ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LA METODOLOGÍA NSR-98 PARA COLUMNAS UNIAXIALES Y VIGAS ESTRUCTURALES

OSCAR ARMANDO BELTRAN LOBO

FRANCISCO JAVIER TRONCOSO PINO

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

SINCELEJO

2010

ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LA METODOLOGÍA NSR-98 PARA COLUMNAS UNIAXIALES Y VIGAS ESTRUCTURALES

Trabajo de grado presentado como requisito para optar

el título de ingeniero civil

OSCAR ARMANDO BELTRAN LOBO

FRANCISCO JAVIER TRONCOSO PINO

DIRECTOR

ORLANDO DANIEL ARROYO AMELL

INGENIERO CIVIL, M. SC. EN ESTRUCTURAS Y GEOTECNIA

Línea de profundización

ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCION

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

SINCELEJO

2010

Nota de aceptación:

Presidente de jurado: _____

_____

_____

Jurado: _____

Jurado: _____

Sincelejo, _____

“Únicamente los autores son responsables de las ideas expuestas en el presente trabajo”

“A nuestro Dios que siempre nos iluminó y ayudó a sobrepasar tantos obstáculos que se nos presentaron”.

“A mi padre quien lo ha sido todo en mi vida, a mis hermanos que siempre me han brindado apoyo”.

“A mi madre fallecida que no alcanzo a ver este gran logro.

Oscar A.

“Al único y sabio Dios quien merece todo la gloria, el poder y la majestad. Él es quien da la sabiduría y la inteligencia para hacer al que no es”.

“A mis padres y hermanos quienes siempre me apoyaron y creyeron en mi aun en los momentos más difíciles de mi vida.”

Francisco J.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus más profundos agradecimientos a:
La universidad de Sucre, porque nos permitió ser parte de ella y formarnos como los nuevos profesionales de hoy.

El Ingeniero Orlando Daniel Arroyo Amell, por sus conocimientos aportados durante nuestra permanencia en el Alma Mater, por su constante apoyo y dedicación en el desarrollo de este valioso proyecto que hoy entregamos a nuestra facultad.

Los ingenieros Emel Mulett Rodríguez y Álvaro Caballero, por los conocimientos impartidos en el área del diseño de estructuras y construcción.

El jefe de departamento de la facultad de ingeniería nuestro gran amigo Ingeniero Carlos Medina quien con su talento y profesionalismo estuvo siempre buscando el bienestar para sus estudiantes y compartiendo abnegadamente sus conocimientos sin reservas.

A todo el cuerpo docente que participo en nuestra formación y que hacen de nosotros unos profesionales bien capacitados para afrontar una nueva etapa de nuestras vidas.

A aquellos compañeros que siempre nos apoyaron y creyeron en nosotros a pesar de todas las dificultades que tuvimos que pasar.
“Y gracias ante todo a nuestro Arquitecto e ingeniero por excelencia, el Dios de toda sabiduría, ciencia y consejo; a el sea este triunfo”.

TABLA DE CONTENIDO

PAG.

INTRODUCCIÓN **18**
JUSTIFICACIÓN **20**
OBJETIVOS **22**
OBJETIVO GENERAL 22
OBJETIVOS ESPECIFICOS 22
1. INCERTIDUMBRE Y ESTADÍSTICA **23**
1.1 INCERTIDUMBRE 23
1.1.1 Variabilidad Natural 25
1.1.2 Incertidumbre Epistémica 26
1.1.3 Incertidumbre En Los Modelos De Decisión 28
1.1.4 Medidas Para Manejar La Incertidumbre 29
1.1.4.1 Medidas Determinìsticas: 29
1.1.4.1.1 Factores de seguridad central 30
1.1.4.1.2 Factores parciales 30
1.1.4.2 Medidas Probabilísticas 31
1.1.4.2.1 Métodos de simulación 32
1.1.4.2.2 Métodos de transformación 32
1.2 ESTADÍSTICA 36
1.2.1 Tipos De Variables Estadísticas 36
1.2.1.1 Variables Discretas 36
1.2.1.2 Variables Continuas 36
1.2.2 Ramas De La Estadística: La estadística se divide en dos ramas 36
1.2.2.1 La Estadistica Descriptiva 36
1.2.2.1.1 La media aritmética 37
1.2.2.1.2 La varianza 37
1.2.2.1.3 Desviación estándar 37

1.2.2.2 La Estadística Inferencial 38
2. PROBABILIDAD 39
2.1 VARIABLE ALEATORIA: 39
2.2 ESPACIO MUESTRAL (E): 39
2.3 AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD: 40
2.3.1 Axiomas De Kolmogórov 40
2.4 TIPOS DE PROBABILIDAD 41
2.4.1 Probabilidad Discreta 41
2.4.2 Probabilidad Condicional 42
2.4.3 Probabilidad Continua 42
2.5 CLASES DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD 44
2.5.2 Distribución Binomial 46
2.5.3 Distribución Normal 47
2.5.4 Distribución Lognormal 49
2.5.5 Distribuciones Extremas 50
3. CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL 52
3.1 HISTORIA 52
3.1.1 Primera Parte: 1920 – 1960 52
3.1.2 Segunda Parte: Investigación Académica 53
3.1.3 Tercera Parte: Entrada al Mundo Estructural 54
3.2 CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL 54
3.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES 55
3.3.1 Solicitud (S): 55
3.3.2 Resistencia (R): 56
3.3.3 Estado limite G(R, S): 56
3.4 Medidas de Confiabilidad 58
3.4.2.1 Métodos De Simulación 61
3.4.2.1.1 Simulación de Monte Carlo 62

3.4.2.1.2 Latin HyperCube Sampling 69
3.4.2.2 Métodos de Transformación 72
4. ACEPTABILIDAD DEL RIESGO 78
4.1 PERCEPCIÓN PSICOLÓGICA Y SOCIAL 78
4.2 COMPARACIÓN CON OTROS RIESGOS EN LA SOCIEDAD 79
4.3 MEDIDAS Y NIVELES DE SEGURIDAD 82
4.4 OBJECIÓN AL RIESGO ACEPTABLE 86
5. DISEÑO DE COLUMNAS UNIAXIALES Y VIGAS ESTRUCTURALES 88
5.1 ANÁLISIS ESTRUCTURAL 88
5.1.1 Determinación del Espesor de Placa 88
5.1.2 Avalúo de Carga 89
5.1.3 Análisis Sísmico 91
5.1.3.1 Rigidez de los Pórticos: 92
5.1.3.2 Centro de Torsión: 94
5.1.3.3 Centro de Cortante 94
5.1.3.4 Excentricidad y Momento Torsional Definitivo 95
5.1.3.5 Cortante Directo: 95
5.1.3.6 Cortante por Torsión 96
5.1.3.7 Cortante Sísmico y de Diseño 97
5.2 DISEÑO DE VIGAS Y COLUMNAS UNIAXIALES 98
5.2.1 Resultados de Vigas Estructurales a Estudiar 99
5.2.1.1 Viga Voladizo del Pórtico C: 99
5.2.1.2 Viga C3-C6 103
5.2.2 Resultados de Columnas Estructurales a Estudiar 105
6. ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LAS VIGAS Y COLUMNAS ESTRUCTURALES 108
6.1 CONFIABILIDAD DE VIGAS 108
6.1.1 Falla a Flexión: 108
6.1.2 Confiabilidad Estructural de la Viga Voladizo 108

6.1.2.1 Determinación de la Naturaleza de las Variables 109
6.1.2.2 Selección de la Función de Estado Límite 111
6.1.2.3 Cálculo de la Probabilidad de Falla y Índice de Confiabilidad β: 115
6.1.2.4 Análisis de Sensibilidad 115
6.1.3 CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE LA VIGA C3-C6 118
6.1.3.1 Análisis de Sensibilidad 119
6.1.4 ANALISIS DE SENSIBILIDAD ENTRE AREA DE ACERO SUMINISTRADA Y AREA DE ACERO REQUERIDA PARA VIGAS ESTRUCTURALES DISEÑADAS POR LA NSR-98 121
6.1.5 ANALISIS DE SENSIBILIDAD ENTRE AREA DE ACERO SUMINISTRADA Y AREA DE ACERO REQUERIDA PARA VIGAS ESTRUCTURALES DISEÑADAS POR LA NSR-09 122
6.2 CONFIABILIDAD DE COLUMNAS UNIAXIALES 125
6.2.2 Confiabilidad Estructural de las Columnas 128
6.2.4 Selección de la Función de Estado Límite 131
6.2.5 Cálculo de la Probabilidad de Falla y Índice de Confiabilidad β 134
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 136
BIBLIOGRAFIA 138
ANEXOS 140

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1.1 Tipos de incertidumbre en la ingeniería civil……24

Figura 1.2 Factores de seguridad central……30

Figura 1.3 Factores parciales de seguridad……31

Figura 1.4 Visión probabilística de la seguridad……32

Figura 1.5 Índice de confiabilidad en el espacio transformado……33

Figura 1.6 Índice de confiabilidad……34

Figura 2.1 Descripción probabilística de una variable……...42

Figura 2.2 Distribución normal……...47

Figura 2.3 Función distribución normal acumulada……48

Figura 2.4 Diferencia entre las clases de distribuciones……..51

Figura 3.1 Representación esquemática del mecanismo Solicitud-Resistencia……55

Figura 3.2 Resistencia estructural……56

Figura 3.3 Estados limites en una estructura……57

Figura 3.4 Estado limite del factor de seguridad……59

Figura 3.5 Valores característicos……60

Figura 3.6 Variables en el espacio real……61

Figura 3.7 Función de estado limite G (R, S) = R – S……63

Figura 3.8 Generación de números aleatorios……63

Figura 3.9 Variables en el espacio transformado……...65

Figura 3.10 Viga simplemente apoyada……66
Figura 3.11 Histograma del vector representativo……..71
Figura 3.12 Índice de Hasofer y Lind……72
Figura 4.1 Aceptabilidad del riesgo……85
Figura 5.1 Sección transversal de la losa entrepiso……89
Figura 5.2 Cortante vasal……..92
Figura 5.3 Desplazamientos de los pórticos X-X……..93
Figura 5.4 Desplazamientos de los pórticos Y-Y……..93
Figura 5.5 Sección transversal viga voladizo del pórtico C……102
Figura 5.6 Refuerzo de la viga 3C-6C……104
Figura 5.7 Esquematización de la ubicación de las columnas……..105
Figura 6.1 Visualización de la viga en el voladizo del pórtico C……108
Figura 6.2 Variabilidad de los parámetros……....110
Figura 6.3 Visualización de la viga C3-C6……118
Figura 6.4 Análisis de sensibilidad $A_{suministrada}$ / $A_{requerida}$ NSR-98…….122
Figura 6.5 Análisis de sensibilidad $A_{suministrada}$ / $A_{requerida}$ NSR-09…….124
Figura 6.6 Visualización de las columnas estructurales del pórtico C…….128
Figura 6.7 Densidad de probabilidad de la aceleración sísmica……...130
Figura 6.8 Distribución de probabilidad acumulada de la aceleración Sísmica……130

LISTA DE TABLAS

Pág.

Tabla 1. Parámetros de las variables del ejemplo 1……..66

Tabla 2. Convergencia del índice de confiabilidad y el vector normalizado……....77

Tabla 3. Valores de riesgo asociado a actividades cotidianas (Allen 1978, CRIA 1977)……..80

Tabla 4.1 Avaluó de carga de losa……...89

Tabla 4.2 Avaluó de carga de la cubierta……90

Tabla 5. Peso total de la estructura……90

Tabla 6 Parámetros para realizar el análisis sísmico……91

Tabla 7. Rigidez de los pórticos……...93

Tabla 8. Centro de torsión de la estructura……94

Tabla 9.1 Cortante directo X-X……96

Tabla 9.2 Cortante directo Y-Y……96

Tabla 10.1 Cortante por torsión X-X……97

Tabla 10.2 Cortante por torsión Y-Y……97

Tabla 11.1 Cortante de diseño Y-Y……97

Tabla 11.2 Cortante de diseño X-X……98

Tabla 12. Cargas y momentos de diseño de las columnas……...106

Tabla 13. Información estadística de las variables para la determinación de la confiabilidad……109

Tabla 14. Momento de servicio de las vigas……..112

Tabla 15. Análisis de sensibilidad de la carga viva en la viga voladizo…….115

Tabla 16. Análisis de sensibilidad de la carga muerta en la viga voladizo……116

Tabla 17. Análisis estadístico del momento para la viga C3-C6……..118

Tabla 18. Confiabilidad estructural de la viga C3-C6……119

Tabla 19.1 Análisis de sensibilidad $A_{suministrada}$ / $A_{requerida}$ NSR-98……..121

Tabla 19.2 Análisis de sensibilidad $A_{suministrada}$ / $A_{requerida}$ NSR-09……..123

Tabla 20. Información estadística de las variables para la determinación de la confiabilidad……...128

Tabla 21. Momentos y cargas de servicio para las columnas del pórtico C Para distintas combinaciones de carga muerta, carga viva y carga sísmica……132

Tabla 22. Ecuación de estado límite de las columnas estudiadas…….134

RESUMEN

Los códigos para el diseño de estructuras son documentos legales que tienen como función proteger a la sociedad contra el colapso o mal funcionamiento estructural de las construcciones, con el objetivo de prever un grado de protección óptimo en el sentido que sea congruente con las consecuencias de las posibles fallas y con el costo de incrementar la seguridad.

Para llevar a cabo este grado de seguridad, los códigos de diseño han implementado el uso de factores parciales para la resistencia y para la solicitud (Cargas), que por su simplicidad a la hora de abordar el diseño se constituyo en una forma práctica durante el siglo pasado.

Sin embargo, se ha demostrado que el uso de factores parciales (medidas determinìsticas) no son apropiadas para la evaluación de la probabilidad de falla (P_f); porque los resultados dependen de la forma en la cual se escriba la ecuación de estado límite, es decir, presenta deficiencia por la falta de invarianza.

Considerando la idea anterior, se han desarrollado metodologías que permiten reducir la varianza. La confiabilidad estructural en su concepción clásica puede dar respuesta al problema de la invarianza.

Luego de una breve exposición de los tipos de incertidumbre que se presentan en la ingeniería civil, se expone la teoría de confiabilidad estructural, haciendo énfasis en los métodos utilizados para el desarrollo del presente trabajo de grado, los cuales se ilustran mediante ejemplos sencillos de una viga simplemente apoyada.

Luego de esto se seleccionaron tres casos de estudio: 1. Una columna cargada uniaxialmente y 2. Una viga en voladizo y 3. Una viga de dos apoyos continuos. Para cada uno de ellos se realizó el diseño mediante NSR-98 y NSR-09, y luego de ello se procedió a analizar su Confiabilidad Estructural.

Seguidamente, se realizó un análisis de sensibilidad de la confiabilidad con respecto a los parámetros de diseño, y se obtuvieron los beta objetivo empleados para el diseño de vigas y para columnas bajo carga sísmica. Luego del análisis de los resultados obtenidos, se presentan las respectivas conclusiones y recomendaciones.

ABSTRACT

Structural Design Codes are aimed to protect society against building failures and malfunctioning while mantaining an optimal degree of protection with a balance between cost of safety and failure consequences.

Design codes have implemented partial safety factors for loads and resistance in order to provide a simple, yet practical design methodology widely used by engineers during last century and nowadays.

Research has demonstrated that partial safety factors, as well as other deterministic safety measures depends on how a given limit state function is written, which leads to invariance problems. Structural Reliability deals with the invariance problem associated to deterministic measures.

After a brief summary of different kinds of uncertainty in Civil Engineering, it is exposed the Structural Reliability Theory, with special focus on methods used on this research; whose applications is shown on a simple supported beam.

Three cases were selected for study purposes: 1. A uniaxial loaded column, 2. A cantilever beam and 3. A continuously supported beam. Each one was designed using procedures specified on NSR98 and NSR09, and after that, Structural Reliability was analyzed for each one of them.

Following this, it was performed a sensitivity analysis for design parameters and there were obtained beta objetivo used on beam design and for column design under seismic load. Conclusions and recommendations are presented after results' analysis.

INTRODUCCIÓN

Si todas las variables que intervienen en el diseño fueran determinísticas, es decir, si un valor pudiera predecirse con absoluta precisión, para lograr la seguridad deseada de la estructura bastaría diseñarla para que su resistencia ante todos los posibles estados limites de falla fuera superior que la acción máxima correspondiente.

En la realidad existen incertidumbres en todo el proceso de diseño que hace que no puedan fijarse con precisión, en la etapa de proyectos, el valor de ninguna de las variables que intervienen en la resistencia y en los efectos de las solicitudes. Como ejemplo, no puede predecirse cuál será la carga viva máxima que actuara sobre la losa de un piso destinado a habitación durante la vida útil de este, ni cuál será la resistencia que tendrá el concreto en el momento que actué dicha carga viva. Estrictamente, no pueden tampoco fijarse cotas superiores a los valores de la gran mayoría de las acciones y, para las variables que intervienen en la resistencia no pueden fijarse una cota inferior excepto la trivial de cero.

Esto implica que, por muy alto que supongamos en el diseño el valor de una solicitud, o por muy bajo que supongamos el de una resistencia, siempre habrá una probabilidad finita, aunque muy pequeña, de que ese valor sea excedido del lado desfavorable. Esto lleva a contradecir la opinión común de que las estructuras deben diseñarse para que no fallen. Por muy conservador que sea el diseño, siempre habrá una probabilidad mayor que cero de que la solicitud máxima que se vaya a presentar exceda a la resistencia para algún estado limite de falla. El diseño debe procurarse que esta probabilidad sea pequeña dentro de los límites que permite la economía.

El tratamiento de estos problemas que se refieren a la seguridad en condiciones de incertidumbre se denomina **Confiabilidad Estructural (medidas probabilísticas)** y conlleva necesariamente al empleo de la teoría de las probabilidades.

Entre estas teorías existen diversas funciones teóricas de distribuciones de probabilidad que son representativa de fenómenos que tienen distintas características; la función que se emplea con más frecuencia para representar el comportamiento de una variable aleatoria es la llamada distribución normal, sin embargo, un gran número de variables relacionadas con el problema de la seguridad estructural tienen peculiares que no pueden ser representadas por una distribución normal. Entre estas encontramos las variables que no pueden tomar valores negativos como las que se relacionan con la resistencia, solicitudes, dan lugar cuando su dispersión es grande a distribuciones fuertemente simétricas que se alejan de la normal y que pueden representarse generalmente por una distribución logarítmica normal, por ejemplo, la resistencia de un suelo, las cargas vivas sobre una estructura, etc. y variables que representan el máximo y/o el mínimo que se relacionan con las cargas sísmicas, tienen distribuciones de probabilidad usualmente a las de la familia llamadas extremas.

Por tal razón es importante que el ingeniero maneje al menos los conceptos fundamentales de probabilidades aplicados a la seguridad en las estructuras, para poder guiar su juicio y ponderar adecuadamente el efecto de la incertidumbre en juego, al tomar una decisión de seguridad para una situación dada en el campo donde sea aceptable el riesgo.

JUSTIFICACIÓN

Los códigos para el diseño de estructuras son documentos legales que tienen como función proteger a la sociedad contra el colapso o mal funcionamiento estructural de las construcciones, con el objetivo de prever un grado de protección optimo en el sentido de que sea congruente con las consecuencias de las posibles fallas y con el costo de incrementar la seguridad. Estos niveles de seguridad se basan principalmente en la experiencia del comportamiento de estructuras diseñadas con distintos procedimientos y factores de seguridad en la opinión subjetiva de los redactores, lo que es notorio en los casos típicos de diseño.

Sin embargo, en la práctica de la ingeniería un papel cada vez más importante que respecta a la formulación de niveles de seguridad son las consideraciones probabilísticas para evaluar los grados de incertidumbre en ellos involucrados y de esta manera cuestionar la aceptabilidad de los diseños de una estructura por códigos completamente deterministas.

Los códigos actuales de diseño estructural se basan en la metodología tradicional de modelación del sistema, avaluó y mayoración de carga, análisis estructural y diseño con resistencias disminuidas, es decir, utilizan factores parciales (medidas determinanticas) los cuales en muchos casos no tienen presente las condiciones socio-económicas del medio en donde se emplean.

Esto nos lleva a cuestionar qué tan aceptables son los diseños tradicionales, en comparación con los diseños basados en confiabilidad (medidas probabilísticas) que valoran el riesgo de consecuencias ambientales, económicas y sociales que puedan considerarse graves, importantes o de poca significancia de quien tiene la posibilidad de afrontarlas.

Los códigos de diseños deben responder a las condiciones sociales, económicas y locales del lugar donde se aplica. Colombia posee entre otras características socioeconómicas:

1. La calidad y cobertura de los servicios públicos no es total.
2. Existe una alta tasa de analfabetismo y niveles de educaciones bajos.
3. La seguridad ciudadana es cuestionable, la participación política y autonomía de sus habitantes no existe.
4. Un gran porcentaje de la población no cuenta con una vivienda digna y está expuesta a muchos problemas de salud.
5. Posee una tasa de desempleo muy elevada, ingresos mensuales de familias muy por debajo del mínimo, oferta de trabajo escasas.
6. Posee una alta tasa de exposición a la drogadicción y un alto riesgo de la población ante amenazas ambientales como inundaciones debido a la falta de planificación.

