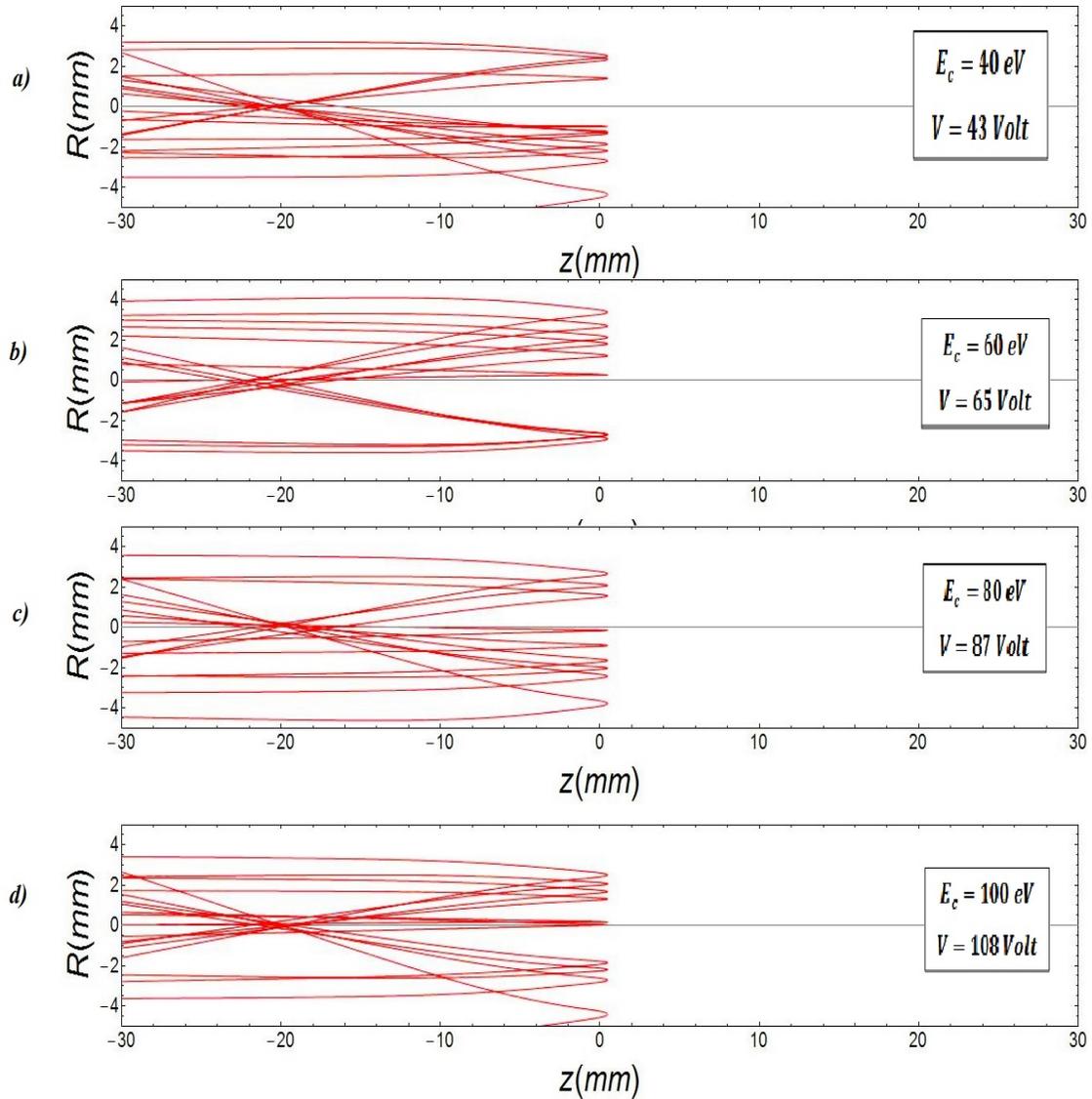


Figura 9: Trayectorias de partículas para el sistema de lentes electrostáticos de longitud total de  $2L = 10,05mm$ , diámetro  $D = 20mm$ ; para distintos valores de energía y potencial; (a)  $E_c = 40eV$  y  $V = 43Volt$ , (b)  $E_c = 60eV$  y  $V = 65Volt$ , (c)  $E_c = 80eV$  y  $V = 87Volt$ , (d)  $E_c = 100eV$  y  $V = 108Volt$

Se muestran en la Figura 9, casos para cuando las partículas poseen distintos valores de energía y potenciales; se infiere que, conforme las partículas se aproximan a la región del campo, la velocidad de las partículas es afectada, ya que se produce un cambio en su dirección y las partículas no pasan al segundo electrodo. Otro factor influyente son las bajas energías, al generarse una fuerza debido a la interacción del campo y las partículas, hace que estas no pasen de la región y son devueltas a la región de partida.

Tomando datos para ciertos valores de energía cinética y potencial, se construye una gráfica de la energía cinética en función del potencial de paso como se muestra en la Figura 10.

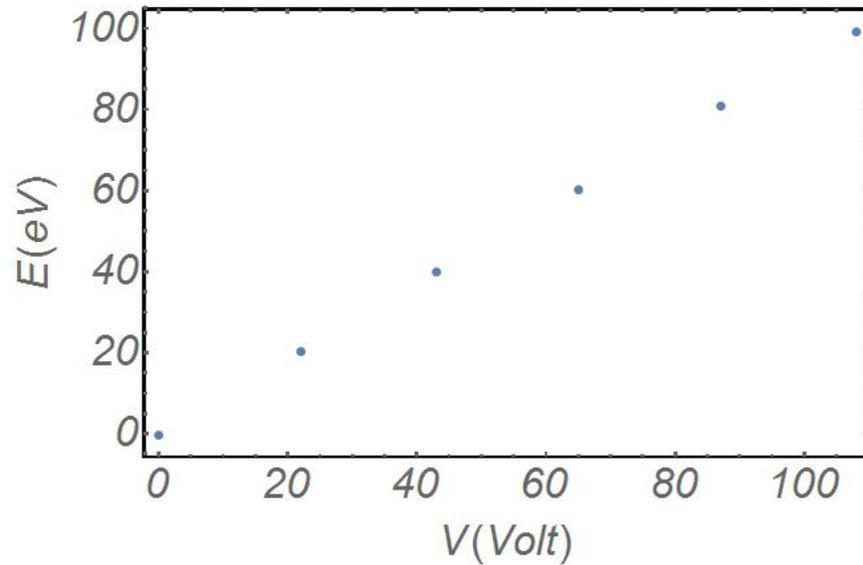


Figura 10: Gráfica de la energía en función del potencial de paso.

La Figura 10, representa la relación que hay entre el potencial de paso y la energía cinética de las partículas, donde observa que hay una relación directamente proporcional, es decir, que la energía aumenta de forma lineal con el potencial de paso; por consiguiente, el paso de las partículas a través del sistema de lente electrostáticos será eficiente siempre y cuando la energía cinética y el potencial encuentren en un rango de operación.

También se debe tomar en cuenta, que los potenciales sobre los electrodos deben ser menor al potencial que genera la barrera que impide el paso de las partículas.

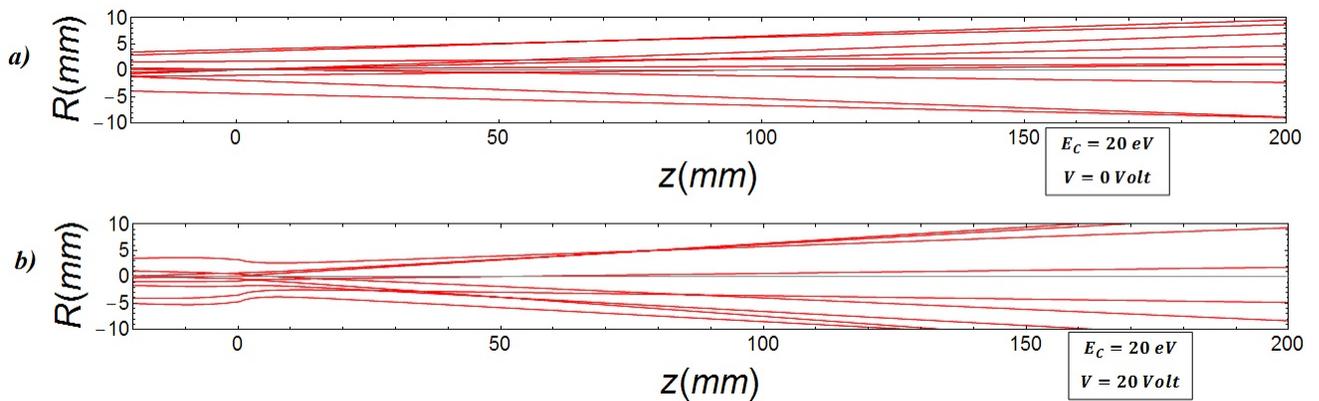


Figura 11: Gráfica de trayectorias para de ángulos de incidencia relativamente grandes.

En la Figura 11, se efectúa un cambio en el ángulo de incidencia respecto ángulo que utilizó en las figuras anteriores, estimando un ángulo mayor, el cual es de 0.04 grados. Se toma para la energía y el potencial valores iguales a los que se encuentran en la Figura 7, de tal modo que se puede realizar comparaciones acerca del cambio que produce en consecuencia de un ángulo mayor; de modo que, se logra distinguir que para el ángulo mayor, las partículas pierden rápidamente la acción de enfoque, por el contrario en la Figura 7; la acción de enfoque no se prolonga en gran magnitud, sin embargo, las partículas no están muy dispersas.