Considerando que hay necesidades más apremiantes en la cuales debe invertirse dinero, conviene preguntarse si resulta aceptable contar con niveles de seguridad menores a los que ofrece la norma de diseño y construcción sismo resistente NSR-98, debido a que este código de diseño no es más que una fiel adaptación del código ACI-318 de los Estados Unidos en donde las situaciones socioeconómicas son la otra cara de la moneda de lo que se presenta en Colombia.

Esto da origen al presente trabajo de grado, titulado **ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LA METODOLOGÍA NSR-98 PARA COLUMNAS UNIAXIALES Y VIGAS ESTRUCTURALES**; con el cual se pretende analizar a la luz del Diseño Basado en Confiabilidad los resultados de aplicar la NSR-98 a unos casos representativos por su frecuencia en la práctica de la ingeniería.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Comparar medidas determinanticas con medidas probabilísticas en el diseño de columnas uniaxiales y vigas estructurales.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- ✓ Diseñar mediante el código de construcción colombiano NSR-98 columnas uniaxiales y vigas estructurales.
- ✓ Utilizar los métodos de simulación y/o de transformación para calcular el índice de confiabilidad (β).
- ✓ Comparar la aceptabilidad del índice de confiabilidad (β) con los diseños obtenidos mediante la NSR 98.
- ✓ Realizar un análisis de sensibilidad de las distintas variables que intervienen en los diseños.
- ✓ Presentar una argumentación acerca de la aceptabilidad de los diseños que son generados por el código NSR 98.

1. INCERTIDUMBRE Y ESTADÍSTICA

1.1 INCERTIDUMBRE

La incertidumbre se define como un parámetro asociado al resultado de una medida el cual caracteriza el intervalo de valores que puede ser razonablemente atribuido a una medida. Se puede clasificar en:

De acuerdo a un comportamiento estadístico

- Determinísticas
- Probabilístico o Estocástica

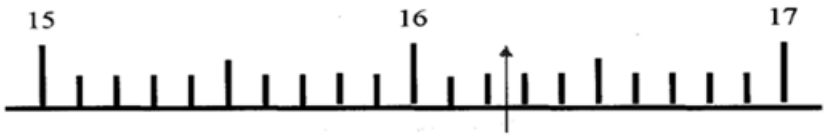
De acuerdo a la capacidad para controlarla:

- Controlable
- No controlable

Por ejemplo, si se realiza una medida directa con un instrumento de poca sensibilidad (una regla graduada en milímetros) para una distancia relativamente corta, al repetir la medida encontraremos siempre el mismo resultado. En este caso, no merece la pena hacer varias medidas, sino que realizaremos únicamente una sola, que es conveniente comprobar una segunda vez para detectar algún posible error. Por lo general, aunque no siempre, se toma como incertidumbre de la medida el valor de la división más pequeña que tiene el instrumento utilizado.

Como ejemplo de que no siempre la sensibilidad de un aparato es el valor de la división más pequeña de su escala, véase la Figura 1.0, cuya lectura no es 16.2 ± 0.1 (indicando que el intervalo de imprecisión abarcaría desde 16.1 hasta 16.3, que es a todas luces excesivo) sino que su lectura puede darse como 16.25 ± 0.05

que sólo abarca desde 16.2 hasta 16.3, intervalo donde, con total seguridad, está situado el índice del aparato al que corresponde la escala.



Incertidumbre de una medida

Si el instrumento de medida es de mucha sensibilidad, al repetir una medida podemos encontrar valores diferentes. Un ejemplo típico lo constituye la medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro digital que aprecie centésimas de segundo, pero arrancando y deteniéndolo manualmente. Es evidente que la imprecisión de cada medida no es aquí de una centésima de segundo: depende de la velocidad de reacción del experimentador.

En el campo de la ingeniería civil se manejan los siguientes tipos de incertidumbre:

- Variabilidad natural
- Epistémica
- Modelo de decisión

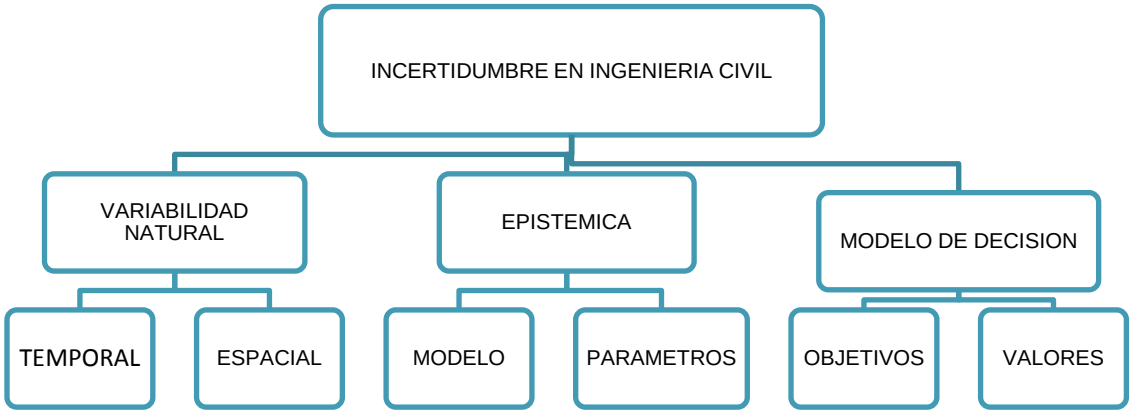


FIGURA 1.1 Tipos de Incertidumbre en Ingenieria Civil

1.1.1 Variabilidad Natural: La variabilidad natural es aquella inherente al medio ambiente, la cual está relacionada con todos aquellos fenómenos naturales (sismo, viento, nevadas, etc.) que causan a nuestras estructuras sobreesfuerzos en los elementos estructurales (vigas, columnas) y posibles daños en los elementos no estructurales (muros divisorios, acabados, etc.) que afectan la seguridad y el funcionamiento de la estructura e incluso aquellos causados por el hombre que cambian de alguna forma las características y propiedades de los parámetros y variables manejadas en el diseño en tiempo y espacio.

Por ejemplo si se pudiera conocer cuál es el año, mes, día, hora, lugar e intensidad de ocurrencia del máximo evento sísmico, bastaría simular y diseñar la estructura para que no se presenten daños. Pero en realidad este fenómeno de la naturaleza es imprescindible, por tal razón es una de las incertidumbres que está ocasionando desastres y miserias a nuestra sociedad en la actualidad, como lo ocurrido en Haití y Chile. (2010)

La variabilidad natural espacial es aquella que hace referencia a las variaciones que puedan presentar los parámetros o variables de un modelo en el espacio, por ejemplo las diferencias que se dan en la resistencia de los suelos punto a punto, por lo que la incertidumbre se presenta cuando consideramos que el suelo es homogéneo e isotrópico en toda su dimensión.

La variabilidad natural temporal comprende todas aquellas variaciones que puedan presentarse en el tiempo en los distintos parámetros utilizados en el diseño. Esta se ve reflejada en el estudio del trafico promedio diario de diseño (TPD), debido a que la proyección que se hace al futuro es teniendo en cuenta las condiciones sociales, económicas, culturales y de transito presente en la zona del proyecto y quien nos garantiza que estas se mantendrá a futuro.

En conclusión la incertidumbre natural es una de las más difíciles de manejar, debido a la gran variabilidad que se presenta en tiempo y espacio de las variables involucradas en el diseño.

1.1.2 Incertidumbre Epistémica: Para hablar de incertidumbre epistémica primero que todo debemos conocer que es epistemología. La epistemología es el estudio crítico del desarrollo, métodos, modelos y resultados de las ciencias.

De esta manera la incertidumbre epistémica es la relacionada al conocimiento incompleto de las variables involucradas en cualquier fenómeno en estudio y que causan de cierta manera alguna inquietud al momento de poner en práctica algún método o modelo teórico en específico.

La incertidumbre epistémica en los modelos parte de las condiciones ideales que se deben plantear, debido a que las ciencias para poder dar solución a un problema deben enmarcar o delimitar el espacio de la respuesta; es por esto que en la estructura de los modelos el punto de partida son las hipótesis.

De acuerdo a lo anterior en la Ingeniería Civil se presenta este tipo de incertidumbre cuando asumimos en el diseño en concreto reforzado a rotura que:

- Existe compatibilidad de deformaciones entre el acero y el concreto.
- Secciones planas permanecen planas antes y después de cargadas: principio de Bernoulli.
- El diagrama de tensiones de compresión no es rectilíneo y debe ajustarse a los resultados experimentales sobre cilindros.
- Se admite adherencia perfecta entre el concertó y el acero.
- El trabajo del concertó a tracción es despreciable.

También se presentan en los principios en que se baso Terzaghi para determinar la consolidación de los suelos:

- El suelo es homogéneo y está saturado
- La compresión y el flujo son unidimensionales
- Es válida la teoría de los medios continuos y las deformaciones unitarias son pequeñas
- El agua y las partículas son incompresibles
- Se verifica la ley de Darcy y la permeabilidad es constante al menos en la dirección del flujo
- El índice de poros solo depende de la presión efectiva (cierto para consolidación primaria)

Vale la pena mencionar esta variabilidad en lo referente a las curvas de esfuerzos-deformaciones de los materiales de construcción (acero, concreto.) utilizados en el diseño, los modelos estocásticos y las ecuaciones planteadas por Darcy y Hazen William para determinar caudales y perdidas en tuberías.

La incertidumbre epistémica de los parámetros está reflejada en los valores medios que se utilizan en el diseño respecto a la variabilidad que pueden presentar estos.Por ejemplo, las dimensiones de los elementos estructurales (vigas, columnas), el área de acero suministrada (A_s), resistencia a la compresión del concreto (f_c), resistencia a la tracción o fluencia del acero (F_y) y la variabilidad de las cargas que actúan sobre la estructura.

A diferencia de la incertidumbre natural esta es relativamente manejable y controlable. Todos estos modelos y parámetros utilizados en la ingeniería civil se han venido usando desde la antigüedad hasta hoy, desarrollándose técnicas para el manejo de la variabilidad e incertidumbre de estos y por ende obteniéndose resultados confiables en los diseños y seguridad de la estructura.

1.1.3 Incertidumbre En Los Modelos De Decisión: Está relacionada con los objetivos y valores que tenga como meta el proyecto. Este tipo de incertidumbre se ve reflejada en la Ingeniería Civil cuando nos enfrentamos a proyectos de gran magnitud que traen consigo mismo un gran riesgo al momento de ejecutarlos colocando en duda la decisión a tomar.

Por ejemplo, en los proyectos de construcción de viviendas de interés social VIS el objetivo primordial es minimizar los costos y maximizar las utilidades del proyectista, de esta manera la incertidumbre se presenta en qué tipo de modelo estructural (mampostería confinada, sistemas aporticados, viviendas prefabricadas, etc.) utilizar para brindarle los requerimientos técnicos de seguridad y funcionalidad a la estructura, tal que los costos asociados a la construcción sean mínimos para el propietario y la utilidad esperada para el proyectista sea máxima dentro de un riesgo aceptable.

En general, existen diferentes fuentes de incertidumbre en el análisis, diseño y construcción de estructuras. Estas fuentes de incertidumbre, que requieren un margen de seguridad definido, pueden enumerarse como siguen[1]:

1. Las cargas reales pueden diferir de las supuestas.
2. Las cargas reales pueden estar distribuidas de manera diferente a la supuesta.
3. La suposiciones y simplificaciones inherente a cualquier análisis pueden resultar en efectos calculados, momentos, cortante, etc. diferente de aquellos que de hecho actúan sobre la estructura.
4. El comportamiento estructural real puede diferir del supuesto, debido a las limitaciones del conocimiento.

[1] *Nilson, Arthur H (1999): Diseño de Estructuras de Concreto. Mc Graw- Hill Interamericana S.A. Pag. 12*

5. Las dimensiones reales de los elementos pueden diferir de aquellas especificadas.
6. El refuerzo puede no estar en la posición definida.
7. Las resistencias reales de los materiales puede diferir de aquellas especificadas.

De lo anterior cabe hacerse la pregunta ¿Qué hacer con la incertidumbre?

- ✓ Toda decisión tomada bajo incertidumbre trae consigo un riesgo asociado.

"El riesgo no hay que evitarlo, sino manejarlo" Robert T. Kiyosaki

- ✓ Por eso es necesario aprender las herramientas disponibles para el manejo del riesgo, y el punto de partida es la estadística y la probabilidad.

1.1.4 Medidas Para Manejar La Incertidumbre: Para manejar la incertidumbre que se presenta en las distintas variables y parámetros que se utilizan en la Ingeniería Civil han surgido varias medidas estadísticas como:

1.1.4.1 Medidas Determinìsticas: Las medidas determinísticas también se denominan métodos de nivel I o semiprobabilìsticas que son aquellas en las que cada variable y parámetro puede asignarse a un número fijo definido, o a una serie de números fijos, para una serie dada de condiciones.

En el campo de la Ingeniería Civil estas medidas se basan en estudios semiprobabilìstas de las variables y los parámetros involucrados en la resistencia (R) de un elemento estructural y la variabilidad en la solicitud(S) de las cargas.

El código de diseño colombiano aborda en sus normas este tipo de medidas y para manejar la incertidumbre utiliza:

1.1.4.1.1 Factores de seguridad central: Es una de las medidas más antiguas y es la relación que existe entre los valores medios de las variables resistencia R y solicitud S. Gráficamente tenemos:

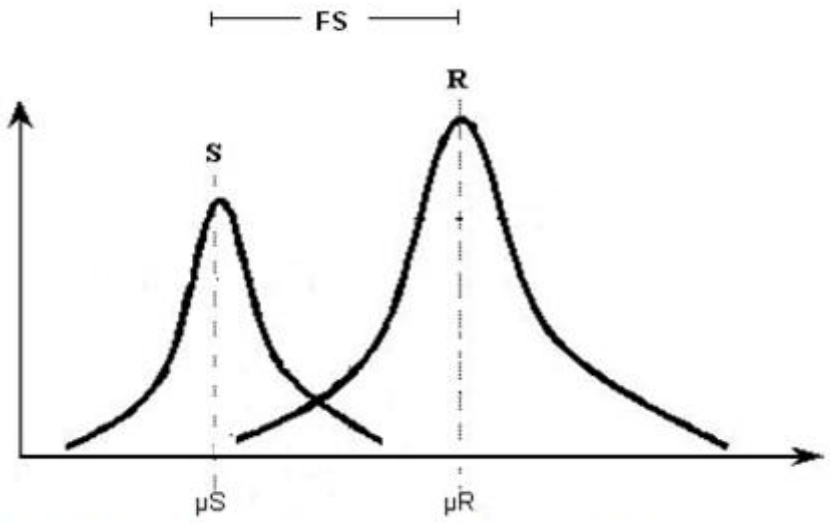


FIGURA 1.2 Factor de Seguridad Central (FS)

Este factor de seguridad es muy utilizado en el diseño de cimentaciones debido a que hay más incertidumbres y aproximaciones que en el diseño de otras estructuras, por la complejidad del comportamiento del suelo y el conocimiento incompleto de las condiciones del subsuelo.

1.1.4.1.2 Factores parciales: Es la medida que utiliza la NSR-98 en lo referente al diseño estructural. Consisten en asignar factores de carga γ mayores a la unidad en virtud de que tan incierto es la evaluación de la variable y factores de resistencia ϕ menores a la unidad dependiendo de la importancia de la falla en el elemento estructural.

Estos factores se utilizan para cubrir los siguientes riesgos[2]:

- ✓ Posibles sobrecargas

[2] Roberto Rochel Awad. Hormigon Reforzado. Primera Parte.Pag.83-84

- ✓ Defectos de construcción
- ✓ Hipótesis del análisis estructural
- ✓ Deficiencia de los materiales y en el control de calidad
- ✓ Calidad de la mano de obra

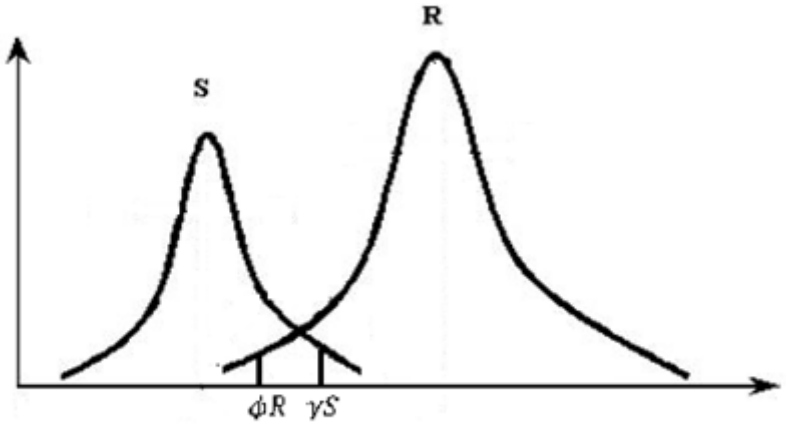


FIGURA 1.3 Factores Parciales de Seguridad

En estos factores parciales de seguridad se considera englobado un riesgo marcado principalmente por los niveles de riesgo asumidos por la sociedad y tienen una tendencia más probabilista que el factor de seguridad central.

1.1.4.2 Medidas Probabilísticas: También llamadas métodos de nivel II. Esta considera que las variables básicas que determinan la seguridad de una estructura son variables aleatorias, de manera que para definir cualquier estado límite de la estructura se deberá disponer de todas ellas. Estas variables básicas deben considerar todas las incertidumbres geométricas, de resistencia, de las solicitaciones, de los modelos teóricos, etc.

Estas se basan en modelar de acuerdo a una distribución de probabilidad la solicitud y la resistencia, teniendo en cuenta la naturaleza de las variables involucradas en el diseño.

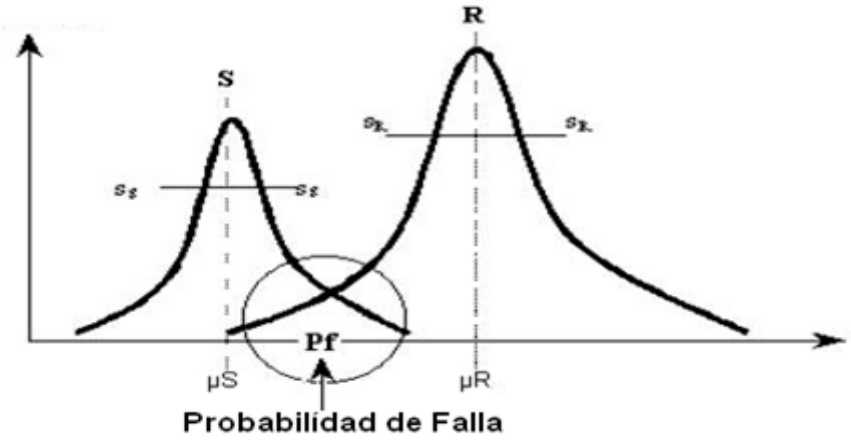


FIGURA 1.4 Visión Probabilística de la Seguridad

Entre las medidas probabilísticas para determinar la probabilidad de falla en una estructura tenemos:

1.1.4.2.1 Métodos de simulación: Los métodos de simulación pretenden, como lo dice su nombre simular numéricamente los fenómenos para observar la ocurrencia de algún evento de interés. Los métodos de simulación son muy sencillos desde el punto de vista conceptual, pero tienen un costo computacional elevado. El método de simulación más popular es el de Monte Carlo.

1.1.4.2.2 Métodos de transformación: Entre estos métodos los más reconocidos se encuentra FORM (*First Order Reliability Method*) y SORM (Second Order Reliability Method). La teoría del FORM fue propuesta por Hasofer y Lind en 1974 y consiste en calcular la mínima distancia desde el origen en el espacio transformado, hasta la función linealizada del estado limite G (R, S)= R - S en el punto P^*, conocida esta distancia como el índice de confiabilidad β.

El método *SORM* está fuera del alcance de este documento.

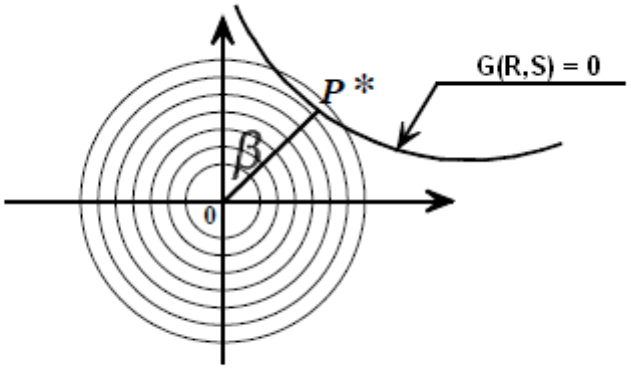


FIGURA 1.5 Índice de Confiabilidad en el Espacio Normalizado

Estas metodologías utilizadas para el cálculo de la probabilidad de falla y el índice de confiabilidad β serán desarrolladas con más detalles en capítulos posteriores.

¿Qué es el índice de confiabilidad β?

La naturaleza aleatoria de las variables de diseño, es decir, que no es posible predecir de manera exacta el valor de las cantidades involucradas trae como consecuencia que existe una incertidumbre asociada tanto a la resistencia como a la solicitud, la cual se traslada a la función de estado límite G (R,S)= R - S.

Debido a que la resistencia R y la solicitud S son variables aleatorias, la ecuación de estado límite G (R, S)= R – S también es una variable aleatoria.
Una grafica de la distribución de probabilidad de G (R, S), puede representarse como[3]:

[3] *Nilson, Arthur H (1999): Diseño de Estructuras de Concreto. Mc Graw- Hill Interamericana S.A. Pag. 14*

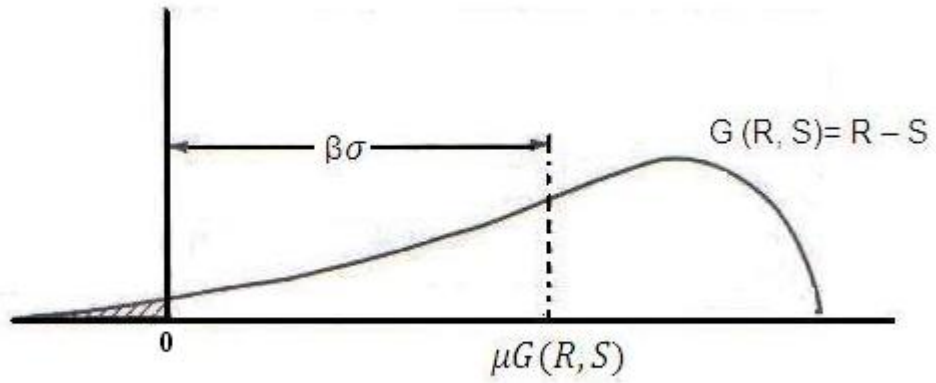


FIGURA 1.6 Índice de Confiabilidad

La falla ocurre cuando G (R, S) es menor que cero; la probabilidad de falla está representada entonces por el área sombreada de la figura.

Para determinar la seguridad estructural una posibilidad existe en exigir que la media $\mu G(R,S)$ de la ecuación de estado limite G (R, S) sea un numero especificado β de desviaciones estándar σ por encima de cero.

El valor seleccionado para β es el índice de confiabilidad de la estructura.

A partir de la teoría estadística, es posible demostrar que $\mu G(R,S) = \mu R - \mu S$ y que $\sigma G(R,S) = \sqrt{\sigma R^2 + \sigma S^2}$ y el índice de confiabilidad β se define como el cociente $\frac{\mu G\,(R,S)}{\sigma G\,(R,S)}$, tal cual se muestra en la figura 1.6. Este índice es una medida que indica cuantas desviaciones estándar es necesario restarle a la media de la función de estado límite para que esta sea igual a cero, es decir $\mu G(R,S) - \beta * \sigma G(R,S) = 0$.

Cabe destacar que los valores nominales de factores de seguridad y demás coeficientes estipulados en los códigos de construcción son calculados, en su mayoría, mediante técnicas de confiabilidad estructural (medidas probabilísticas) y su objetivo es mantener la estructura en un rango de funcionamiento alejado de la falla o con una probabilidad de falla tendiente a cero.

De acuerdo a lo anterior, los códigos de diseños parten de índices de confiabilidad β objetivos a las condiciones socio-económicas y los riesgos a la que está expuesta la sociedad. Por ejemplo:

- ✓ Los factores de resistencia recomendados para utilizar con los factores de carga especificados en ASCE-7 (1996) o AASHTO (1998) para carga viva y carga permanente para el caso de cimentaciones superficiales generan un índice de confiabilidad igual a 3.0
- ✓ Las investigaciones han encontrado que para edificaciones los β varían entre 3 y 4 para cargas en condiciones de servicio, teniendo presente que la seguridad aceptable depende de las condiciones socioeconómicas y la aceptabilidad del riesgo de la sociedad ante otras causas de muerte[4] (Sánchez 2003)
- ✓ Los índices de confiabilidad β para estructuras bajo acciones sísmicas en países desarrollados es de 1.75 [5] (Hasofer y Lind)
- ✓ La aplicación conjunta de los factores de carga de resistencia y de los factores de mayoración de cargas recomendados por El American Concrete Institute ACI, está dirigida a obtener en forma aproximada probabilidades de bajas resistencia del orden de 1/100 y probabilidades de sobre carga de 1/1000. Esto resulta en una probabilidad de falla estructural del orden 1/100000 lo que equivaldría a un valor de β entre 3 y 4 [6].(Nilson Arthur)
- ✓ En los códigos modernos se admiten índice de confiabilidad β entre 2 y 3, siendo 2 para diseños de poca importancia pero alta redundancia y 3 para diseños que si son importantes con poca redundancia[7]. (Baecher Gregory)

[4] Sánchez, M. (2004). Introducción a la Confiabilidad y la Evaluación de Riesgos: Teoría y Aplicaciones en Ingeniería.
[5] Capitulo 4 Aceptabilidad del Riesgo
[6] *Nilson, Arthur H (1999): Diseño de Estructuras de Concreto. Mc Graw- Hill Interamericana S.A. Pag. 16*
[7] Baecher, Gregory B. Christian, John T. Reliability and statistics in Geotechnical Engineering. McGraw Hill International. Pag.443

1.2 ESTADÍSTICA

La Estadística es una Ciencia derivada de la Matemática que estudia los métodos científicos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basadas con tal análisis

Ciencia que se ocupa del estudio de fenómenos de tipo genérico, normalmente complejos y enmarcados en un universo variable, mediante el empleo de modelos de reducción de la información y de análisis de validación de los resultados en términos de representatividad.

1.2.1 Tipos De Variables Estadísticas: Al conjunto de los distintos valores numéricos que adopta un carácter cuantitativo se llama variable estadística.

1.2.1.1 Variables Discretas: Son aquellas que toman valores aislados (números naturales), y que no pueden tomar ningún valor intermedio entre dos consecutivos fijados. Por ejemplo: número de goles marcados, número de hijos, número de discos comprados, número de pulsaciones.

1.2.1.2 Variables Continuas: Son aquellas que toman infinitos valores (números reales) en un intervalo dado, de forma que pueden tomar cualquier valor intermedio, al menos teóricamente, en su rango de variación. Por ejemplo: talla, peso, presión sanguínea, temperatura.

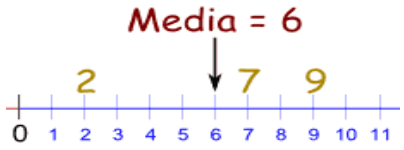
1.2.2 Ramas De La Estadística: La estadística se divide en dos ramas

1.2.2.1 La estadística descriptiva: Se dedica a los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de datos originados a partir de los fenómenos en estudio. Los datos pueden ser resumidos numérica o gráficamente.

Ejemplos básicos de parámetros estadísticos son: la media y la desviación estándar.

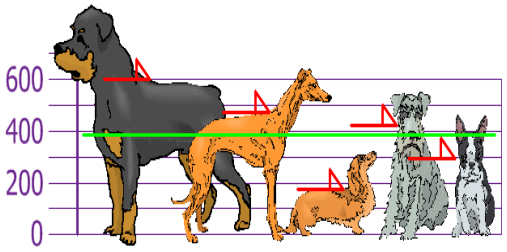
1.2.2.1.1 La media aritmética: Es un promedio estándar que a menudo se denomina "promedio".

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$



1.2.2.1.2 La varianza: Nos indica que tanto se alejan los valores con respecto de la media.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$



1.2.2.1.3 Desviación estándar: Se halla como la raíz cuadrada positiva de la varianza. La desviación estándar informa sobre la dispersión de los datos respecto al valor de la media; cuanto mayor sea su valor, más dispersos estarán los datos.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Con frecuencia suele utilizarse la desviación estándar en lugar de la varianza; la media y está son útiles para brindar una idea de una población, así como para describir algunas distribuciones de probabilidad

1.2.2.2 La Estadística Inferencial : Se dedica a la generación de los modelos, inferencias y predicciones asociadas a los fenómenos en cuestión teniendo en cuenta la aleatoriedad de las observaciones. Se usa para modelar patrones en los datos y extraer inferencias acerca de la población bajo estudio. Estas inferencias pueden tomar la forma de respuestas a preguntas si/no (prueba de hipótesis), estimaciones de características numéricas (estimación), pronósticos de futuras observaciones, descripciones de asociación (correlación) o modelamiento de relaciones entre variables (análisis de regresión).

2. PROBABILIDAD

La teoría de la probabilidad es la teoría matemática que modela los fenómenos aleatorios. Estos deben contraponerse a los fenómenos determinanticos, en los cuales el resultado de un experimento, realizado bajo condiciones determinadas, produce un resultado único o previsible.

2.1 VARIABLE ALEATORIA: Es aquella cuyo valor no puede ser fijado con precisión en el momento de tomar una decisión.

2.2 ESPACIO MUESTRAL (E): son todos los resultados posibles de un experimento.

La probabilidad es la característica de un evento, que existen razones para creer que éste se realizará.

La probabilidad ***p*** de que suceda un evento ***S*** de un total de ***n*** casos posibles igualmente probables es igual a la razón entre el número de ocurrencias ***h*** de dicho evento (casos favorables) y el número total de casos posibles ***n***.

$$p = P\{S\} = \frac{h}{n}$$

La probabilidad es un número (valor) que varía entre 0 y 1. Cuando el evento es imposible se dice que su probabilidad es 0, si el evento es cierto y siempre tiene que ocurrir su probabilidad es 1.

La probabilidad de no ocurrencia de un evento está dada por **q**, donde:

$$q = P\{noS\} = 1 - \frac{h}{n}$$

Sabemos que **p** es la probabilidad de que ocurra un evento y **q** es la probabilidad de que no ocurra, entonces **p** + **q** = 1

2.3 AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD: Los axiomas de la probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos.

La probabilidad *P* de un suceso *A*, denotada por *P*(*A*), se define con respecto a un "universo" o espacio muestral E, conjunto de todos los posibles sucesos elementales, tal que *P* verifique los Axiomas de Kolmogórov.

2.3.1 Axiomas De Kolmogórov

- ✓ La probabilidad de un suceso *A* es un número real mayor o igual que 0.

$$P(A) \geq 0$$

La probabilidad de un suceso es un número positivo o nulo.

- ✓ La probabilidad del total, E, es igual a 1.

$$P(E) = 1$$

E representa todas las posibles alternativas

- ✓ Si A_1, A_2... son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum P(A_i)$$

Según este axioma se puede calcular la probabilidad de un suceso compuesto de varias alternativas mutuamente excluyentes sumando las probabilidades de sus componentes.

De los axiomas anteriores se deducen otras propiedades de la probabilidad:

1. $P(\varnothing) = 0$ donde el conjunto vacío $(\varnothing)$ representa en probabilidad el suceso imposible.
2. Para cualquier suceso $P(A) \leq 1$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.4 TIPOS DE PROBABILIDAD

2.4.1 Probabilidad Discreta

Este tipo de probabilidad, es aquel que puede tomar sólo ciertos valores diferentes que son el resultado de la cuenta de alguna característica de interés. Éstos Valores pueden ser de varios tipos ya sean Finitos o Infinitos, Numerables o innumerables

EJEMPLO: sea X el número de caras obtenidas al lanzar 3 veces una moneda. Aquí los valores de X son x = 0, 1, 2, 3

Como se muestra en el ejemplo estos valores son Numerables, y Finitos, ya que se nos da un número de específico de casos y solo nos pueden dar un número específico de resultados.

2.4.2 Probabilidad Condicional

Se llama probabilidad condicional o probabilidad condicionada a la probabilidad de que un suceso se cumpla habiéndose cumplido ya otro. Se nota "probabilidad de A sabiendo que B se ha cumplido" de la siguiente manera:

$$p_B(A) \quad ó \quad p(A \mid B)$$

Dicha probabilidad se calculará de la siguiente forma:

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

2.4.3 Probabilidad Continua

Las probabilidades de que una variable continúa tome diferentes valores están descritas por una función de distribuciones de probabilidades o función de densidad de probabilidad $f_x(x)$ como se observa en la figura 2.1[8].

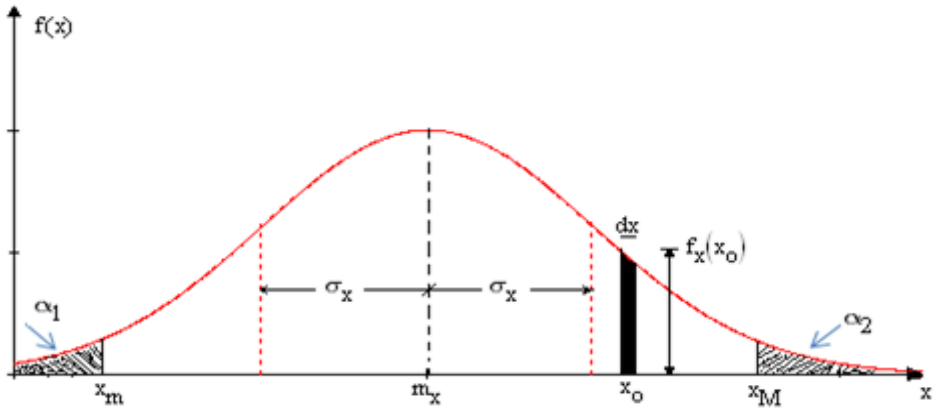


FIGURA 2.1 Descripción Probabilística de una Variable

[8] *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Pag. 56-58*

La función de densidad, o densidad de probabilidad de una variable aleatoria, es una función a partir de la cual se obtiene la probabilidad de cada valor que toma la variable. Su integral en el caso de variables aleatorias continuas es la distribución de probabilidad. En el caso de variables aleatorias discretas la distribución de probabilidad se obtiene a través del sumatoria de la función de densidad.

La probabilidad de que la variable se encuentre en un intervalo diferencial alrededor de cierto valor x_o vale:

$$\mathbb{P}\left[X_o - \frac{dx}{2} < x < X_o + \frac{dx}{2}\right] = f_x(X_o)$$

Y por tanto la probabilidad de que x tome un valor menor o igual que cierta cantidad x_m resulta[9]:

$$\mathbb{P}[x < X_m] = \int_{-\infty}^{X_m} f_x(X_m)\, dx = F_x(X_m)$$

A la función $F_x(x)$ se le llama función de distribución acumulada de probabilidades de la variable y equivale al área sombreada e identificada con α_1 de la figura 1. Por lo mismo, la probabilidad de que x resulte mayor o igual que cierto valor x_M vale:

$$\mathbb{P}[x > X_M] = \int_{X_M}^{\infty} f_x(X)\, dx = 1 - F_x(X_M)$$

Que corresponde al área sombreada α_2 de la figura 2.1.

Las características más importantes de la función de distribuciones de probabilidades están definidas por la posición del centroide y por el momento de inercia del área bajo la curva descrita por dicha función.

---

[9] *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Pag. 56-58*

La media de la variable se define como

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} X f_x(X)\, dx$$

Y representa la posición del centroide del área bajo la curva.

La varianza, o segundo momento del área bajo la curva, es

$$\sigma^2{}_x = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)^2 f_x(X)\, dx$$

Se llama desviación estándar a la raíz cuadrada de la varianza y coeficiente de variación a la relación

$$Cv_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

En la figura 2.1 x_m representa el percentil 100 α_1, de x, mientras que x_M representa el percentil 100(1- α_2) de la misma variable.

2.5 CLASES DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

La probabilidad de que cierto valor de la variable sea excedido o no sea alcanzado, en un evento particular, puede expresarse en general en función del número de desviaciones estándar de que dicho valor dista de la media; sin embargo, este número varía de una a otra función de densidad de probabilidades. Existen diversas funciones teóricas de distribuciones de probabilidades que son representativas de fenómenos que tienen distintas características.

La función que se emplea con más frecuencia para representar el comportamiento de una variable aleatoria es la llamada distribución normal; sin embargo, un gran

número de variables relacionada con el problema de la seguridad estructural tienen peculiares que no pueden ser representadas por una distribución normal[10].

Las funciones de distribuciones de probabilidad usadas en ingeniería con mayor frecuencia tenemos:

- ✓ Distribución Bernoulli
- ✓ Distribución Binomial
- ✓ Distribución Normal
- ✓ Distribución Lognormal
- ✓ Distribuciones Extremas

[1] 2.5.1 Distribución de Bernoulli

Consiste en realizar un experimento aleatorio una sola vez y observar si cierto suceso ocurre o no, siendo *p* la probabilidad de que esto sea así *(éxito)* y *q*=1-*p* el que no lo sea *(fracaso)*. En realidad no se trata más que de una variable *dicotómica*, es decir que únicamente puede tomar dos modalidades, es por ello que el hecho de llamar éxito o fracaso a los posibles resultados de las pruebas obedece más una tradición literaria o histórica, en el estudio de las variables aleatorias, que a la situación real que pueda derivarse del resultado. Podríamos por tanto definir este experimento mediante una variable aleatoria discreta *X* que toma los valores *X*=0 si el suceso no ocurre, y *X*=1 en caso contrario, y que se denota:

$$X \rightsquigarrow \mathbf{Ber}\,(p) \iff X = \begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad q = 1 - p = \mathcal{P}[X = 0] \\ 1 & \longrightarrow \quad p = \mathcal{P}[X = 1] \end{cases}$$

[10] *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Pag. 62*

Un ejemplo típico de este tipo de variables aleatorias consiste en lanzar una moneda al aire y considerar la variable aleatoria.

$$X \equiv \text{ número de caras obtenidas} = \begin{cases} 0 \longrightarrow q = \frac{1}{2} \\ 1 \longrightarrow p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para una variable aleatoria de Bernoulli, tenemos que su función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso;} \end{cases}$$

Y su función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.5.2 Distribución Binomial

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija *p* de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Donde $x = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, siendo

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

las combinaciones de $n$en x(n elementos tomados de $x$en x)

Una de las aplicaciones de esta distribución de encuentra en la norma de diseño sismo resistente NRS-98, cuando se habla de que la probabilidad de excedencia del sismo de diseño es del 10% en 50 años[11], entonces la probabilidad de éxito seria:

$f(x) = 0.1 \qquad n = 50 \qquad x = 1$

$0.1 = \left(\frac{50}{1}\right) P^1 \, (1-P)^{49} \;\rightarrow\; P = {}^{1}/_{475}$, es decir un periodo de retorno de 475 años.

2.5.3 Distribución Normal

Se llama distribución normal, a la distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales.

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro. Esta curva se conoce como campana de Gauss.

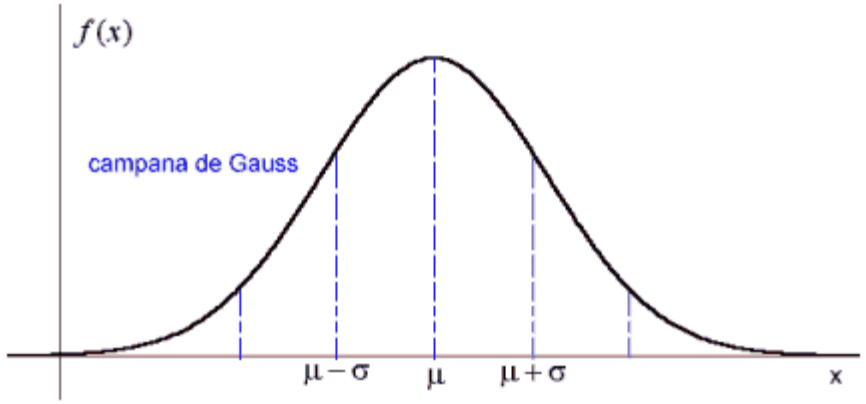


FIGURA 2.2 Distribucción Normal

[11] Normas colombianas de Diseño y Construcciones Sismo Resistente NSR-98, Asociación Colombia de Ingeniería Sísmica.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

Con frecuencia se utiliza la distribución normal estandarizada con los siguientes parámetros:

$Z(x) = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \longrightarrow$ Con media cero (0) y desviación uno (1).

La función de distribución acumulada se rige por la siguiente ecuación:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad , -\infty < x < \infty$$

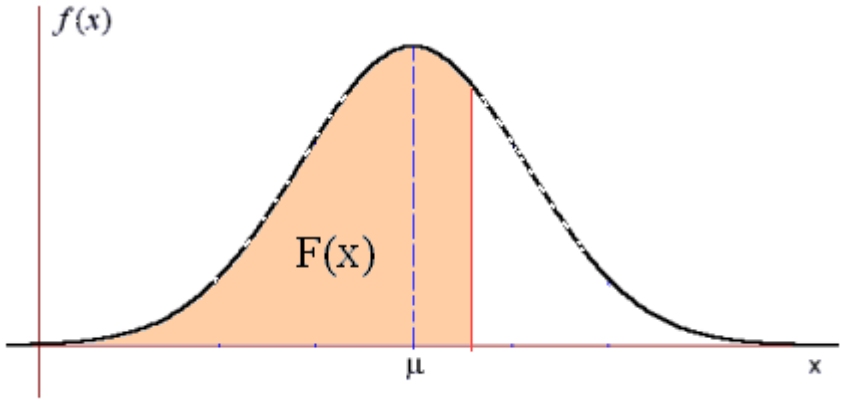


FIGURA 2.3 Función de Distribucción Normal Acumulada

La importancia de esta distribución radica en que permite modelizar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la ingente cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

Algunos ejemplos de variables asociadas a la ingeniería civil que siguen el modelo de la normal son:

- ✓ Resistencia a la compresión del concreto (f`c)
- ✓ Modulo de elasticidad (E) de los materiales
- ✓ Fluencia del acero (Fy)
- ✓ Las cargas muertas (Cm), peso propio de la estructura

La distribución normal también es importante por su relación con la estimación por mínimos cuadrados, uno de los métodos de estimación más simples y antiguos.