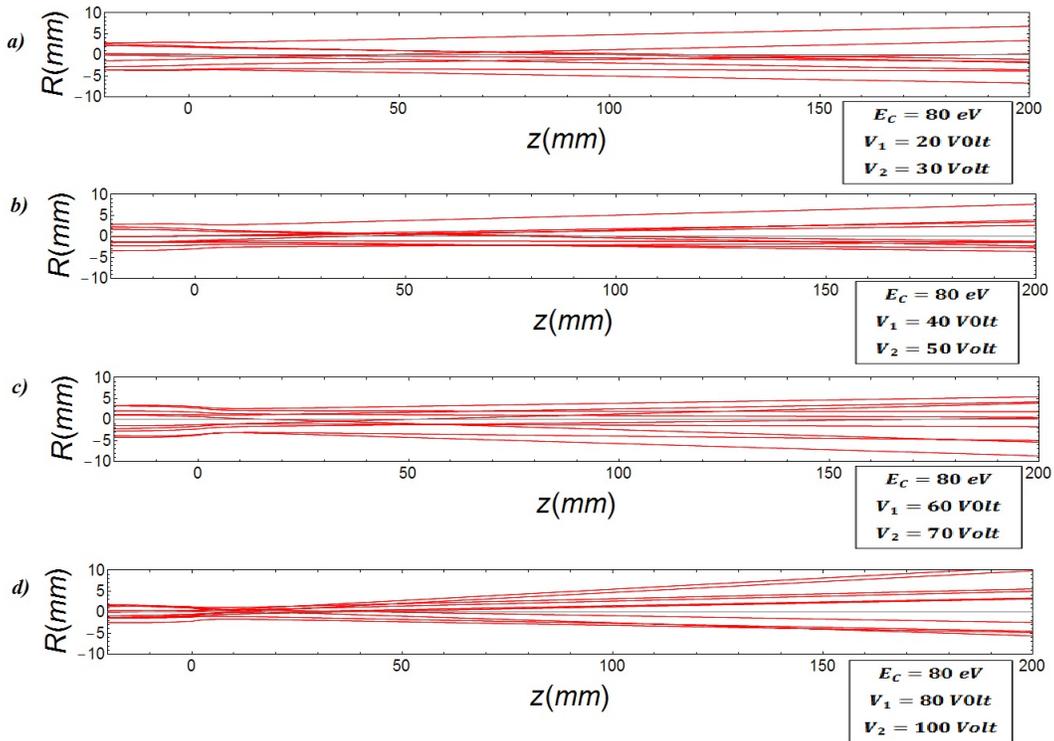


Figura 12: Gráfico para electrodos con distintos potenciales y energía cinética fija  $E_c = 80eV$ . a)  $V_1 = 20 Volt$  y  $V_2 = 30 Volt$  ;  $V_1 = 40 Volt$  y  $V_2 = 50 Volt$  ; c)  $V_1 = 60 Volt$  y  $V_2 = 70 Volt$  y d)  $V_1 = 80 Volt$  y  $V_2 = 100 Volt$ . El sistema de lentes electrostáticas posee longitud total de  $2L = 10,05mm$  y diámetro  $D = 20mm$

En la Figura 12, se muestran las diferentes trayectorias al variar el potencial en el primer y segundo electrodo, todos para una misma energía de lo que se observar, como el potencial modifica las trayectorias y se percibe un mejor enfoque a medida que se aumenta el potencial.

## 5. Conclusiones

En este trabajo de grado es presentado un método preciso para calcular el potencial y analizar la trayectoria de partículas cargadas dentro de un sistema de lentes electrostáticas de dos elementos, cada uno con una geometría cilíndrica. El sistema de lentes posee una longitud total  $2L$  y un diámetro  $D$ . Para obtener la expresión de la función potencial total, es importante encontrar la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, razón por la cual, inicialmente se determinó dicha solución. Al encontrar la función potencial, que se define como la suma del potencial eléctrico en cada una de las regiones; se generaron gráficos que muestran el potencial para cada región, evidenciando que para las regiones I y III el potencial se mantiene constante contrario de lo que se percibe en la región II, en la que existe una variación del mismo. Para analizar y describir el comportamiento de las partículas se determina el campo eléctrico que posteriormente propicia el cálculo de las ecuaciones que permiten modelar las trayectorias.

Retomando el análisis para el campo eléctrico, se infiere que solo en la región central; la cual esta constituida por la región II y parte de la regiones I y III, se produce campo eléctrico. Es bien sabido que las partículas varían su velocidad inicial como consecuencia de la fuerza eléctrica que se genera, debidos a la interacción del campo eléctrico y las partículas cargadas; por lo que finalmente a raíz de este análisis se obtuvo la expresión para las trayectorias de las partículas que luego se modelan con el software Wolfram Mathematica; del que se tomaron varios gráficos que dan lugar a la construcción del siguiente análisis: considerando que las partículas entran al sistema formando un ángulo pequeño respecto al eje  $Z$ , a través de una pupila de radio  $R$ . Que luego de entrar al sistema con valores de energía y potenciales estimados; se observa que cada partícula con energía  $K$ , tiene asociado un potencial de paso, en el cual, el campo eléctrico permite que las partículas circulen a través del sistema y que, al exceder el valor de dicho potencial, el campo es la barrera que imposibilita a las partículas cargadas cruzar la región donde se ha creado este y por el contrario las devuelve a la región de incidencia, esto es como consecuencia de que la energía no es la necesaria. También se observa el efecto de enfoque que se produce cuando las partículas pasan por el campo eléctrico

y a medida que las partículas se alejan de este, el efecto de enfoque disminuye, llegan a la región en la que no hay fuerza eléctrica debido al potencial constante y siguen nuevamente su trayectoria; esto es considerando los parámetros adecuados para que las partículas circulen por el sistema de lentes. Por tanto se concluye que el potencial y la energía dentro de un sistema de lentes electrostático debe aumentar o disminuir en la misma proporción para que la transición a través del sistema sea eficiente.

## 6. Apéndices

### 6.1. Apéndice A: Cálculo de las funciones potenciales en cada región

En la sección 3.2, se aprecia que el potencial puede ser expresado como:

$$V(z, r) = \left( A_k e^{k_n z} + B_k e^{-k_n z} \right) J_0(k_n r) \quad (32)$$

En consideración de las condiciones de contorno entre las regiones, se escriben los potenciales de la siguiente manera:

$$V_I(z, r) = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{k_n z} J_0(k_n r) \quad (33)$$

$$V_{II}(z, r) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) z + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n e^{-k_n z} + B_n' e^{k_n z} \right) J_0(k_n r) \quad (34)$$

$$V_{III}(z, r) = V_2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n z} J_0(k_n r) \quad (35)$$

Cuando  $r = \frac{D}{2}$  las funciones de Bessel en las regiones I y III deben anularse, lo cual selecciona los coeficientes  $k_n$  que están dados por los ceros de la función de Bessel  $J_0(k_n, r)$ , por simetría en el sistema, se tiene:

$$A_n = -C_n \quad (36)$$

$$B_n = -B_n' \quad (37)$$

La continuidad del potencial a través del límite entre las regiones (I y II), (II y III) implica que la componente radial del campo es continua a través de este límite para los límites entre las fronteras (I y II)

$$V_I(-\frac{g}{2}, r) = V_{II}(-\frac{g}{2}, r) \quad (38)$$

$$V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n \frac{g}{2}} J_0(kr) = \left( \frac{V_1 + V_2}{2} \right) + \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) \left( -\frac{g}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B e^{-k_n \frac{g}{2}} + B'_n e^{k_n \frac{g}{2}} \right) J_0(k_n r) \quad (39)$$

$$A_n = B_n \left( e^{k_n g} - 1 \right) \quad (40)$$

Por tanto se tiene que:

$$V_I(z, r) = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{k_n g} - 1 \right) e^{k_n z} J_0(kr) \quad (41)$$

$$V_{II}(z, r) = \left( \frac{V_1 + V_2}{2} \right) + \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) z \quad (42)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{-k_n z} - e^{k_n z} \right) J_0(k_n r)$$

$$V_{III}(z, r) = V_2 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{k_n g} - 1 \right) e^{-k_n z} J_0(k_n r) \quad (43)$$

Entre tanto, el potencial total corresponde a la suma del potencial en cada region del sistema.

## 6.2. Apéndice B: Cálculo de la densidad de energía total del sistema de dos lentes

El último coeficiente  $B_n$  se determina aplicando el principio variacional  $\frac{\partial W}{\partial B_n} = 0$ , donde  $W$  es la densidad de energía del campo eléctrico, la cual está dada por:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (44)$$

Con  $E = -\nabla V$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left( \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau \quad (45)$$

Por la simetría del sistema, es suficiente determinar la energía hasta el punto medio del sistema.

$$W = \frac{2\pi\varepsilon_0}{2} \left[ \int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_I}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_I}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz + \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \right] \quad (46)$$

Se determina cada una de las derivadas parciales para las ecuaciones 40 y 41.

$$\frac{\partial V_I}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{k_n g} - 1) e^{k_n z} J_1(k_n r) \quad (47)$$

$$\frac{\partial V_I}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{k_n g} - 1) e^{k_n z} J_0(k_n r) \quad (48)$$

$$\frac{\partial V_{II}}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{-k_n z} - e^{k_n z}) J_1(k_n r) \quad (49)$$

$$\frac{\partial V_{II}}{\partial z} = \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{k_n z} + e^{-k_n z}) J_0(k_n r) \quad (50)$$

Determinando cada una de las integrales.