2.5.4 Distribución Lognormal

La distribución log-normal es una distribución de probabilidad de cualquier variable aleatoria con su logaritmo normalmente distribuido . Si *X* es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces exp(X) tiene una distribución log-normal.

Una variable puede ser modelada como log-normal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de dos retornos diarios.

La distribución log-normal tiende a la función densidad de probabilidad

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Para $x > 0$, donde μ y σ son la media y la desviación estándar del logaritmo de variable.

Algunos ejemplos de variables asociadas a la ingeniería civil que siguen el modelo de la normal son:

- ✓ Resistencia de los suelos
- ✓ Peso especifico de los suelos
- ✓ Cargas vivas sobre estructuras.

2.5.5 Distribuciones Extremas

Las distribuciones extremas presentan colas con comportamientos muy específicos y de ellos depende el tipo de asíntota que tiene. Las funciones de distribución de la familia de extremas describen la variabilidad del máximo y mínimo entre un grupo de valores, las más usadas en estudios de ingeniería son las distribuciones extremas tipo I y tipo II las cuales describen de forma aproximada el comportamiento de un sismo, la variación de las velocidades del viento y otros fenómenos naturales extremos.

Para observar mejor las diferencias entre las distintas clases de distribuciones de probabilidad descritas anteriormente, la figura 2.4 muestra las diferencias sustanciales en las ordenadas de las distintas funciones para una media de 100 y desviación estándar de 50 expresadas en las mismas unidades de la media[12].

[12] *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Pag. 66*

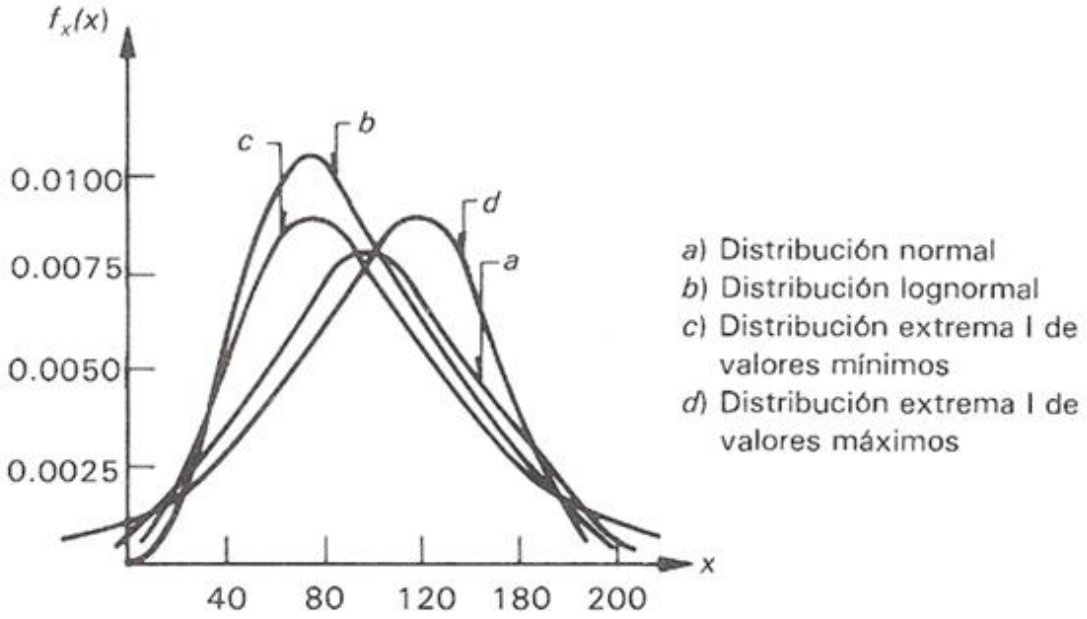


FIGURA 2.4 Diferencias entre las Clases de Distribucciones

Por ejemplo el percentil 99% vale 216 si la distribución es normal, 267 si es Lognormal y 257 Extrema I de valores máximos por lo que se refleja probabilidades muy distintas para valores de la variables muy alejados de la media.

3. CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL

3.1 HISTORIA

La historia de la confiabilidad estructural tiene sus orígenes en la tercera década del siglo xx y tuvo un desarrollo muy lento hasta la década de los sesenta. La ingeniería estructural se encontraba ocupada desarrollando modelos inelásticos, modelos de elementos finitos, y en general comprendiendo el problema del comportamiento mecánico tanto de estructuras como elementos estructurales. A mediados de la década d los sesenta se despertó un súbito interés en el problema de la confiabilidad, seguido de un vertiginoso desarrollo que se dividió en dos etapas: la de investigación académica y la etapa de aplicaciones a códigos de diseño[13].

3.1.1 Primera Parte: 1920 – 1960

Los esfuerzos hechos durante este periodo en el área de confiabilidad fueron escasos y aislados. El primer pionero fue Forsell quien en 1924 propuso el principio de optimización de estructuras, según el cual el diseño debería minimizar el costo esperado de una estructura, representada por el costo de construcción mas el costo esperado de las perdidas en el caso de falla. Posteriormente en 1926 Meyer propuso un diseño basado en la media y la desviación estándar[14]. (Madsen, Krenk, & Lind).

A lo largo de la década del 30 y hasta 1950 el avance en modelos estadísticos de la resistencia fue bastante notorio, de los cuales vale la pena destacar a Weibull (1930) y a Freudenthal (1947). Considerando estos trabajos, Johnson (1953) propuso la primera presentación formal de la teoría de la confiabilidad estructural y diseño optimo.

[13] *Arroyo Amell, Orlando (2004): Método Para Optimizar el Diseño de Sistemas Estructurales.*
[14] Madsen, O., Krenk, S., Lind, N. (1986): Methods of Structural Safety. Prentice Hall

3.1.2 Segunda Parte: Investigación Académica

Durante este periodo la Confiabilidad Estructural presento un desarrollo teórico bastante acelerado. De los adelantos vale la pena mencionar a Lind (1963) quien definió el problema del diseño racional de los códigos como encontrar los mejores valores para los factores de resistencia y carga. Cornell (1967) fue el primero en sugerir el empleo de un método de segundo momento para el cálculo de probabilidad de falla, debido a las ya demostradas deficiencias de la aproximación del modelo Gaussiano. Posteriormente, Lind (1973) mostro la aplicabilidad del índice de Cornell para obtener factores para la carga y la resistencia. En ese mismo año Lind y Ditlevsen trabajando de manera independiente descubrieron el problema de la invarianza y en 1974 empleando modificaciones del método de Lind se desarrollaron varios estándares de diseño estructural[15]. (Madsen, Krenk, & Lind).

A pesar de ser un periodo lleno de avances, muchos de ellos se quedaron como desarrollos teóricos debido a dos razones:

- ✓ El diseño determinístico había servido de manera muy eficiente hasta el momento, las fallas estructurales observadas habían sido pocas y se le atribuyeron.
- ✓ La complejidad matemática desde el punto de vista abstracto y numérico era muy alta para la época, haciendo la solución de problemas una tarea difícil de resolver.

[15] Madsen, O., Krenk, S., Lind, N. (1986): Methods of Structural Safety. Prentice Hall

3.1.3 Tercera Parte: Entrada al Mundo Estructural

A comienzo de los setenta se presentaron dos aportes de gran importancia a la Confiabilidad Estructural. El primero de ellos fue realizado por Hasofer & Lind (1974) al desarrollar el índice de Confiabilidad β tal cual como lo conocemos hoy en día. El segundo aporte estuvo en manos de veneziano (1974), al aclarar las limitaciones del índice de confiabilidad.

Como resultado de ellos, se desarrollaron y se implementaron varios códigos (CEB, 1976; CIRIA, 1977; CSA, 1981), los cuales desarrollaron métodos que eliminaban la complejidad del diseño basado en probabilidad. Sin embargo, las fallas en las estructuras mostraron que la teoría de confiabilidad estructural no describía de manera apropiada las estructuras, que las fallas ocurridas podrían ser atribuidas a errores humanos que no eran contemplados por la confiabilidad.

La importancia de esta etapa es muy alta, la Confiabilidad Estructural dejo de ser un ejercicio académico para convertirse en un elemento de importancia a la hora del diseño. (Madsen, Krenk, & Lind).

3.2 CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL

El tratamiento de todos los problemas que se refieren a la seguridad en condiciones de incertidumbre se denomina ***Confiabilidad Estructural*** y con lleva necesariamente el empleo de la estadística y la teoría de la probabilidad.

A la probabilidad de que la estructura no falle, 1- P_{falla}, se llama confiabilidad de la estructura y el término se ha adoptado para indicar el estudio con bases probabilistas de la seguridad de las estructuras, el cual lleva a la determinación racional de los factores de seguridad que deben adoptarse en el diseño. Para lograr una confiabilidad prefijada, se requiere adoptar cierto factor de seguridad que será mayor mientras mayores sean las desviaciones estándar de las

resistencias y de la solicitud o sea mientras mayor sea la incertidumbre que existen en las variables que intervienen en la seguridad[16]. (Meli Piralla).

3.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La función de la estructura es absorber las solicitaciones que se derivan del funcionamiento de la construcción. Esquemáticamente, este concepto se visualiza en la forma ilustrada en la siguiente figura. El sistema estructural debe soportar una serie de acciones externas que le ocasionan deformaciones, desplazamientos y, ocasionalmente, daños; todos estos constituyen sus respuestas a dichas solicitudes.

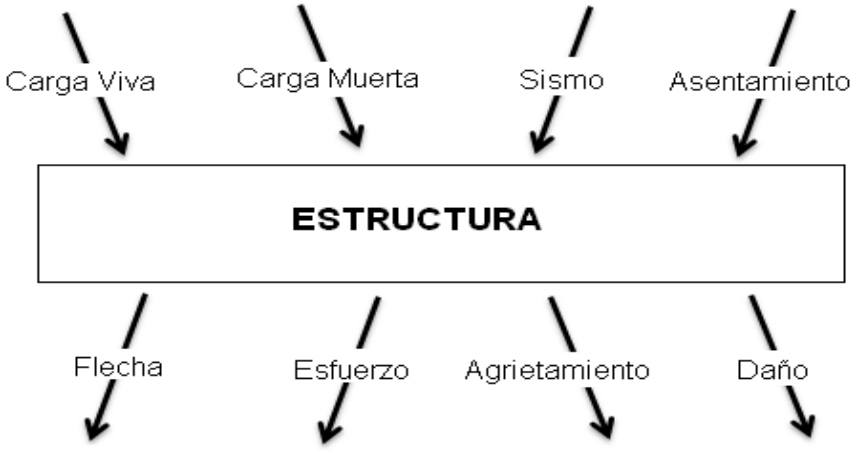


FIGURA 3.1 Representación esquemática del mecanismo Solicitud - Resistencia

3.3.1 Solicitud (S): Por solicitud se entiende lo que generalmente se denomina carga. Pero esta acepción más general incluye todos los agentes externos que inducen en la estructura fuerzas internas, esfuerzos y deformaciones. Por tanto, además de las cargas propiamente dichas, se incluyen las deformaciones impuestas, como los hundimientos de las cimentaciones y los cambios volumétricos, así como los efectos ambientales de viento, temperatura, corrosión, etc.

[16] *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Pag. 67*

3.3.2 Resistencia (R): La resistencia de la estructura está representada por el conjunto de parámetros físicos que describen su comportamiento ante las solicitudes que le son aplicadas.

Para que la construcción cumpla con las funciones para las cuales está siendo proyectada, es necesario que la resistencia de la estructura se mantenga dentro de límites que no afecten su correcto funcionamiento, ni su estabilidad. Debe definirse por tanto cuales son en cada caso los límites admisibles de la respuesta estructural. Estos dependen del tipo de construcción y de su destino y están definidos para las estructuras más comunes en los códigos de diseño.

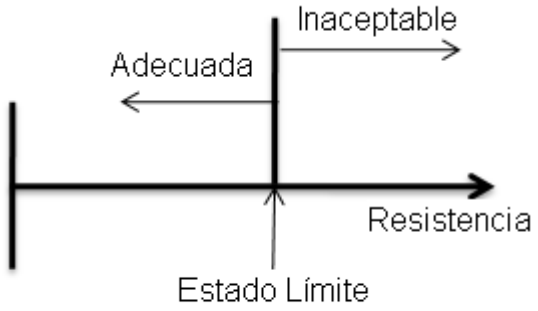


FIGURA 3.2 Resistencia Estructural

3.3.3 Estado limite G(R, S): Se llama estado límite de una estructura a cualquier etapa de su comportamiento a partir de la cual su resistencia o respuesta se considera inaceptable. Se distinguen dos tipos de estados límites. Aquellos relacionados con la seguridad, se denominan *estados límites de falla* y corresponden a situaciones en la que la estructura sufre una falla total o parcial, o simplemente presenta daños que afecta su capacidad para resistir nuevas acciones. La falla de una sección por cortante, flexión, torsión, carga axial o cualquier combinación de eso efectos, constituye un estado limite de falla, así como la inestabilidad o falta de equilibrio global de la estructura, el pandeo de uno de sus miembros, el pandeo local de una sección y la falla por fatiga. El proyectista debe procurar que no se presenten estados límites de falla debidos no

solo a las solicitudes que ocurren durante la operación normal de la estructura, sino también a las solicitudes correspondientes a condiciones excepcionales.

El otro tipo de estados límites se relacionan con aquellas situaciones que, aun sin poner en juego la seguridad de la estructura, afectan el correcto funcionamiento de la construcción. Esto se denominas *estados límites de servicio* y comprenden las deflexiones, agrietamientos y vibraciones excesivas, así como el daño en elementos no estructurales de la construcción.

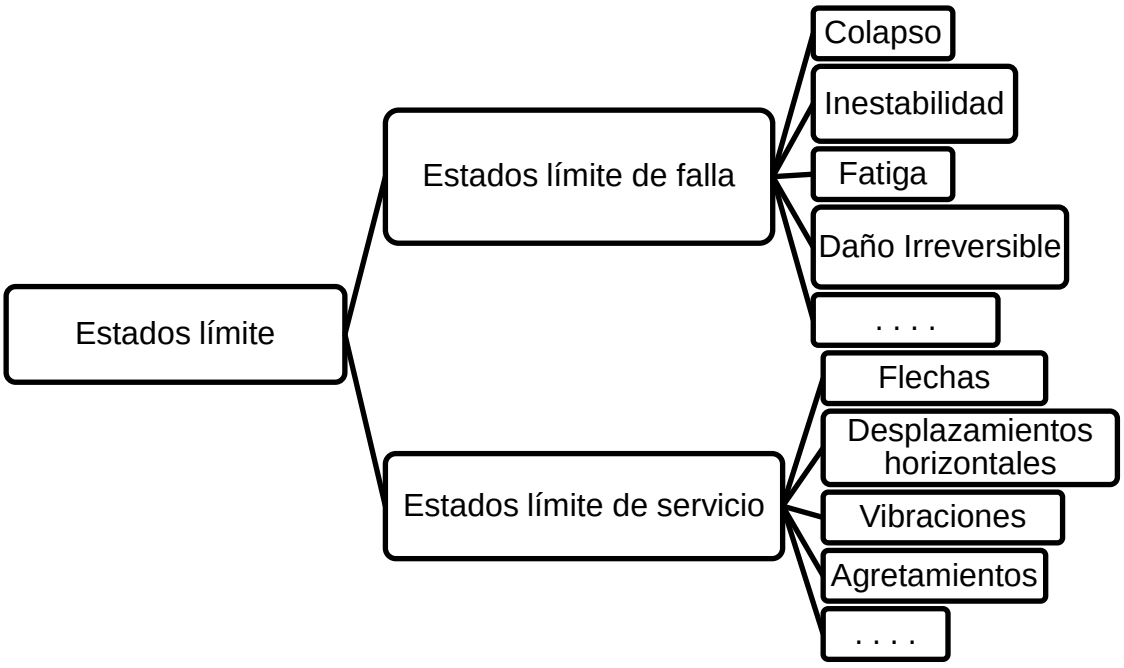


FIGURA 3.3 Estado Límites en una Estructura

Cuando la función G (R, S) es negativa la estructura se encuentra en condición de falla, cuando es mayor que cero la seguridad de la estructura es aceptable y cuando es igual a cero la estructura se encuentra en condición crítica.

3.4 MEDIDAS DE CONFIABILIDAD

Para el estudio de la confiabilidad estructural es importante contar con formas en las cuales esta pueda ser cuantificada. Desde el punto de vista estadísticos
Existen, para tal propósito dos tipos de medidas: determinanticas y probabilísticas, las cuales toman sus nombres de acuerdo a los enfoques de las variables de diseño que sean empleados.

3.4.1 Medidas Determinísticas: Las medidas determinísticas son aquellas en las cuales la resistencia y la solicitud son consideradas como variables determinísticas.
La ingeniería colombiana utiliza este tipo de medidas como seguridad de los diseños. Las medidas determinísticas más comunes son:

***Factor de Seguridad Central*:** El factor de seguridad central es quizás la medida más antigua entre las medidas determinísticas. Consiste en tomar la razón entre el valor medio de la resistencia y el valor medio de la solicitud.
Matemáticamente se expresa como

$$FS = \frac{\mu R}{\mu S}$$

Una estructura es segura siempre que FS > 1; es decir que la ecuación de estado limite es

$$G(R,S) = \frac{R}{S} - 1$$

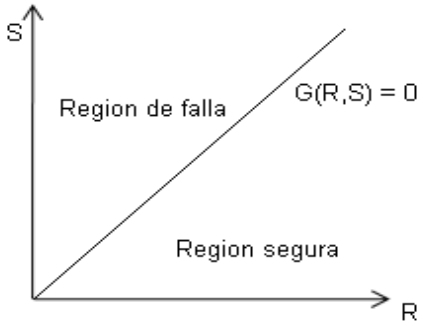


FIGURA 3.4 Estado limite factor de seguridad central

El factor de seguridad central aún es utilizado en muchas aplicaciones de ingeniería, siendo más común en el área de Geotecnia en donde pueden llegar a ser incluso superiores a 3.

Factores parciales: Es la medida de seguridad típica que se emplea en el diseño estructural de la NSR, consiste en utilizar factores para la resistencia y para las cargas.

La ecuación de estado límite que rige esta medida de confiabilidad es

$$G(R,S) = \phi R - \gamma S$$

El factor Φ comúnmente es menor a 1, típicamente oscila entre 0.5 y 0.9, mientras que el factor γ en la mayoría de los casos es mayor que 1, exceptuando los casos de cargas que contribuyen a la estabilidad de las estructuras.

Factor de seguridad característico: Entre las medidas determinísticas el factor de seguridad característico posee el mayor componente probabilístico. Para ello lo que se hace es tomar dos valores característicos: uno para la resistencia y uno de la solicitud.

La figura 3.5 ilustra la selección de los valores característicos. Es común que $R_C = \mu_R - \mu_R k_R \sigma_R \ y \ S_c = \mu_S + \mu_S k_S \sigma_S$ con lo cual el factor de seguridad característico se expresa como

$$FS_c = \frac{\mu_R - \mu_R k_R \sigma_R}{\mu_S + \mu_S k_S \sigma_S} = \frac{\mu_R(1 - k_R \sigma_R)}{\mu_S(1 + k_S \sigma_S)} = FS * \frac{1 - k_R \sigma_R}{1 + k_S \sigma_S}$$

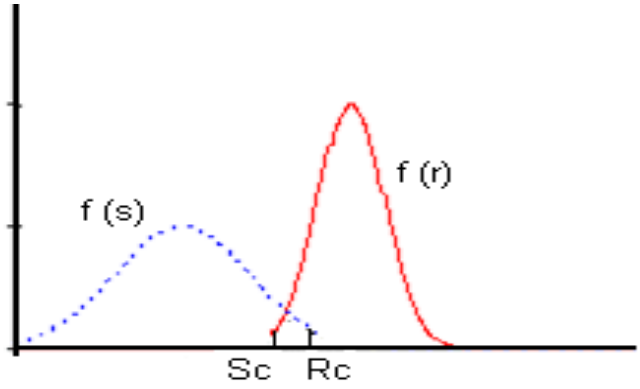


FIGURA 3.5 Valores caracteristicos

3.4.2 Medidas Probabilísticas: Las medidas probabilísticas tienen en cuenta la naturaleza probabilística de las variables de diseño. Dentro de las medidas probabilísticas es ampliamente aceptado el índice de confiabilidad de primer orden y segundo momento. Desarrollado originalmente por Hasofer y Lind en 1974. Éste consiste en encontrar en el espacio normalizado, la mínima distancia al origen desde la función de estado límite.

Para normalizar una variable es necesario aplicar la siguiente transformación

$$\mu = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

La probabilidad de falla de la estructura puede calcularse como

$$Pf = \Phi(-\beta)$$

En donde Φ es la distribución de probabilidad acumulada de una distribución normal estándar y β es el índice de confiabilidad de Hasofer y Lind.