$$\int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_I}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_I}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \quad (51)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( -\sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{k_n g} - 1) e^{-k_n z} J_1(k_n r) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{k_n g} - 1) e^{-k_n z} J_0(k_n r) \right)^2 \right) r dr dz \quad (52)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m B_n k_n (e^{k_n g} - 1) (e^{k_m g} - 1) \int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} e^{(k_n + k_m)z} dz \int_0^{\frac{D}{2}} J_1(k_n r) J_1(k_m r) r dr \quad (53)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m B_n k_n (e^{k_n g} - 1) (e^{k_m g} - 1) \int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} e^{(k_n + k_m)z} dz \int_0^{\frac{D}{2}} J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr$$

Se realiza un cambio de variable, haciendo  $K_n = \frac{k_n D}{2}$  y se usa la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel.

$$\int_0^a J_\nu\left(\frac{k_n x}{a}\right) J_\nu\left(\frac{k_m x}{a}\right) x dx = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_n) \delta_{nm}$$

Entonces.

$$\int_0^{\frac{D}{2}} J_1\left(\frac{K_n 2r}{D}\right) J_1\left(\frac{K_m 2r}{D}\right) x dx = \frac{D^2}{8} J_2^2(K_n) \delta_{nm}$$

Luego.

$$\int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} e^{2k_n z} dz = \frac{e^{-kg}}{2k_n}$$

En consecuencia de lo anterior se obtiene como resultado de las integrales lo siguiente.

$$\int_{-\infty}^{-\frac{g}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_I}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_I}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \quad (54)$$

$$= \frac{D^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 k_n (e^{k_n g} - 1)^2 e^{-kg} (J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n)) \quad (55)$$

Resolviendo la última integral.

$$\frac{\partial V_{II}}{\partial r} = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n (e^{-k_n z} - e^{k_n z}) J_1(k_n r) \quad (56)$$

$$\frac{\partial V_{II}}{\partial z} = \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \left( e^{k_n z} + e^{-k_n z} \right) J_0(k_n r)$$

$$\int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \quad (57)$$

$$= \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \left( e^{-k_n z} - e^{k_n z} \right) J_1(k_n r) \right]^2 r dr dz \quad (58)$$

$$+ \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left[ \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \left( e^{k_n z} + e^{-k_n z} \right) J_0(k_n r) \right]^2 r dr dz$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m B_n k_n \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( e^{k_m z} + e^{-k_m z} \right) \left( e^{k_n z} + e^{-k_n z} \right) J_0(k_m r) J_0(k_n r) \quad (59)$$

$$+ \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right)^2 r dr dz - \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( e^{k_m z} + e^{-k_m z} \right) J_0(k_m r)$$

$$- \left( \frac{V_2 - V_1}{g} \right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m \int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( e^{k_m z} + e^{-k_m z} \right) J_0(k_m r)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_m k_m B_n k_n \left( e^{k_n g} - 1 \right) \left( e^{k_m g} - 1 \right)$$

$$\int_{-\frac{g}{2}}^0 \left( e^{k_m z} + e^{-k_m z} \right) \left( e^{k_n z} + e^{-k_n z} \right) \int_0^{\frac{D}{2}} J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr$$

Se considera que:  $e^x + e^{-x} = 2\cosh x$

$$2 \int_{-\frac{g}{2}}^0 \cosh(k_n z) dz = \frac{2}{k_n} \sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right)$$

$$Y (e^x + e^{-x})^2 = (2\cosh x)^2$$

$$4 \int_{-\frac{g}{2}}^0 \cosh^2(k_n z) dz = g + \frac{1}{k_n} \sinh(k_n g)$$

$$\int_{-\frac{g}{2}}^0 \int_0^{\frac{D}{2}} \left( \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{II}}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \quad (60)$$

$$= \frac{D^2}{16} \frac{(V_2 - V_1)^2}{g} - 2D \frac{(V_2 - V_1)}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{k_n} \sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) J_1^2(K_n) \quad (61)$$

$$+ \frac{D^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 k_n \left[ k_n g \left( J_1^2(K_n) - J_2^2(K_n) \right) + \sinh(k_n g) \left( J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n) \right) \right]$$

Por lo tanto, la energía total es:

$$\frac{W}{\pi \varepsilon_0} = \frac{D^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 k_n \left( e^{k_n g} - 1 \right)^2 e^{-k_n g} \left( J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n) \right) + \frac{D^2}{16} \frac{(V_2 - V_1)^2}{g} \quad (62)$$

$$- 2D \frac{(V_2 - V_1)}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{k_n} \sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) J_1^2(K_n)$$

$$+ \frac{D^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 k_n \left[ k_n g \left( J_1^2(K_n) - J_2^2(K_n) \right) + \sinh(k_n g) \left( J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n) \right) \right]$$