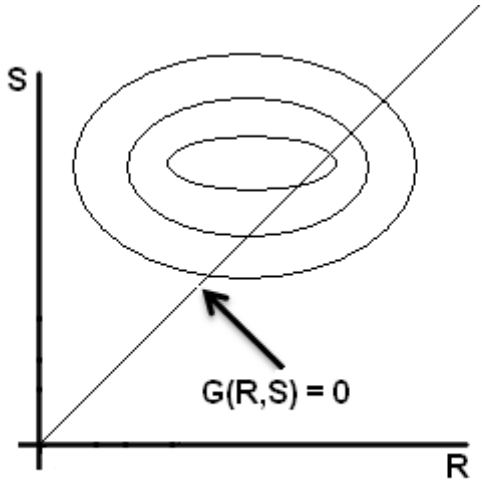


FIGURA 3.6 Variables en el Espacio Real

El índice de confiabilidad de Hasofer y Lind es una medida invariante de la seguridad, y aunque conceptualmente parece sencillo, su cálculo resultara una tarea complicada. Para encontrar el valor de β se han desarrollado diferentes metodologías, las cuales dan soluciones muy buenas al problema y pueden ser agrupadas en dos categorías: *métodos de simulación y métodos de transformación.*

3.4.2.1 Métodos De Simulación

La simulación es el estudio del comportamiento a través de la observación del modelo. La simulación es una herramienta de sumo interés dado que permite determinar si las suposiciones sobre el comportamiento del modelo son validados. El análisis se ven favorecidos dados que, al realizar las ejecuciones sobre el ordenador, se puede controlar con grupo de variables, fijar parámetros, modificar la importancia de las interacciones e incluso trabajar con distintos modelos del sistema, o que permiten profundizar en el conocimiento del mismo.

Es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos de tiempo.

3.4.2.1.1Simulación de Monte Carlo

El método fue llamado así por el principado de Mónaco por ser ``la capital del juego de azar'', al tomar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo tienen registros aproximadamente de 1944 con el desarrollo de la computadora. Sin embargo hay varias instancias (aisladas y no desarrolladas)
en muchas ocasiones anteriores a 1944. El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, proviene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.

La simulación de Monte Carlo puede ser adaptada fácilmente a cualquier situación, con tal que las alternativas pueden ser especificadas cuantitativamente. Monte Carlo es un proceso que consiste en resolver un problema simulando las variables involucradas mediante números aleatorios generados con distribuciones de probabilidades y su aplicación requiere de dos cosas básicas:

1. Tener un modelo que represente la realidad, el modelo en este caso no es más que la distribución de probabilidades de las variables que se considere.
2. Contar con un mecanismo para simular el modelo, este puede ser cualquier generador de números aleatorios, como lo es una computadora.

El algoritmo de Simulación Monte Carlo Crudo o Puro está fundamentado en:

- ✓ Conocer las distribuciones de probabilidad de las variables involucradas.

✓ Determinar la función de estado limite G(x) = R(x) – S(x), donde R(x) = resistencia y S(x) = solicitud

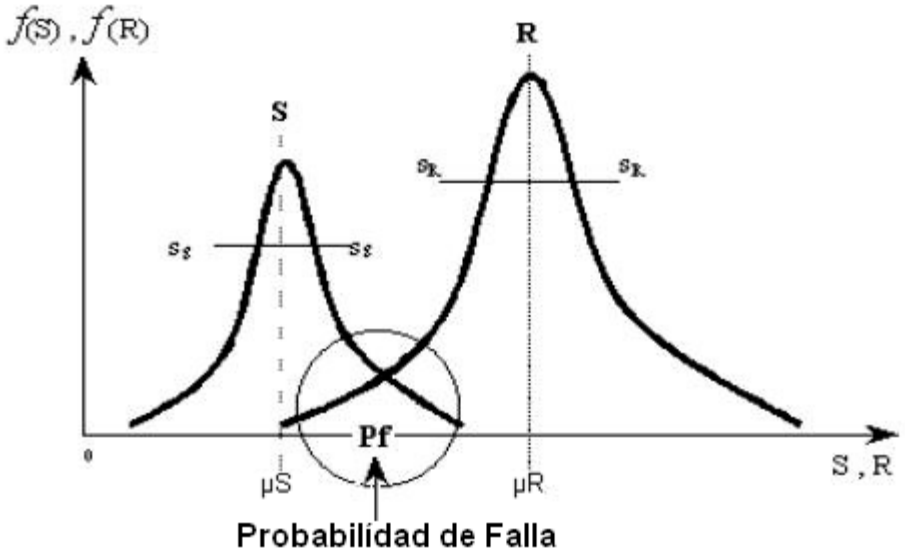


FIGURA 3.7 Función de Estado Límita G(R,S) = R - S

✓ Generar números aleatorios para cada variable a partir de su distribución de probabilidad F(x), partiendo de un numero aleatorio Z entre 0 y 1 del cual se obtiene X mediante: $X = F^{-1}(Z)$

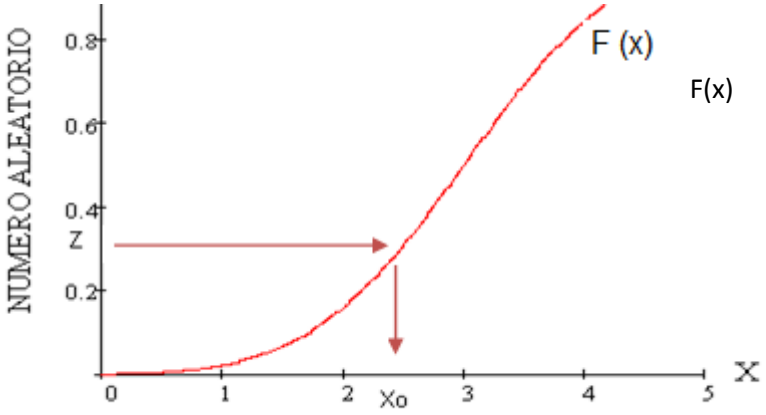


FIGURA 3.8 Generación de Números Aleatorios

✓ Evaluar la función de estado limite G(x) en las variables Xn Involucradas en el problema.

✓ Contar el número de veces que G(x) es menor que cero (0), en la cual se presenta falla, es decir, el numero de fallas.

✓ Calcular la probabilidad de falla de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P_f := \frac{\sum \overrightarrow{G(X)} < o}{N}$$

N = números aleatorios generados

✓ Determinar la cantidad mínima de simulaciones necesarias para obtener un estimado de la ecuación G(x) convergente y veraz, este tema ha sido muy estudiado por la ciencia de la estadística y entre las distintas respuestas que se han obtenido una de las más utilizadas es la siguiente:

$$N := \frac{1 - Pr}{Pr \cdot Vp^2}$$

P_r = Estimado de la probabilidad real

V_p = Variación deseada en el estimado de la probabilidad de falla.

En resumen el método Monte Carlo es para simular mediante procedimientos aleatorios, situaciones del mundo real de naturaleza probabilista.

Con la probabilidad de falla calculada utilizando el espacio transformado se determina el índice de confiabilidad β, como:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

$Donde\ \Phi^{-1}\ es\ la\ probabilidad\ acomulada\ de\ una\ distribucion\ normal\ inversa\ de\ media\ (\mu)\ igual\ a\ cero\ (0) y\ desviacion\ estandar\ (\sigma)\ igual\ a\ uno\ (1)\ y\ P_f\ es\ la\ probabilidad\ de\ falla.$

Existe una proporcionalidad inversa entre β y P_{falla} en la ecuación anterior, donde a menor probabilidad de falla aumenta el índice de confiabilidad β y por ende se obtiene un incremento en la seguridad de la estructura.

Dado que las probabilidades de falla son muy pequeñas (del orden de 10^{-5}) y para facilitar el análisis de los valores hallados, en los códigos se maneja el índice de confiabilidad (β).

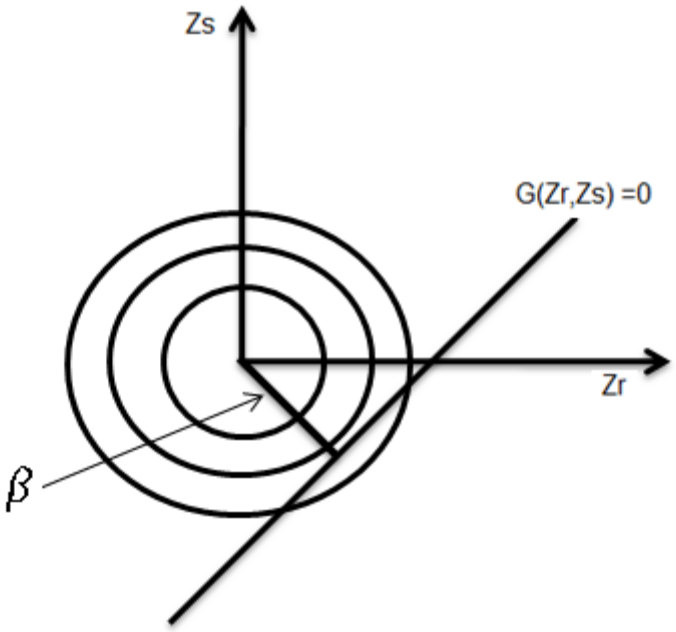


FIGURA 3.9 Variables en el Espacio Transformado

Ejemplo 1 (Tomado del curso de Diseño Basado en Confiabilidad) Calcule el índice de confiabilidad β de Hasofer y Lind para la viga mostrada en la figura. La información de las variables se resume en la tabla 1:

- ✓ El diseño se hace con referencia a lo estipulado en los códigos de diseño.
- ✓ La confiabilidad estructural se calcula para cargas de servicio.

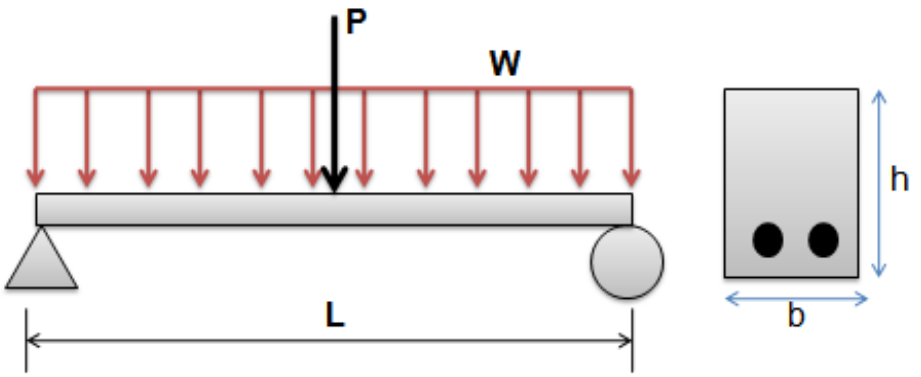


FIGURA 3.10 Viga Simplemente Apoyada

Variable	**Media**	**Desviación Estándar**	**Tipo de Distribución**
L	6 m	~ 0	Determinística
As	6 cm^2	0.12 cm^2	Normal
Fy	420000 KN/m^2	12600 KN/m^2	Normal
h	0.40 m	0.02 m	Normal
Fc	28000 KN/m^2	2240 KN/m^2	Normal
b	0.25 m	0.013 m	Normal
W	7 KN/m	1.75 KN/m	Normal
P	20 KN	4 KN	Normal

Tabla 1 Parámetros Variables del Ejemplo 1

1. La función de estado límite en este caso está dada por

$$G_0(As, Fy, h, fc, b, w, P) := As \cdot Fy \cdot (h - 0.05) - \frac{0.59(As \cdot Fy)^2}{fc \cdot b} - \frac{w \cdot L^2}{8} - \frac{P \cdot L}{4}$$

2. Se generan números aleatorios para cada variable, en este caso se usaron 310.000 los cuales se muestran a continuación (Software Matemático MathCad)

As =

	0
0	$5.95 \cdot 10^{-4}$
1	$6.179 \cdot 10^{-4}$
2	$6.039 \cdot 10^{-4}$
3	$5.929 \cdot 10^{-4}$
4	$5.98 \cdot 10^{-4}$
5	$6.014 \cdot 10^{-4}$
6	$5.972 \cdot 10^{-4}$
7	$6.077 \cdot 10^{-4}$
8	$6.1 \cdot 10^{-4}$
9	$5.994 \cdot 10^{-4}$
10	$5.965 \cdot 10^{-4}$
11	$6.049 \cdot 10^{-4}$
12	$5.929 \cdot 10^{-4}$
13	$6.026 \cdot 10^{-4}$
14	$6.065 \cdot 10^{-4}$
15	...

Fy =

	0
0	$4.15 \cdot 10^{5}$
1	$4.366 \cdot 10^{5}$
2	$4.2 \cdot 10^{5}$
3	$4.175 \cdot 10^{5}$
4	$4.149 \cdot 10^{5}$
5	$4.334 \cdot 10^{5}$
6	$4.099 \cdot 10^{5}$
7	$4.266 \cdot 10^{5}$
8	$4.316 \cdot 10^{5}$
9	$4.011 \cdot 10^{5}$
10	$4.069 \cdot 10^{5}$
11	$4.319 \cdot 10^{5}$
12	$4.317 \cdot 10^{5}$
13	$4.102 \cdot 10^{5}$
14	$4.366 \cdot 10^{5}$
15	...

h =

	0
0	0.397
1	0.404
2	0.444
3	0.362
4	0.413
5	0.425
6	0.413
7	0.363
8	0.384
9	0.401
10	0.393
11	0.345
12	0.39
13	0.415
14	0.422
15	...

fc =

	0
0	$2.717 \cdot 10^{4}$
1	$3.18 \cdot 10^{4}$
2	$2.532 \cdot 10^{4}$
3	$3.119 \cdot 10^{4}$
4	$3.142 \cdot 10^{4}$
5	$2.764 \cdot 10^{4}$
6	$2.74 \cdot 10^{4}$
7	$3.018 \cdot 10^{4}$
8	$2.605 \cdot 10^{4}$
9	$2.615 \cdot 10^{4}$
10	$2.86 \cdot 10^{4}$
11	$3.107 \cdot 10^{4}$
12	$2.6 \cdot 10^{4}$
13	$3.027 \cdot 10^{4}$
14	$3.212 \cdot 10^{4}$
15	...

b =

	0
0	0.239
1	0.276
2	0.259
3	0.24
4	0.228
5	0.233
6	0.228
7	0.273
8	0.253
9	0.239
10	0.222
11	0.243
12	0.227
13	0.211
14	0.254
15	...

w =

	0
0	5.568
1	7.447
2	4.909
3	6.573
4	6.666
5	6.691
6	6.044
7	8.498
8	5.675
9	9.35
10	6.598
11	7.008
12	7.654
13	8.325
14	8.254
15	...

P =

	0
0	23.677
1	14.911
2	15.19
3	14.209
4	20.919
5	14.348
6	19.035
7	15.437
8	17.232
9	18.417
10	24.909
11	31.7
12	33.194
13	17.855
14	15.458
15	...

3. Evaluamos la función de estado limite G_o(As, Fy, h, Fc, b, W, P) en las variables Xn involucradas en el problema y se cuenta el número de veces que G_o(As, Fy, h, Fc, b, W, P) es menor que cero (0), en la cual se presenta falla, es decir, el numero de fallas.

$$\text{Fallas} := \sum \overrightarrow{(G_1 \le 0)} = 9.795 \times 10^3$$

4. Se calcula la probabilidad de falla.

$$P_{falla} := \frac{\text{Fallas}}{310000} = 0.032$$

Probabilidad de falla de la viga simplemente apoyada 3.2%.

5. Se determina la cantidad mínima de simulaciones necesarias para obtener un estimado de la ecuación G_o(As, Fy, h, Fc, b, W, P) convergente y veraz

$$Vp := 0.01 \quad \text{Coeficiente de variación requerido}$$

$$N_{minimo} := \frac{1 - P_{falla}}{P_{falla} \cdot Vp^2} = 3.065 \times 10^5$$

6. En conclusión como el número de simulaciones utilizadas es mayor a la requerida, se calcula el índice de confiabilidad β

$$\beta = -\Phi^{-1}(0.032) \rightarrow \beta = 1.858$$

Las simulaciones de Monte Carlos son una herramienta de fácil uso para el cálculo de la probabilidad de falla. Adicionalmente, existen muchos programas que facilitan la generación de números aleatorios (Excel, Mathcad, MatLab, Crystal Ball, etc.); sin embargo el costo computacional es muy elevado cuando la cantidad de variables es grande y se desea un número alto de simulaciones.

Considerando lo anterior, se han desarrollado métodos que permiten reducir la varianza y obtener resultados de probabilidad de falla con un numero de simulaciones que las requeridas en el caso de Monte Carlo crudo. Muchos autores han estudiado las técnicas de reducción de invarianza; algunas de las más utilizadas son:

- ✓ Simulación Direccional
- ✓ Latin HyperCube Sampling
- ✓ Muestreo por Importancia

3.4.2.1.2 Latin HyperCube Sampling

Supongamos que se desea simular el resultado de una sola variable aleatoria continua Z con la distribución conocida F_Z, para estudiar cómo los resultados de un modelo $g(Z)$ depende de la distribución de Z.

Podemos hacerlo mediante un muestreo aleatorio simple, es decir, al azar la elaboración de los valores F_Z.

Sin embargo, evaluar g con otras estrategias de muestreo puede ser más eficaz: por ejemplo, es bien sabido que el muestreo estratificado puede caracterizar la población por igual, así como un muestreo aleatorio simple con un tamaño de muestra.

Trabajos de muestreo estratificado de la siguiente manera:

- La distribución Z se divide en m segmentos con un mínimo de 30
- La distribución de n muestras a lo largo de estos segmentos es proporcional a las probabilidades de Z caer en los segmentos.
- Cada muestra se extrae de su segmento por muestreo aleatorio simple.

Estratificación máxima tiene lugar cuando el número de segmentos (estratos) *m* es igual al número de datos *n*, y cuando *Z* tiene una probabilidad m^{-1} de caer en cada segmento, y este es el más eficiente.

Cuando el modelo depende de dos variables, como *h* (Z_1, Z_2), entonces los valores de ambos Z_1 y Z_2 puede extraerse mediante un muestreo aleatorio simple o por muestreo aleatorio estratificado. La muestra más eficiente es máximo estratificado para ambos Z_1 y Z_2 al mismo tiempo. Esto significa que una muestra de tamaño *n* de los pares (Z_1, Z_2) es marginalmente *n* estratificado para ambos Z_1 y Z_2. Dicha muestra se llama una muestra hipercubo de América o Latin HyperCube Sampling. En MathCad:

$$V_r(m,\mu,Cv,F_Z) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..m \\ \quad X_i \leftarrow \left[\frac{1}{2\cdot m} + \frac{(i-1)}{m}\right] \\ X \end{array} \right. \\ w \leftarrow \text{submatrix}(x,1,m,0,0) \\ VR \leftarrow F_Z(w,\mu,Cv\cdot\mu) \\ VR \end{array} \right.$$

Donde:

m: Numero de segmentos o áreas en que se divide la muestra.

F_Z: Distribución de probabilidad de la variable.

μ: Media de la variable.

C_V: Coeficiente de variación de la variable.

V_r: Vector representativo de la variable.

Ejemplo 2, La carga viva sobre una estructura tiene una media μ= 5 Kn/m^2, coeficiente de variación C_V= 35% y la distribución de probabilidad que rige a la variable es Normal.

Mediante un muestreo Latin HyperCube Sampling se obtiene el vector representativo de la variable y su correspondiente probabilidad acumulada donde se observa que, por este método a diferencia del muestreo aleatorio simple se garantiza tener puntos a lo largo de toda la distribución.

$V_r(30, 5, 0.35, qnorm) =$

	0
0	1.276
1	2.122
2	2.58
3	2.914
4	3.186
5	3.42
6	3.629
7	3.82
8	3.997
9	4.165
10	4.326
11	4.481
12	4.632
13	4.78
14	4.927
15	...

Probabilidad Acumulada =

	0
0	0.017
1	0.05
2	0.083
3	0.117
4	0.15
5	0.183
6	0.217
7	0.25
8	0.283
9	0.317
10	0.35
11	0.383
12	0.417
13	0.45
14	0.483
15	...

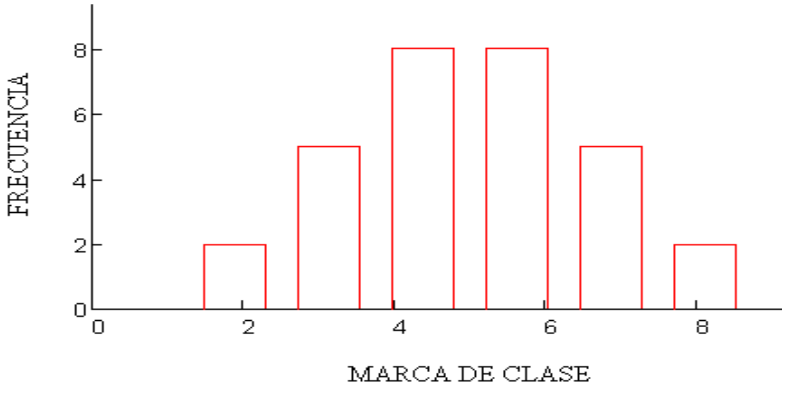


FIGURA 3.11 Histograma del Vector Representativo

3.4.2.2 Métodos de Transformación

Los métodos de transformación son la segunda alternativa al cálculo de la probabilidad de falla de estructuras. En todas sus versiones calculan la mínima distancia al origen en el espacio transformado. Existen dos metodologías ampliamente reconocidas dentro de los métodos de transformación: FORM y SORM.