### 6.3. Apéndice C: Cálculo del coeficiente $B_n$ y potenciales finales en términos de las variables adimensionales

El último coeficiente,  $B_n$ , es determinado mediante un proceso de minimización de la energía

respeto a  $B_n$ , esto es:

$$\frac{\partial W}{\partial B_n \pi \varepsilon_0} = 0 \quad (63)$$

$$0 = \frac{D^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \left( e^{k_n g} - 1 \right)^2 e^{-k_n g} \left( J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n) \right) - 2D \frac{(V_2 - V_1)}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) J_1^2(K_n)}{k_n} \quad (64)$$

$$+ \frac{D^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \left[ k_n g \left( J_1^2(K_n) - J_2^2(K_n) \right) + \sinh(k_n g) \left( J_1^2(K_n) + J_2^2(K_n) \right) \right]$$

Considerando la expansión en serie de  $(e^{k_n g}) = 1 + k_n g + \dots$ . Luego, tomando los dos primeros términos de la serie:  $(e^{k_n g} - 1)^2 = (1 + k_n g - 1)^2 = (k_n g)^2$  y si  $g \ll 1 \rightarrow (k_n g)^2 = 0$

Así:

$$0 = B_n \frac{D k_n^2}{2} g J_1^2(K_n) - 2D \frac{(V_2 - V_1)}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) J_1^2(K_n)}{k_n}$$

$$\text{si: } \sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) = \frac{e^{\frac{k_n g}{2}} - e^{-\frac{k_n g}{2}}}{2} = \frac{e^{-\frac{k_n g}{2}}}{2} \left( e^{k_n g} - 1 \right) \rightarrow \sinh\left(k_n \frac{g}{2}\right) = e^{-\frac{k_n g}{2}} \frac{k_n g}{2}$$

$$B_n = (V_2 - V_1) \frac{e^{-\frac{k_n g}{2}}}{\frac{g}{2} D k_n^2 J_1(K_n)}$$

Para facilitar los cálculo, se realiza convenientemente un cambio de variables:  $G = \frac{g}{D}$ ,  $Z = \frac{z}{D}$ ,  $R = \frac{2r}{D}$ ,  $K_n = \frac{k_n D}{2}$

$$B_n = (V_2 - V_1) \frac{e^{-K_n G}}{2 K_n^2 G J_1(K_n)}. \quad (65)$$

Finalmente los potenciales quedan expresados de la siguiente forma:

$$V_I(Z, R) = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{2K_n G} - 1 \right) e^{2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (66)$$

$$V_{II}(Z, R) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \left( \frac{V_2 - V_1}{G} \right) Z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{-2K_n Z} - e^{2K_n Z} \right) J_0(K_n R) \quad (67)$$

$$V_{III}(Z, R) = V_2 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( e^{2K_n G} - 1 \right) e^{-2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (68)$$

#### 6.4. Apéndice D: Cálculo del campo eléctrico.

Se considera inicialmente la fuerza eléctrica  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , donde  $\vec{E} = -\nabla V$ ; como  $V$  es dependiente de  $r$  y  $z$  se tiene que  $\vec{E} = E_r \hat{r} + E_z \hat{z}$ , por lo que:

$$\vec{E} = - \left[ \frac{\partial V(z, r)}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial V(z, r)}{\partial z} \hat{z} \right] \quad (69)$$

Con  $V(z, r) = V_I(z, r) + V_{II}(z, r) + V_{III}(z, r)$

Para  $\frac{\partial V(z, r)}{\partial r}$

$$\frac{\partial V_I(z, r)}{\partial r} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{2K_n Z} J_1(K_n R) \quad (70)$$

$$\frac{\partial V_{II}(z, r)}{\partial r} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( e^{-2K_n Z} - e^{2K_n Z} \right) J_1(K_n R) \quad (71)$$

$$\frac{\partial V_{III}(z, r)}{\partial r} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{-2K_n Z} J_1(K_n R) \quad (72)$$

Ahora para  $\frac{\partial V(z, r)}{\partial z}$

$$\frac{\partial V_I(z, r)}{\partial z} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (73)$$

$$\frac{\partial V_{II}(z, r)}{\partial z} = - \left( \frac{V_2 - V_1}{G} \right) - \frac{2}{D} \left( \frac{V_1 - V_2}{G} \right) \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( e^{-2K_n Z} + e^{K_n Z} \right) J_0(K_n R) \quad (74)$$

$$\frac{\partial V_{III}(z, r)}{\partial z} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left( 1 - e^{2K_n G} \right) e^{-2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (75)$$

$$\text{Luego } E_r = -\frac{\partial V(z,r)}{\partial r} = -\left[\frac{\partial V_I(z,r)}{\partial r} + \frac{\partial V_{II}(z,r)}{\partial r} + \frac{\partial V_{III}(z,r)}{\partial r}\right]$$

$$E_{r_1} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(1 - e^{2K_n G}\right) e^{2K_n Z} J_1(K_n R) \quad (76)$$