FORM fue propuesto por Hasofer y Lind en 1974 y consiste en linealizar la función de estado límite en el punto de diseño Z* en el espacio transformado; a partir de esta aproximación, obtener la distancia al origen desde ese punto.
La probabilidad de falla se calcula con el índice β y la ecuación:

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

$Donde\ \Phi\ es\ la\ probabilidad\ acomulada\ de\ una\ distribucion\ normal\ media\ (\mu)\ igual\ a\ cero\ (0) y\ desviacion\ estandar\ (\sigma) igual\ a\ uno\ (1)\ y\ \beta\ es\ el\ indice\ de\ confiabilidad\ de$ Hasofer y Lind .

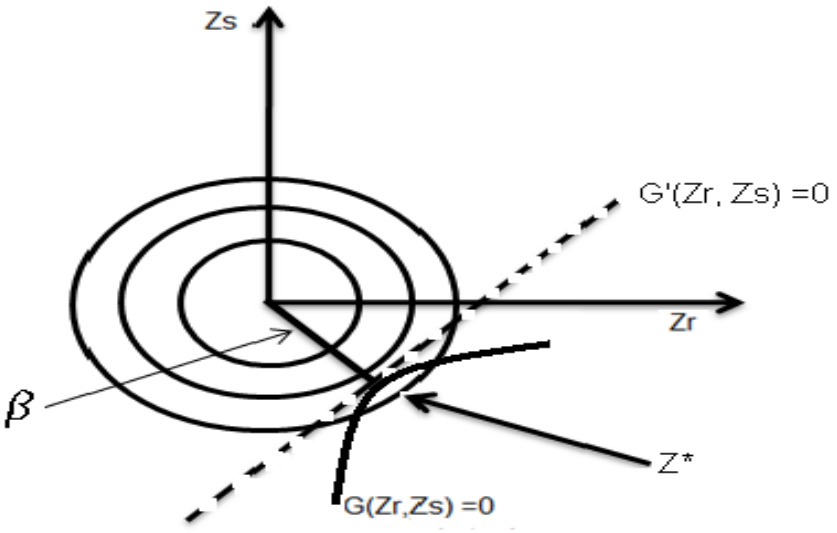


FIGURA 3.12 Índice de Hasofer y Lind

Para el cálculo del índice β cuando las variables son normales existe el siguiente procedimiento:

1. Definir la función de estado límite $G(\vec{x})$ = 0, en términos de las *n* variables e identificar la media μ_i y desviación σ_i de cada una de las variables X_i.

2. Seleccionar un punto de inicio para *n* - 1 variables. Típicamente las medias son un buen punto de inicio.

3. Resolver en $G(\vec{x})$ = 0 para la *n* - esima variable y completar el vector $\vec{X}$.

4. Obtener el vector $\vec{Z}$ de variables normalizadas. Los elementos de $\vec{Z}$ pueden obtenerse a partir de la ecuación:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \qquad (1)$$

5. Obtener el vector $\vec{D}$ de las derivadas en el espacio normalizado respecto a las variables normalizadas $\vec{Z}$. El vector $\vec{D}$ puede calcularse a partir de las derivadas en el espacio real de la siguiente manera:

$$D_i = -\frac{dG(\vec{x})}{dX_i} * \sigma_i \qquad (2)$$

6. Obtener β de la ecuación:

$$\beta = \frac{\vec{D}^T * \vec{Z}}{\sqrt{\vec{D}^T * \vec{D}}} \qquad (3)$$

7. Calcular el vector normal a la superficie $\propto$ como:

$$\propto = \frac{\vec{D}}{\sqrt{\vec{D}^T * \vec{D}}} \qquad (4)$$

8. Obtener un nuevo punto $\vec{X}$ para la *n* - 1 variables seleccionadas en el paso 2 a partir de la siguiente expresión:

$$X_i = \mu_i + \beta\alpha_i\sigma_i \qquad (5)$$

9. Repetir los pasos 3 al 8 hasta obtener la convergencia.

Cuando se presentan variables no normales involucradas, es necesario hacer una modificación al método basado en el procedimiento de Rackwitz y Fiessler, el cual consiste en obtener una media y una desviación estándar equivalentes a una distribución normal. Para ello se emplean las siguientes expresiones las cuales deben calcularse entre los pasos 3 y 4 del FORM para variables normales.

$$\sigma^e = \frac{1}{f(x)}\phi\left[\Phi^{-1}\left(F(x)\right)\right] \qquad (6)$$

$$\mu^e = x - \sigma^e\left[\Phi^{-1}\left(F(x)\right)\right] \qquad (7)$$

El resto de los pasos son idénticos pero empleando σ^e y μ^e en lugar de σ y μ.

El FORM es un procedimiento ampliamente aceptado y desde el punto de vista Computacional es poco exigente. Sin embargo, no debe olvidarse que consiste en una aproximación de primer orden de la función de estado límite y por tanto puede cometerse un error si la función $G(\vec{x})$ es altamente no lineal. Una alternativa a este problema es el SORM, el cual se caracteriza por emplear una aproximación de segundo orden de la función de estado límite en vez de la aproximación de primer orden propuesto por *Hasofer y Lind*. El método SORM es sustancialmente más complejo que el FORM y su descripción se encuentra fuera de los alcances de este documento.

Ejemplo 3, (Tomado del curso de Diseño Basado en Confiabilidad) Mediante el método de transformación FORM calcule el índice de confiabilidad β de Hasofer y Lind para la figura 3.10 del **Ejemplo 1**.

1. La función de estado límite en este caso está dada por

$$G_0(As, Fy, h, fc, b, w, P) := As \cdot Fy \cdot (h - 0.05) - \frac{0.59(As \cdot Fy)^2}{fc \cdot b} - \frac{w \cdot L^2}{8} - \frac{P \cdot L}{4}$$

2. Asumiendo para As, Fy, Fc, b, w, P el valor de las medias despejamos para h y obtenemos h = 0.315 m.

3. Pasando al espacio normalizado obtenemos

$$Z := \frac{X - \mu x}{\sigma x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.236 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Calculamos el vector de derivadas en el espacio normalizado D

$$D = \begin{pmatrix} 6 \\ 7.875 \\ -0.268 \\ -5.04 \\ -1.123 \\ -1.684 \\ -0.428 \end{pmatrix}$$

5. Calculando β a partir de la ecuación (3) se obtiene β = 1.889

6. Mediante la ecuación (4) se obtiene el vector normal a la superficie α

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.531 \\ 0.697 \\ -0.024 \\ -0.446 \\ -0.099 \\ -0.149 \\ -0.038 \end{pmatrix}$$

7. Se obtiene As, Fy, Fc, b, w, P mediante la ecuación (5).

$$\begin{pmatrix} As \\ Fy \\ Fc \\ b \\ w \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.977 \times 10^{-4} \\ 4.165 \times 10^{5} \\ 2.784 \times 10^{4} \\ 0.249 \\ 9.303 \\ 24.01 \end{pmatrix}$$

Los pasos 2 a 7 se repiten hasta obtener convergencia. Después de tres iteraciones se obtiene finalmente como resultado β =1.868 lo cual produce una probabilidad de falla P_{falla} =0.031(3.1%). La convergencia del valor de β y del vector α se presenta en la tabla 2.

ITERACIÓN	1	2	3
β	1.889	1.868	1.868
αAs	-0.099	-0.128	-0.128
αFy	-0.149	-0.193	-0.193
αFc	-0.038	-0.037	-0.037
αh	-0.446	-0.437	-0.436
αb	-0.024	-0.023	-0.023
αw	0.697	0.691	0.691
αP	0.531	0.526	0.527

Tabla 2 Convergencia del índice de confiabilidad y el vector normal

4. ACEPTABILIDAD DEL RIESGO

4.1 PERCEPCIÓN PSICOLÓGICA Y SOCIAL

La percepción del riesgo desde el punto de vista psicológico y social ha sido uno de los aspectos de mayor relevancia en los últimos años, razón por la cual, cualquiera que sea el enfoque de concepción del riesgo que se tenga, es necesario tenerlo en cuenta para fines de estimar que tan aceptable o no es el riesgo, las condiciones sociales, económicas, locales, ambientales de quien tiene la posibilidad de afrontarlas.

El estudio de la percepción del riesgo en lo referente a la concepción se ha basado en el concepto de probabilidad psicológica o subjetiva, entendida como el grado de confianza o grado de creencia que tiene una persona en la ocurrencia de un suceso, es decir, la actitud o comportamiento que refleja una persona ante la visión de un suceso.

Por ejemplo, cuando un individuo del común observa una columna de grandes dimensiones sin saber las propiedades de los materiales que la conforman y en qué condiciones se encuentran (*refuerzo, relación de esbeltez*), la creencia de éste ante el riesgo de que la columna no falle es de una total seguridad.

La probabilidad subjetiva ante cualquier suceso varia considerablemente de individuo a individuo, como una función de su propio conocimiento de un mismo suceso, es decir si el individuo es un ingeniero civil la confianza de este difiere dado que su conocimiento técnico le permite saber que la columna puede tener grandes dimensiones pero si la longitud es considerable por teorías de diseño como *Euler* esta podría fallar por pandeo lateral.

Por tal razón, algunos investigadores consideran inadecuado definir el nivel de riesgo aceptable de una sociedad con base únicamente en la percepción de los

individuos o de la comunidad en general; debido a que, a pesar que muchos experimentos han establecidos coherencias cuando las situaciones que se estudian son simples (por ejemplo, al observar una silla en mal estado la probabilidad de que una persona la utilice es mínima), cuando la situación en cuestión es un fenómeno natural (inundaciones, sismo) la percepción del riesgo de la sociedad en común es bastante incompleta, fragmentada e incluso ignorante debido a la creencia de que el riesgo es bajo.

Por otra parte las normas de seguridad y los códigos de construcción definen unos parámetros mínimos para llevar a cabo el diseño de edificaciones con el fin de garantizar seguridad ante la ocurrencia de un evento sísmico. Estos niveles de seguridad tienen asociados un riesgo que la población en general, suele desconocer. De esta manera los niveles mínimos de protección que deben ofrecerse a la comunidad deben ir íntimamente ligados a los riesgos aceptables que esta esté en capacidad de afrontar con base en sus condiciones socioeconómicas.

4.2 COMPARACIÓN CON OTROS RIESGOS EN LA SOCIEDAD

Es uno de los más complejos de establecer puesto varía con parámetros como la edad, la clase social, el sexo y en términos generales con las características socioeconómicas del lugar, esto sin ocultar que posee una gran influencia de los medios de comunicación. Básicamente éste criterio consiste en comparar los riesgos que se obtienen en los diseños con riesgos de otras actividades o eventos en la vida de las personas como son muerte por enfermedades, homicidios, etc. A partir de éstas comparaciones es posible establecer un valor máximo de riesgo por debajo del cual es intolerable y uno valor mínimo por debajo del cual el diseño no tiene sentido. Aún cuando parezca simple, es más complejo de lo que se puede pensar porque entran en discusión valores intrínsecos de la sociedad y esto conlleva a la subjetividad, lo cual hace de éste un criterio que puede generar

ambigüedades. Esto se corrobora con estudios que comparan el riesgo sísmico con la probabilidad de muerte por causas comunes[17] (Sánchez y Arroyo, 2003).

Existen dos alternativas para definir un nivel de aceptabilidad del riesgo: utilizar evidencia experimental o definir criterios de comparación. La primera alternativa consiste en seleccionar el índice de confiabilidad con base en evidencia histórica del comportamiento de elementos estructurales existentes. La segunda alternativa consiste en utilizar como referencia valores de riesgo relacionados con actividades cotidianas (Ej: morir en un accidente de avión). En la tabla siguiente se muestra un estimativo de riesgos de muerte por año en actividades cotidianas. Los valores presentados en la tabla varían de acuerdo con el país y la región.

ACTIVIDAD	x 10^{-9} MUERTES / HORA EXPUESTA	EXPOSICIÓN TÍPICA (HORAS / AÑO)	RIESGO TÍPICO DE MUERTE
Escalar	30 000 - 40 000	50	1500 - 2000
Viajar en Bote	1500	80	120
Nadar	3500	50	170
Fumar cigarrillo	2500	400	1000
Viajar en avión	1200	20	24
Viajar en carro (UK)	700	300	200
Viajar en tren (UK)	80	200	15
Explotar minas de Carbón (UK)	210	1500	300
Trabajar en construcción	70-200	2200	150-440
Trabajar en Manufacturas	20	2000	40
Incendios en Edificios	1-3	8000	8-24
Fallas Estructurales	0.02	6000	0.1

Tabla 3 Valores de riesgo asociado a actividades cotidianas (Allen 1978 y CRIA,1977)

En Colombia no existen la mayoría de estos indicadores y claramente, algunos de ellos sobrepasan los valores mostrados (ej.: viajar en carro). El riesgo promedio de morir en un año, en un accidente de avión es del orden de $24x10^{-6}$, viajando en

[17] Sánchez, M. (2004). Introducción a la Confiabilidad y la Evaluación de Riesgos: Teoría y Aplicaciones en Ingeniería

automóvil $200x10^{-6}$, y como resultado de una falla estructural es $0.1x10^{-6}$. Es importante resaltar que las diferencias entre el riesgo de las actividades cotidianas y los riesgos relacionados con una falla estructural son significativas[18].

La aceptabilidad del riesgo se puede definir dentro de un rango en el cual el límite superior está definido por los riesgos que no son tolerables bajo ninguna circunstancia y el límite inferior por situaciones que no son preocupantes para ninguna persona en condiciones normales. El riesgo que se encuentra entre estos dos límites es lo que se considera un riesgo "razonable". Siguiendo estos criterios la clasificación de los niveles de aceptación del riesgo desarrollada por Rusch y Rackwitz (1972) en términos de riesgos de accidentes por persona por año, es la siguiente: el riesgo aceptado por una persona atrevida corresponde a un evento con una probabilidad de ocurrencia de 10^{-3} por año, mientras que para una persona cuidadosa este valor es de 10-4 por año; y un riesgo inaceptable tiene una probabilidad de 5x10-5 por año.

Teniendo en cuenta que el usuario de un edificio considera el colapso estructural como un riesgo inaceptable, la probabilidad de falla de diseño debe ser del orden de $5x10^{-5}$ por año, lo que corresponde a una probabilidad de falla del orden de $3x10^{-4}$ para una vida útil de 30 años. En general la probabilidad de falla se puede estimar como $P_{falla} \approx 10^{-\beta}$; esto quiere decir que el diseño debe realizarse para valores de β entre 3 y 4[19].

[18] MELCHERS, Robert E. "*Structural Reliability Analysis and Prediction*".1999.

[19] Hasofer A., Rackwitz R. (2000): Time-dependant models for code optimization. Proceedings ICASP-99

4.3 MEDIDAS Y NIVELES DE SEGURIDAD

El diseño estructural tiene como objeto proporcionar soluciones que por medio del aprovechamiento optimo de los materiales, de las técnicas constructivas disponibles y cumplimiento con las restricciones impuestas por los otros aspectos del proyecto den lugar a un buen comportamiento de las estructuras en condiciones normales de funcionamiento y de seguridad adecuada contra la ocurrencia de algún tipo de falla; proporcionando niveles de seguridad a la estructura en concordancia con los costos que se generen y a los riegos que la sociedad admite.

Para llevar a cabo lo expuesto anteriormente los códigos de diseño utilizan factores de seguridad para tomar en cuenta la incertidumbre que se genera en el conocimiento de las solicitudes, la imprecisión de los modelos, la variabilidad de los parámetros, la naturaleza espacial y temporal y los modelos de decisión del proyecto. Estos factores son el fruto de un largo proceso de estudio técnico de análisis de riesgo basado en teorías de probabilidades los cuales cubren “razonablemente la incertidumbre” pero queda la inquietud ¿cuál es el riesgo que puede considerarse como aceptable?

Muchas teorías e investigaciones han surgido a raíz del tema como: “teniendo en cuenta la causa, STARR (1969), propuso diferenciar el riesgo de morir por actividades voluntarias del asociado con actividades involuntarias”. Las actividades voluntarias a las que STARR se refería son las situaciones en las cuales los individuos se exponen conscientemente al riesgo, por ejemplo, fumar, conducir un automóvil, practicar un deporte extremo, etc. en las cuales el riesgo era del orden de 100 muertes por millón de personas anualmente, mientras que en las actividades involuntarias los individuos no tienen un control sobre estas y las opciones de protección no son definidas por los afectados, si no por una autoridad competente.

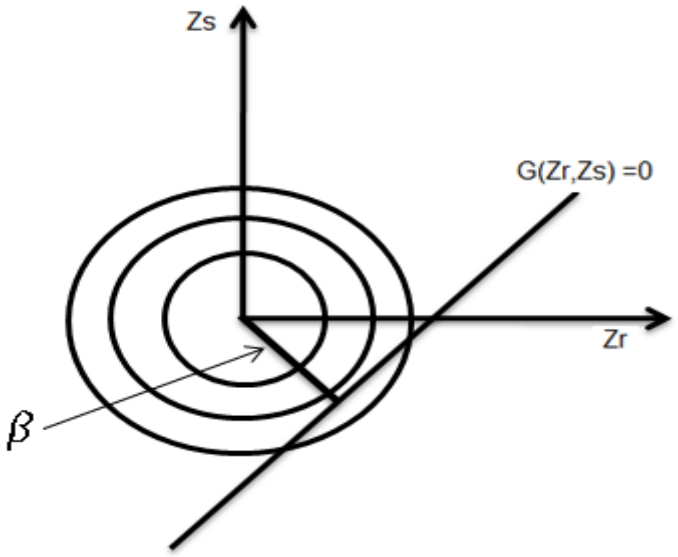
“Según el estudio de Starr (1969), en los países desarrollados la comunidad desea que los riesgos involuntarios, tales como desastres, sean alrededor de 100 a 10000 veces menores que los voluntarios. Es decir, que para una catástrofe el número de muertos podría estar entre 1 y 0.01 por millón de personas expuestas anualmente”.

Debido al gran numero de variables que intervienen en el diseño y a las incertidumbres significativas y debido a que las estructuras reales son sistemas complejos, el problema de determinar la probabilidad de falla es muy complejo y consigo mismo el nivel de seguridad de las estructuras. Debido a esto diversos investigadores han mejorado los métodos estadísticos usados con el fin de determinar el nivel de seguridad y confiabilidad en los códigos de construcción (Cornell 1969, Hasofer y Lind 1974; Galambos et al. 1986; Galambos 1992).

Estos autores hicieron un planteamiento muy simplista según el cual la seguridad de una estructura depende de los valores relativos de solo dos variables, una que representa la resistencia R y otra que es una medida de las solicitudes S, la diferencia entre estas es lo que se conoce como ecuación de los estados limites de falla G(x).

La relación entre el valor medio de G(x) y su desviación estándar lo han denominado el índice de confiabilidad β. Matemáticamente, tenemos:

$$\beta = \frac{\mu G(x)}{\sigma\, G\,(x)}$$



Variables en el espacio transformado

Cabe destacar que aunque parezca fácil la forma de esta distribución es típicamente difícil de determinar, pero si conocemos β se tiene una medida de invariante de la seguridad. Las investigaciones han encontrado que para edificaciones existentes los β varían entre 3 y 4 para cargas en condiciones de servicio y recomiendan para carga sísmica un β de 1.75 en países desarrollados.

El bajo valor de β para cargas sísmica se debe a los costos relativos que se generan por resistir terremotos sin daños, sin embargo estos valores de β dependen en gran parte de las condiciones socio-económicas y los riegos de muerte al que la sociedad está expuesta.

Por ejemplo las normas NEHRP de los estados unidos toleran los siguientes niveles de riesgo de un edificio: 0.1% la probabilidad de colapso, y 0.01% de probabilidad de que cualquier ocupante pierda la vida el cual equivale a una probabilidad anual de $1x10^{-6}$.

Otra de las teorías que surgieron acerca de cómo evaluar el riesgo sísmico aceptable fue la que propuso WIGGINS (1978), la idea de este investigador se enfoco en términos de costo optimo, encontrando que los costos de construcción más daños por sismo y víctimas son criterios paralelos, es decir, si los códigos de construcción generan diseños que toleran al máximo la ocurrencia de sismo conlleva a costos de construcción alta y viceversa, por lo que el nivel de riesgo optimo por costo es aquel en lo que los costos de construcción son más bajos y permiten extender la esperanza de vida de la sociedad.

Considerando que las anteriores teorías ignoran la severidad del evento en términos del número de personas que mueren HELM (1996) presento la perspectiva que desarrollo en nueva Zelanda en la que compara la frecuencia y el número de muertes por accidentes industriales y de otra índole; encontrando una relación lineal inversa entre la serenidad y la tolerancia como se muestra en la siguiente figura:

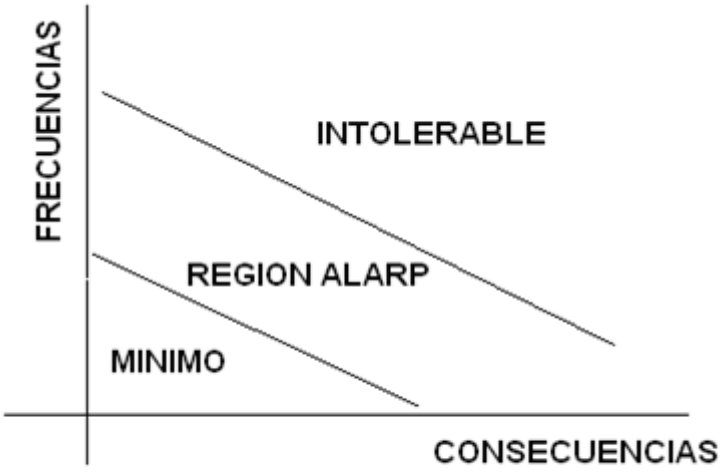


FIGURA 4.1 Aceptabilidad del Riesgo

Con base a las observaciones realizadas por este investigador propuso que el riesgo se divida en tres regiones:

a) ***Intolerable***. Es la región en la que no es aceptable ni justificado el riesgo porque debido a la ocurrencia de un sismo y la gravedad de sus consecuencias exceden la aceptabilidad local de muertes por actividades voluntarias. Teóricamente índices de confiabilidad β muy pequeños.

b) ***Región ALARP***. (as low as reasonably possible) en español “tan bajo como sea razonablemente posible” que significa que el riesgo es tolerado en la medida que se tomen medidas prácticas para reducirlas, es decir, siempre y cuando los costos que se generen en esa construcción puedan exceder en mucho el mejoramiento obtenido mediante medidas de mitigación. Teóricamente definida entre dos limites en donde el diseño fuera de esta región no tiene sentido.

c) ***Ampliamente aceptable***. Esta región considera β muy altos donde la gravedad de las consecuencias ante ocurrencias de sismo son muy bajas en comparación con actividades voluntarias (fumar) de los individuos, por lo que el riesgo en esta región es despreciable y en relación a costo los diseños son muy caros es decir, un diseño en esta región no se justifica.

4.4 OBJECIÓN AL RIESGO ACEPTABLE

La aceptabilidad del riesgo es un tema que implican muchas discusiones, controversia, opiniones, proposiciones las cuales varían de un lugar a otro debido a que está ligada a todos los factores que rodean el entorno. Debido a esto, las estimaciones que se hacen y las imprecisiones que se dan han conducido a profundos desacuerdo entre los expertos del tema. De esta situación surgieron en los últimos años dos conceptos que han sido de interés: el primero conocido como aversión a la ambigüedad, o tendencia de los investigadores a preferir certeza que incertidumbre, es decir, probabilidades subjetivas no objetivas que son las basadas en teorías de probabilidad o modelos matemáticos.

El segundo, aversión al conflicto en el que se prefieren evaluaciones en consenso que evaluaciones precisas que generen desacuerdo, es decir, argumenta la aceptabilidad de riesgo en forma objetiva pero muchas de sus hipótesis son igualmente subjetivas, razón por la cual se les cuestiona.

De todas maneras estos dos conceptos dejan claro que aún queda mucho camino por recorrer pues parece ser que tomar decisiones sobre la aceptabilidad del riesgo debe ir de la mano tanto como de percepción de riesgo (grado de creencia) como análisis probabilistas (incertidumbres), pero teniendo el cuidado en las brechas que puedan presentarse en las apreciaciones individuales y colectivas de la población, ya que estas dependen en gran parte del estado del conocimiento que tenga cada individuo y pueden generarse controversia.

A continuación de se expone un ejemplo en el cual se obtienen las dimensiones y refuerzos de vigas y columnas estructurales mediante la metodología de diseño sismo resistente NSR-98 y luego se desarrolla el análisis de confiabilidad a dos (2) vigas y tres (3) columnas determinando el índice de confiabilidad β de Hasofer y Lind y su respectiva probabilidad de falla utilizando métodos de simulación, la técnica *Latin HyperCube Sampling* y regresión multilineal debido a que las ecuaciones de estados limites no son explicitas. Finalmente se hace un análisis de sensibilidad de las variables involucradas en cada caso seguido de una discusión acerca de los resultados.

5. DISEÑO DE COLUMNAS UNIAXIALES Y VIGAS ESTRUCTURALES

Para determinar el análisis de confiabilidad de la metodología de diseño NSR-98 en lo referente a columnas y vigas estructurales se utilizo el proyecto: Diseño de Apartamentos Bifamiliar ubicada en la zona residencial del barrio la Palma Sincelejo – Sucre, gracias a la colaboración del Arquitecto Luis Yirberto Gómez y el Ingeniero Civil Orlando Arroyo Amell se tuvo acceso a los planos (ver Anexos) de fachada principal y planta Arquitectónica.

5.1 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Para los cálculos estructurales se utilizó el programa ETABS 9.4 de la casa Computer and Structures, cuyas memorias de cálculo se presentan a continuación. La modelación de las vigas y viguetas se encuentra en la planta estructural (Ver Anexos).

5.1.1 Determinación del Espesor de Placa

Para determinar el espesor de placa se procedió de acuerdo con lo establecido en la NSR 98, encontrando tres situaciones:

- Para 1 apoyo continuo la longitud crítica es de 4.44m, resultando en un espesor de 37cm (L/12).
- Para 2 apoyos simples la longitud crítica es de 3,15m, dando como resultado un espesor de 23cm (L/14).
- Para el voladizo se tiene una longitud de 2.15m, resultando en un espesor de placa de 43cm (L/5).

Para este caso se seleccionó un espesor de 40cm, teniendo en consideración que será necesario chequear las deflexiones en el voladizo. Las vigas estructurales tendrán una sección de 25x40 cm.

Se seleccionó un sistema de nervios en una dirección, con separación entre 0.63 y 0.72m de acuerdo con la luz a cubrir, las cuales están de acuerdo con los requisitos de la NSR-98 de separación máxima de nervios (1.2m o 2,5 veces la altura). El espesor seleccionado para los nervios fue 0.12 m.

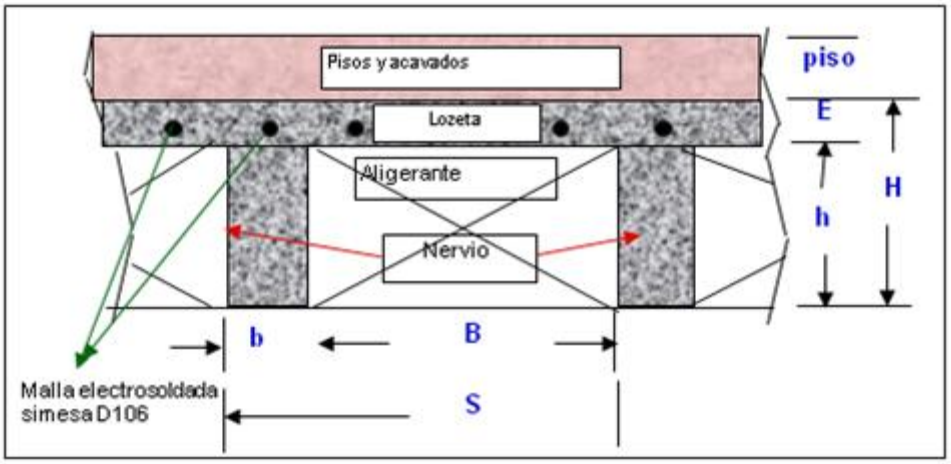


FIGURA 5.1 Sección Transversal de la Losa Entrepiso

5.1.2 Avalúo de Carga

Se llevó a cabo el avalúo de cargas por m^2 para la losa, tomando como pesos unitarios de los materiales los sugeridos por la NSR 98.

Ítem	Espesor (cm)	Carga (KN/m^2)
Pisos y acabados	7	1.4
Loseta	5	1.2
Nervio	0.12*0.35/0.75	1.344
Aligerante (Icopor)	0.5*0.35/0.75	0.15
Cielo raso		0.25
Instalaciones eléctricas y sanitarias		0.86
Muros		3.5

Tabla 4.1 Avalúo de Carga de la Losa

Por lo tanto, se trabajará con una carga muerta CM = 8.704 KN/m^2 y una carga viva (NSR 98 para edificaciones uso vivienda) CV = 1.8 KN/m^2, resultando en una carga última W_U = 15.25 KN/m^2.

Para la cubierta se realizó el siguiente avalúo de carga:

Ítem	Carga (KN/m^2)
Lámina asbesto cemento	0.18
Correas	0.03
Cielo Raso	0.25

Tabla 4.2 Avalúo de Carga de la Cubierta

Por lo tanto, se trabajará con una carga muerta CM = 0.46 KN/m^2 y una carga viva (NSR 98 para cubiertas) CV = 0.35 KN/m^2, resultando en una carga última W_U = 1.24 KN/m^2.

Considerando un pre-dimensionamiento de columnas de 30x25cm, y tomando los pesos muertos previamente calculados, se obtiene un peso total de la estructura de 1433 KN ó 13.37KN/m^2, el cual será empleado para el análisis sísmico.

Elemento	Carga	Unidad	Peso (KN)
Losa	$8.704\ KN/m^2$	$107\ m^2$	932
Columnas	$0.25x0.30x24 = 1.8\ KN/m$	$41\ m$	74
Vigas	$0.25x0.40x24 = 2.4\ KN/m$	$82.4\ m$	198
Cubierta	$0.46\ KN/m^2$	$110\ m^2$	51
Viga de Confinamiento	$0.15x0.30x24 = 1.08\ KN/m$	$82.4\ m$	89
Columna Confinamiento	$0.20x0.30x24 = 1.44\ KN/m$	$61.8m$	89
Total	Peso de la Estructura		$1433\ KN$

Tabla 5 Peso Total de La Estructura

5.1.3 Análisis Sísmico

Utilizando el procedimiento del método de la *Fuerza Horizontal Equivalente* descrito en la NSR-98.

DATOS DE ENTRADA		
A_a	0,15	A.1.3 Coeficiente de aceleración sísmica para Sincelejo
S	1	Coeficiente de sitio
I	1	A.2.5 Coeficiente de importancia de estructura
Ct	0,08	A.4.2.2 Coeficiente que depende del sistema estructural (Aporticado)
h_n	5,4	Altura nominal de la estructura (m)
W	1433	Peso de la estructura (KN)
X_i	3,74	Centroide en la dirección X piso 1
Y_i	5,16	Centroide en la dirección y piso 1

Tabla 6 Parámetros para realizar el análisis sísmico

Se calcula el periodo T_a de la estructura

$$T_a = C_t * h_n^{\frac{3}{4}} \longrightarrow T_a = 0.284\,Seg < T_c = 0.48\,Seg$$

Entonces, tenemos $S_a = 2.5A_aI \rightarrow S_a = 0.375$

Cortante *vasal* V_s de la estructura

$$V_s = S_a * W \rightarrow V_s = 538\,KN$$

La estructura consiste en dos sistemas estructurales, el primer piso es un sistema Aporticado y el segundo piso un sistema de muros de confinamiento.

El análisis sísmico se hizo considerando que el sistema Aporticado absorbe la fuerza sísmica debido a que el mayor peso de la estructura es soportado por este.

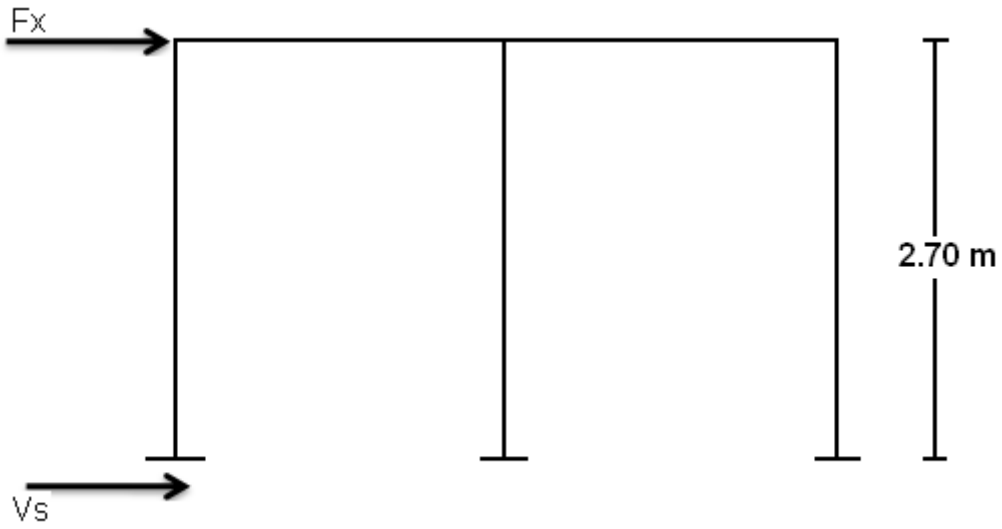


FIGURA 5.2 Cortante vasal

5.1.3.1 Rigidez de los Pórticos: Para determinar la rigidez de los pórticos que conforman la estructura analizada se considero actuando en cada uno de estos una fuerza horizontal (Fx) de 100 KN de magnitud, calculando para cada pórtico en plano su respectivo desplazamiento (deriva Δ) y su rigidez con la siguiente expresión:

$$F = K \times \mu \longrightarrow K = \frac{F}{\mu}$$

Donde:

F ⟶ Fuerza horizontal aplicada

K ⟶ Rigidez del pórtico

μ ⟶ Desplazamiento horizontal Δ

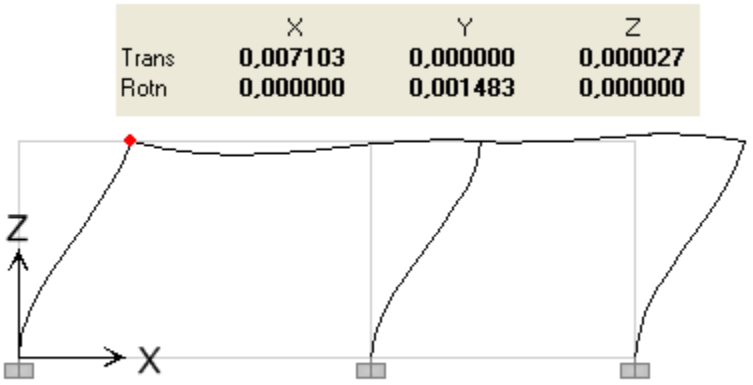


FIGURA 5.3 Desplazamiento de los pórticos x.x

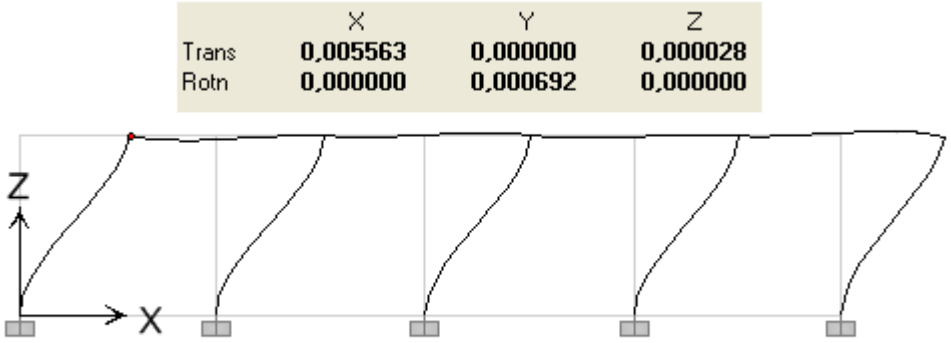


FIGURA 5.4 Desplazamiento de los pórticos y-y

La siguiente tabla muestra la rigidez de los pórticos.

RIGIDEZ (KN/m)				
PORTICO X-X				
P2	P3	P6	P8	P9
14079	14079	14079	14079	14079
PORTICO Y-Y				
PA	PC	PE		
17976	17976	17976		

Tabla 7 Rigidez de los Pórticos

5.1.3.2 Centro de Torsión: Se calcula el centro de torsión de la estructura con las siguientes expresiones de la NSR-98.

$$X_T = \frac{\sum R_{iy} X_i}{\sum R_{iy}} \qquad Centro\ de\ Torsión\ en\ \ x - x$$

$$Y_T = \frac{\sum R_{ix} y_i}{\sum R_{ix}} \qquad Centro\ de\ Torsión\ en\ y - y$$

CENTRO DE TORSION					
PISO 1	CENTRO DE TORSION Y-Y				
PORTICO	Rix	Yi	Rix*Yi		
P2	17976	0	0		
P3	17976	2,96	53209		
P6	17976	6,11	109833	YT (m)	6,1
P8	17976	9,26	166457		
P9	17976	12,38	222542		
∑	89880		552040		
PISO 1	CENTRO DE TORSION X-X				
PORTICO	Riy	Xi	Riy*Xi		
PA	14079	0	0		
PC	14079	4,44	62509	XT (m)	4,1
PE	14079	7,76	109250		
∑	42236		171758		

Tabla 8 Centro de Torsión de la Estructura

5.1.3.3 Centro de Cortante: El centro de cortante de la estructura es igual al centro de masa debido a que se está considerando que el primer piso absorbe el sismo.

5.1.3.4 Excentricidad y Momento Torsional Definitivo: Se determina la excentricidad de acuerdo a las siguientes expresiones de la NSR-98

$$e_x = |X_v - X_T|$$

$$e_y = |Y_v - Y_T|$$

Entonces, $e_x = 0.327\,m$ y $e_y = 0.982\,m$

Calculo del momento torsional directo:

$$M_{Tx} = V_s * e_y \longrightarrow M_{Tx} = 528\,KN$$

$$M_{Ty} = V_s * e_x \longrightarrow M_{Ty} = 176\,KN$$

Calculo del momento torsional accidental: Se considero una excentricidad accidental del 5% de la longitud en cada eje.

$$M_{Tax} = V_s * e_{ax} \longrightarrow M_{Tax} = 209\,KN$$

$$M_{Tay} = V_s * e_{ay} \longrightarrow M_{Tay} = 333\,KN$$

Calculo del momento torsional definitivo.

$$M_{TDx} = M_{Tx} + M_{Tax} \longrightarrow M_{TDax} = 736\,KN$$

$$M_{TDy} = M_{Ty} + M_{Tay} \longrightarrow M_{TDay} = 508\,KN$$

5.1.3.5 Cortante Directo: Se determina el cortante directo de cada pórtico de la estructura con las siguientes expresiones de la NSR-98.

$$V_{yi} = \frac{V_i * R_{iy}}{\sum R_{iy}} \qquad V_{xi} = \frac{V_i * R_{ix}}{\sum R_{ix}}$$

CORTANTE DIRECTO X-X				
PORTICO	Rix	Vi	Rix*Vi	Vd
P2	17976	537	9659806	107
P3	17976	537	9659806	107
P6	17976	537	9659806	107
P8	17976	537	9659806	107
P9	17976	537	9659806	107
∑	89880			

Tabla 9.1 Cortante directo x-x

CORTANTE DIRECTO Y-Y				
PORTICO	Riy	Vi	Riy*Vi	Vd
PA	14079	537	7565465	179
PC	14079	537	7565465	179
PE	14079	537	7565465	179
∑	42236			

Tabla 9.2 Cortante directo y-y

5.1.3.6 Cortante por Torsión: Se calcula el cortante por torsión de cada pórtico de la estructura con las siguientes expresiones de la NSR-98.

$$V_{c-Tx} = \frac{R_{iy} * X_{itorsion} * M_{TDy}}{\sum R_{ix} * Y_{itorsion}{}^2 + R_{iy} * X_{itorsion}{}^2}$$

$$V_{c-Ty} = \frac{R_{ix} * Y_{itorsion} * M_{TDx}}{\sum R_{ix} * Y_{itorsion}{}^2 + R_{iy} * X_{itorsion}{}^2}$$

CORTANTE POR TORSION X-X						
PORTICO	Rix	YiT	Rix*YiT	Rix*YiT^2	VTx	VTy
P2	17976	-6,1	-110408	678126	-37,61	-25,96
P3	17976	-3,2	-57199	182008	-19,48	-13,45
P6	17976	0,0	-575	18	-0,20	-0,14
P8	17976	3,1	56049	174760	19,09	13,18
P9	17976	6,2	112134	699490	38,20	26,37
∑				1734404		

Tabla 10.1 Cortante por Torsión x-x

CORTANTE POR TORSION Y-Y						
PORTICO	Riy	XiT	Riy*XiT	Riy*XiT^2	VTx	VTy
PA	14079	-4,1	-57253	232828	-19,50	-13,46
PB	14079	0,4	5256	1962	1,79	1,24
PC	14079	3,7	51997	192042	17,71	12,23
∑				426832		

Tabla 10.2 Cortante por Torsión y-y

5.1.3.7 Cortante Sísmico y de Diseño: A continuación se muestran los cortantes sísmico y de diseño definitivos para cada pórtico de la estructura considerando el sismo en la dirección X mas el 30% en la dirección Y y viceversa. Para el cortante de diseño se utilizo un factor R de acuerdo a la NSR-98 de 5.

CORTANTE SISMICO y DISEÑO Y-Y					
PORTICO	Vd	VTx	VTy	Vsismico	Vdiseño
PA	179	-19,50	-13,46	198,4	40
PC	179	1,79	1,24	180,9	36
PE	179	17,71	12,23	196,7	39

Tabla 11.1 Cortantes de Diseño en y-y

CORTANTE SISMICO y DISEÑO X-X					
PORTICO	Vd	VTx	VTy	Vsismico	Vdiseño
P2	107	-37,61	-25,96	152,9	31
P3	107	-19,48	-13,45	131,0	26
P6	107	-0,20	-0,14	107,7	22
P8	107	19,09	13,18	130,5	26
P9	107	38,20	26,37	153,6	31

Tabla 11.2 Cortantes de Diseño en x-x

5.2 DISEÑO DE VIGAS Y COLUMNAS UNIAXIALES

El diseño de vigas y columnas se llevó a cabo para las combinaciones establecidas por la NSR-98 utilizando los siguientes combos; de los cuales se obtiene una envolvente de diseño.