$$E_{r_2} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(e^{-2K_n Z} - e^{2K_n Z}\right) J_1(K_n R) \quad (77)$$

$$E_{r_3} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(1 - e^{2K_n G}\right) e^{-2K_n Z} J_1(K_n R) \quad (78)$$

$$E_z = -\frac{\partial V(z,r)}{\partial z} = -\left[\frac{\partial V_I(z,r)}{\partial z} + \frac{\partial V_{II}(z,r)}{\partial z} + \frac{\partial V_{III}(z,r)}{\partial z}\right]$$

$$E_{z_1} = -\frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(1 - e^{2K_n G}\right) e^{2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (79)$$

$$E_{z_2} = \left(\frac{V_1 - V_2}{G}\right) + \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(e^{-2K_n Z} + e^{K_n Z}\right) J_0(K_n R) \quad (80)$$

$$E_{z_3} = \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} K_n B_n \left(1 - e^{2K_n G}\right) e^{-2K_n Z} J_0(K_n R) \quad (81)$$

Finalmente el campo eléctrico, queda expresado en términos de las variables adimensionales, por lo que, al determinar las ecuaciones de movimiento deberán ser expresadas de igual forma, es decir, en términos de las variables adimensionales.

## 6.5. Apéndice E: Ecuación de movimiento.

Ahora, se tiene en cuenta la relación entre la segunda ley de Newton y la fuerza eléctrica como se expresa a continuación.

$$m\vec{a} = -q\vec{E} \quad (82)$$

$$\vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E} \quad (83)$$

Con  $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_z \hat{z}$ ; como  $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2}$  y  $a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$ , Luego.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{q}{m} E_r \quad (84)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{q}{m} E_z \quad (85)$$

Como el campo está dado en términos de  $R$  y  $Z$ , variables adimensionales, por tanto se adimensionaliza también las ecuaciones.

Se tiene que  $Z = \frac{z}{D}$ ,  $R = \frac{2r}{D}$ , por tanto:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{q}{m} E_r \quad (86)$$

Se multiplican a ambos lados por  $\frac{2}{D}$

$$\frac{2}{D} \frac{d^2 r}{dt^2} = 2 \frac{q}{m} \frac{E_r}{D} \quad (87)$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2 \frac{q}{m} \frac{E_r}{D} \quad (88)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{q}{m} E_z \quad (89)$$

Se multiplica a ambos lados por  $\frac{1}{D}$

$$\frac{1}{D} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{D} \frac{q}{m} E_z \quad (90)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{E_z}{D} \quad (91)$$

Como:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2 \frac{q}{m} \frac{E_r}{D} \quad (92)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{E_z}{D} \quad (93)$$

Considerando el sistema internacional de unidades se toma  $E_r$  en unidades de *voltios*,  $D$  en unidad de metro, las partículas del gas en estudio son de Helio; cuyas partículas poseen una carga de  $q_{He} = 2e = 2(1,6 \times 10^{-19}C) = 3,2 \times 10^{-19}C$  y una masa de  $m_{He} = 2m_p = 2(1,7 \times 10^{-27}Kg) = 3,4 \times 10^{-27}Kg$ . Teniendo en cuenta las unidades de las ecuaciones se tiene que:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{C}{Kg} \frac{Vol}{m}$$

$$\text{como } Vol = \frac{J}{As} = \frac{Nm}{\frac{C}{s}} = \frac{\frac{Kgm}{s^2}m}{C} = \frac{Kgm^2}{Cs^2}$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{C}{Kg} \frac{\frac{Kgm^2}{Cs^2}}{m} = \frac{Kgm^2C}{KgCms^2} = \frac{m}{s^2}$$

Debido a que las unidades de longitud del sistema de lentes en estudio se quiere expresar en  $mm$  y para ello se debe agregar un facto de  $10^3$ , expresando finalmente la aceleración del siguiente modo.

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = 10^3 \frac{mm}{s^2}$$

Ahora, el factor  $\frac{q}{m} = \frac{C}{Kg} = \frac{As}{Kg}$  se considera como una constante. Este factor cuyo valor es de  $9,4 \times 10^7 \rightarrow \frac{q_{He}}{m_{He}} E = 9,4 \times 10^7 E \frac{m}{s^2}$  y que a su vez tomando la unidad de  $s^2$  se podrá introducir como un factor del tiempo, es decir,  $\frac{9,4 \times 10^7}{s^2} t^2$ . Se define en término de una variable general como un  $\tau^2 = 9,4 \times 10^7 t^2$  o como  $\tau^2 = \frac{q}{m} t^2 \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{q}{m}} t$  con esto se llega a la siguiente expresión  $\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{E_z}{D} \rightarrow \frac{d^2 Z}{d\tau^2} = \frac{E_z}{D}$  y para R  $\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \frac{2E_z}{D}$ .

Las partículas entran al sistema de lentes con una energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (94)$$

Por lo que:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \quad (95)$$

Sí  $eV = |q|J$  y conociendo la energía de las partículas conocemos la velocidad inicial de estas

$$v = \sqrt{\frac{2kq}{m} \left( \frac{J}{Kg} \right)} \quad (96)$$

Teniendo en cuenta las unidades y realizando el análisis respectivo como se muestra a continuación, se obtiene unidad correspondientes a la velocidad expresada en metros por segundo y para el sistema en estudio se desea expresar estas en unidades de milimetro por segundos y para ello se agrega un factor de  $10^3$ . Así:

$$v = \sqrt{\frac{J}{Kg}} = \sqrt{\frac{Nm}{Kg}} = \sqrt{\frac{\frac{Kgm}{s^2}m}{Kg}} = \sqrt{\frac{Kgm^2}{s^2Kg}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s} = 10^3 \frac{mm}{s}$$

$$v = \sqrt{2k \frac{q}{m} \frac{J}{Kg}}$$

$$v = \sqrt{\frac{q}{m}} \sqrt{2k \frac{J}{Kg}} \quad (97)$$

Cuando la partícula entra al lente con cierta velocidad, formando un ángulo muy pequeño respecto al eje z, teniendo también componente en r; en efecto de ello se formula de la siguiente forma.” Condiciones Iniciales”

$$v_z = v \cos \alpha \quad (98)$$

$$v_r = v \operatorname{sen} \alpha \quad (99)$$

Como  $\frac{\partial r}{\partial t} = v_r$  y  $\frac{\partial z}{\partial t} = v_z$ , luego.

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{q}{m}} \sqrt{2k} \quad (100)$$

Se conoce que  $t = \sqrt{\frac{q}{m}} t$

$$\frac{\partial R}{\partial \left(\sqrt{\frac{q}{m}} t\right)} = \frac{2}{D} \sqrt{2K} \times 10^3 \quad (101)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \left(\sqrt{\frac{q}{m}} t\right)} = 2 \times 10^3 \sqrt{\frac{2K}{D^2}} \quad (102)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \left(\sqrt{\frac{q}{m}} t\right)} = 10^3 \sqrt{\frac{8K}{D^2}} \quad (103)$$

la velocidad para Z y R queda de la siguiente manera.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 10^3 \sqrt{\frac{8K}{D^2}} \operatorname{sen} \alpha \quad (104)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 10^3 \sqrt{\frac{2K}{D^2}} \operatorname{cos} \alpha \quad (105)$$

Con las ecuaciones (104) y (105) se concluye el cálculo analítico que se requiere para modelar las trayectorias de las partículas cargadas que pasan por el sistema de lentes electrostáticos de dos elementos con geometría cilíndrica.

## 7. Referencias bibliográficas.

- Abdelhalim** Azbaid (2003), *Síntesis optimizada de lentes electrostáticas para el enfoque de partículas cargadas a energías de keV y MeV*. Madrid: Tesis doctoral.
- Adams** A, Read Fh. *Electrostatic cylinder lenses .2. 3 element einzel lenses. Journal of physics e-scientific instruments* (1972).
- D.W.O** Heddle, *Electrostatic lens system, Second Edition*.Capitulo 3.1-3.6
- Hawkes** P W and Kasper E (1989). *Principles of Electron Optics vols 1 and 2*. London: Academic.
- Heddle** D W O. (2000). *Electrostatic Lens Systems 2nd edn*. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Heddle** y Kay, 1996, Heddle, D.W.O. & M. Kay, Susan. (1990). *The zoom afocal lens. Nuclear Instruments & Methods in Physics Research Section A-accelerators Spectrometers Detectors and Associated Equipment-NUCL INSTRUM METH PHYS RES A*. (298. 291-294.)
- M** V Kurepa, M D Tasid and J M Kurepa, (1974), *A four element energy scanning electron lens system with fixed image position and magnification, Institute of Physics, Beograd, Yugoslavia*.
- M.** Mery, O. Suarez, D. Kroeger , F. Mosso , J. Valdes. *Characterization of low energy ion beam (keV-protons) focused by an three elements electrostatic lenses systems: analytical, simulation and experimental results. Radiation Physics and Chemistry*. Paper in preparation (2018).
- Omer** S, Melike U, Mevlut D. (2005). *Characterization and modeling of multi-element electrostatic lens systems*.Turkey: Artículo.
- Omer** S, Melike U, Mevlut D.(2007). *Aberration coefficients of multi-element cylindrical electrostatic lens systems for charged particle beam applications*.Turkey: Artículo.

**Omer S, Melike U, Mevlut D.**(2008).*Exploring focal and aberration properties of electrostatic lenses through computer simulation.*Turkey: Artículo.

**Vergara F,** (2018), *Cálculo del potencial electrostático en un sistema de lentes de cinco elementos con geometría cilíndrica.*Sincelejo: Tesis de pregrado.