- ✓ Combo $1 \longrightarrow 1.4\ CM + 1.7\ CV$
- ✓ $combo\ 2 \longrightarrow 1.05CM + 1.28\ CV + 0.2\ EQ_x$
- ✓ $combo\ 3 \longrightarrow 1.05CM + 1.28\ CV - 0.2\ EQ_x$
- ✓ $combo\ 4 \longrightarrow 1.05CM + 1.28\ CV + 0.2\ EQ_y$
- ✓ $combo\ 5 \longrightarrow 1.05CM + 1.28\ CV - 0.2\ EQ_y$
- ✓ $combo\ 6 \longrightarrow 0.9CM + 0.2\ EQ_x$
- ✓ $combo\ 7 \longrightarrow 0.9CM - 0.2\ EQ_x$
- ✓ $combo\ 8 \longrightarrow 0.9CM + 0.2\ EQ_y$
- ✓ $combo\ 9 \longrightarrow 0.9CM - 0.2\ EQ_y$
- ✓ $combo\ 10 \longrightarrow envolvente\ de\ diseño$

Para el cálculo de estribos se consideró que el concreto (21MPa) aporta una resistencia de 653kN/m^2 (de conformidad con la NSR-98). El diseño de refuerzo longitudinal para vigas se llevó a cabo siguiendo lo establecido en la NSR-98, para momentos positivos y negativos. Para el diseño de columnas se emplearon curvas de interacción

5.2.1 Resultados de Vigas Estructurales a Estudiar

5.2.1.1 Viga Voladizo del Pórtico C: A continuación se muestra el diseño a flexión detalladamente.

$L := 2.15$ Longitud entre apoyos

$Fc := 21000$ Esfuerzo de compresion del concreto

$Fy := 420000$ Fluencia del acero

$b := 0.25$ Base de la viga

$h := 0.40$ Altura de la viga

$Ec := 3900000 \cdot \sqrt{\frac{Fc}{1000}}$ Modulo de elasticidad del concreto

$d := h - 0.05 = 0.35$ Peralte efectivo

$\beta := 0.85$ Coeficiente para la cuantia maxima

$\phi := 0.9$ Coeficiente de reduccion de resistencia

$TM := 1.59$ Tamaño maximo del agregado

$m := \frac{Fy}{0.85 \cdot Fc} = 23.529$ Constante para la cuantia de diseño

Diametro de las barras

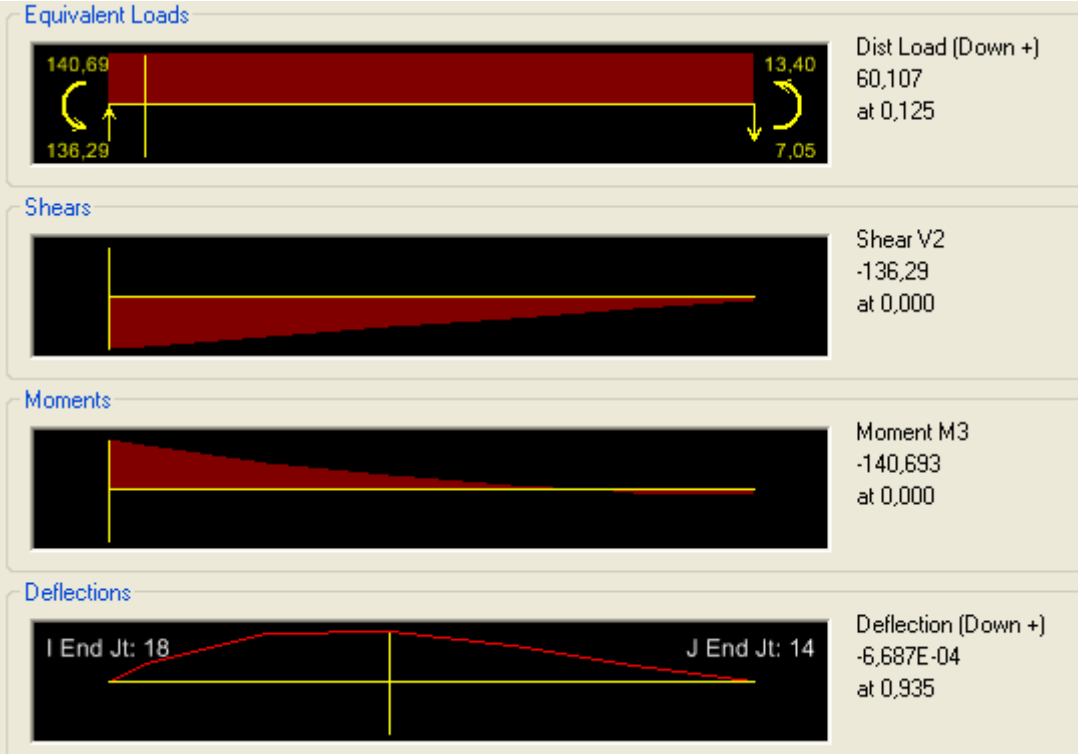
$$Db := \begin{pmatrix} 1.27 \\ 1.59 \\ 1.91 \\ 2.22 \\ 2.54 \end{pmatrix}$$

Area de las barras

$$Ab := \begin{pmatrix} 1.27 \\ 2.00 \\ 2.87 \\ 3.87 \\ 5.08 \end{pmatrix}$$

Momento Actuante

Del análisis estructural realizado en ETABS 9.4 de la casa Computer and Structures se obtuvo:



$Momento\ actuante \rightarrow M_u = 140.69\ KN - m$

Cuantía mínima y máxima para flexión.

$$\rho min := \max\left(\frac{1400}{Fy}, \frac{8\cdot\sqrt{Fc}}{Fy}\right) = 3.333\times 10^{-3}$$

$$\rho max := \frac{0.75\cdot 0.85\cdot\beta\cdot Fc}{Fy}\cdot\left(\frac{6000}{6000+\frac{Fy}{100}}\right) = 0.016$$

Cuantía de diseño.

$$\rho := \frac{1}{m}\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{2\cdot m\cdot M_u}{b\cdot d^2\cdot\phi\cdot Fy}}\right) \qquad \rho = 0.015$$

Verificación de la cuantía con los limites de falla dúctil ($\rho_{min} < \rho < \rho_{max}$)

$$\rho 1 := \left|\begin{array}{l} \rho 1 \leftarrow \rho \\ \rho 1 \leftarrow \rho min \text{ if } \rho < \rho min \\ \rho 1 \leftarrow \text{"cambiar b o h"} \text{ if } \rho > \rho max \\ \rho 1 \leftarrow \text{"cambiar b o h"} \text{ if } \left(1-\frac{2\cdot m\cdot M_u}{b\cdot d^2\cdot\phi\cdot Fy}\right) < 0 \\ \rho 1 \end{array}\right.$$

$$\rho 1 = 0.015$$

Área de acero necesaria (cm^2)

$$A_s := 10000\, b\cdot d\cdot \rho 1$$

$$A_s = 12.857$$

$$n_{barras} := ceil\left(\frac{A_s}{Ab}\right) \qquad n_{barras} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Separación mínima de barras (cm)

$$S := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\text{rows}(Db) - 1 \\ \quad S_{m_i} \leftarrow \max(Db, 1.33 \cdot TM, 2.5) \\ S_m \end{array} \right| \qquad S = \begin{pmatrix} 2.54 \\ 2.54 \\ 2.54 \\ 2.54 \\ 2.54 \end{pmatrix}$$

Base mínima necesaria (cm)

$$b_{min} := \overrightarrow{\left[\left(n_{barras} - 1 \right) \cdot S + n_{barras} \cdot Db + 10 \right]} \qquad b_{min} = \begin{pmatrix} 49.37 \\ 36.37 \\ 29.71 \\ 26.5 \\ 22.7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\left(b_{min} < b \cdot 100 \right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diseño final del voladizo 2 barras N°8 + 1 N°7 por lo que se suministra un área de acero de 14.03 cm^2 y el área requerida es de 12.857 cm^2.

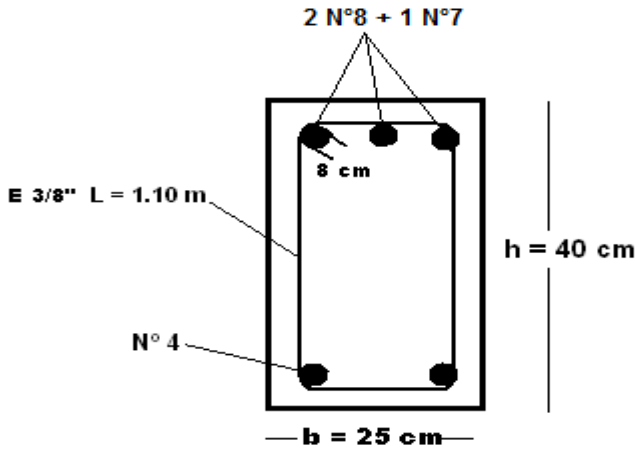
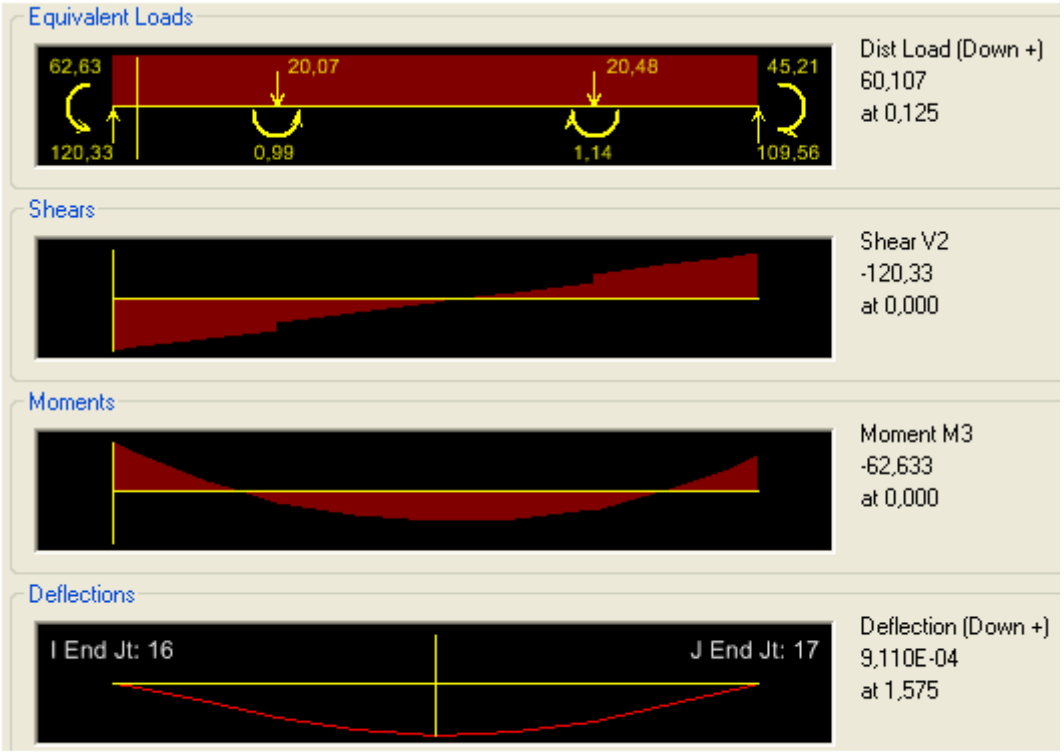


FIGURA 5.5 Sección Transversal Viga Voladizo del Pórtico C

5.2.1.2 Viga C3-C6

Los cálculos del acero requerido se determino con el mismo procedimiento descrito anteriormente. El refuerzo se calculó para tres estaciones diferentes en la viga, cuyas longitudes son especificadas en la figura 5.6. A continuación se presenta los momentos actuantes en cada estación a partir del análisis estructural realizado en ETABS 9.4 de la casa Computer and Structures.



Momento Ultimo Viga C3-C6

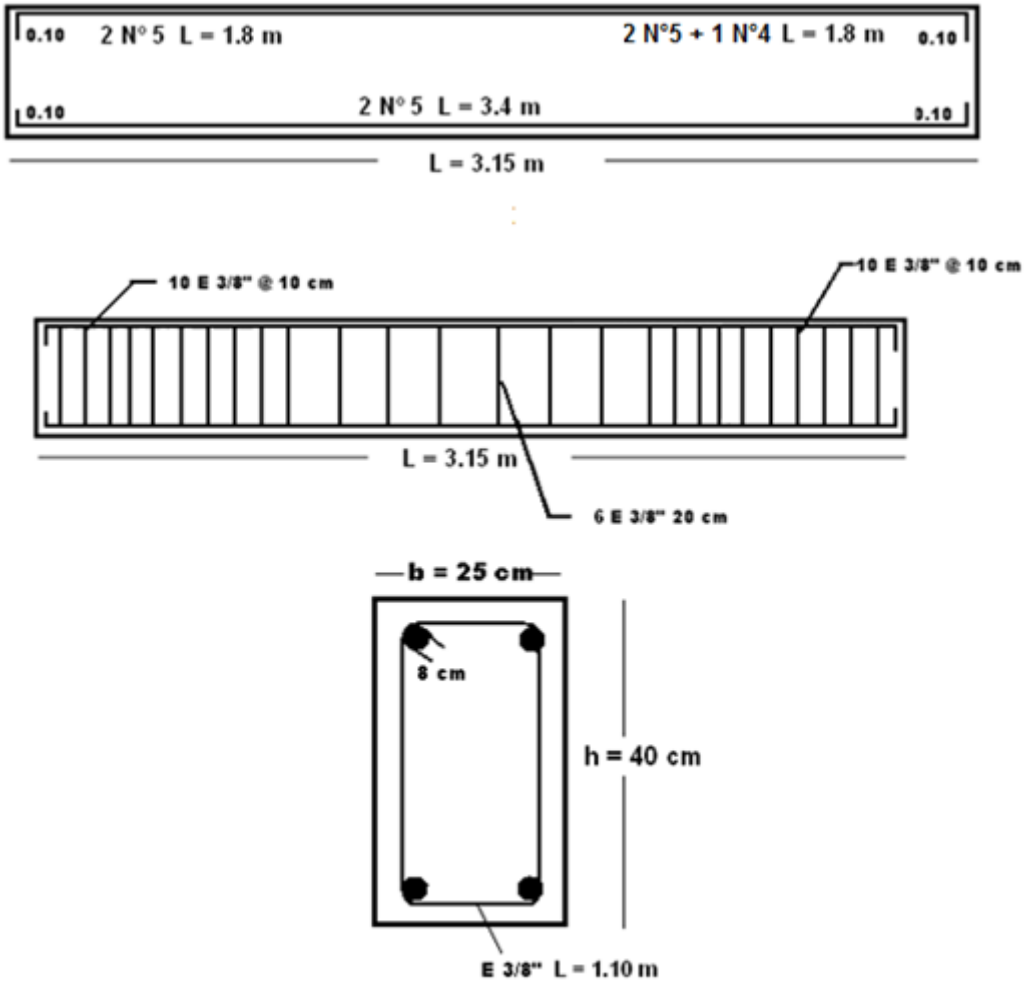


FIGURA 5.6 Refuerzo de la Viga C3-C6

5.2.2 Resultados de Columnas Estructurales a Estudiar

Las columnas fueron rotuladas de acuerdo con el siguiente esquema

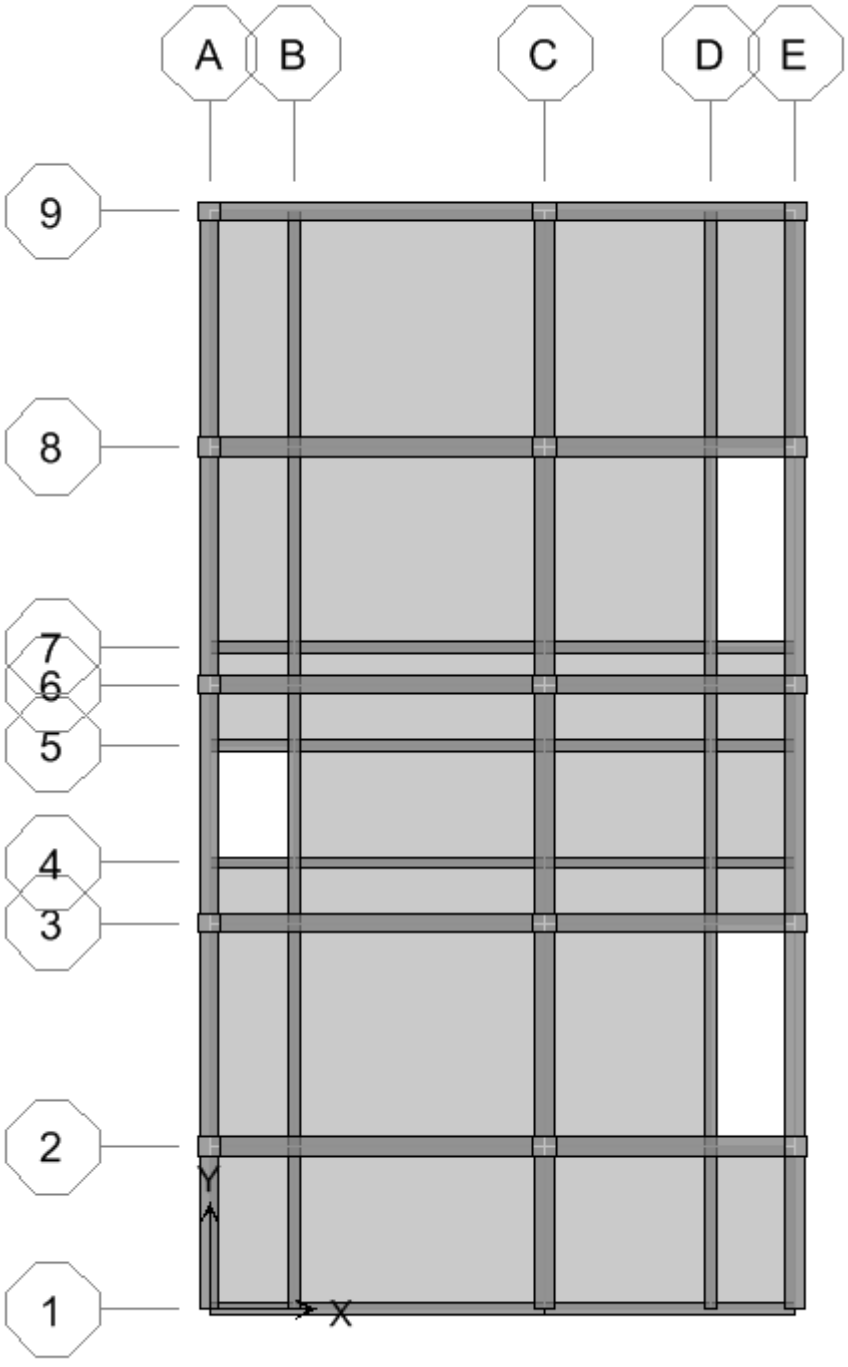


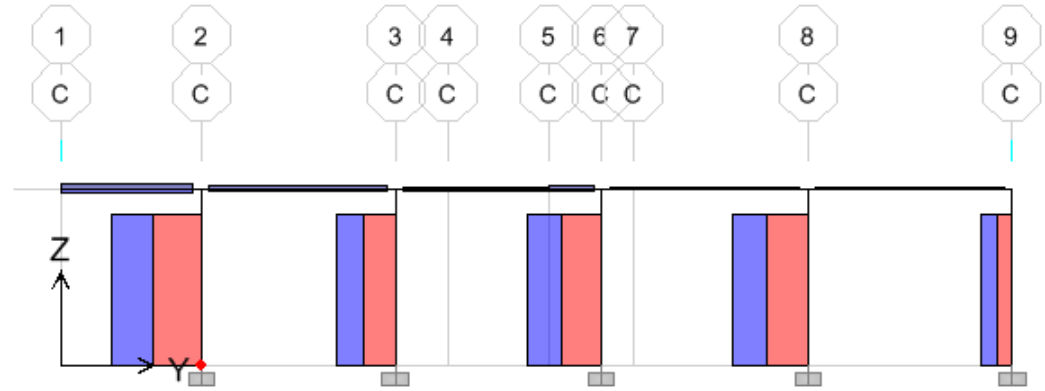
FIGURA 5.7 Esquematización de la Ubicación de las Columnas

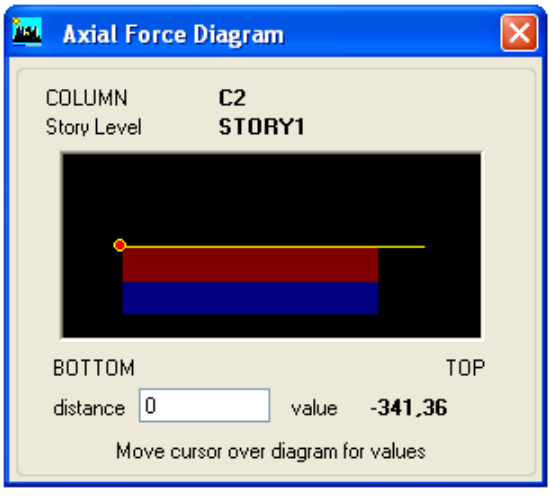
Y a partir del análisis estructural se obtuvieron los siguientes valores para el diseño de las columnas C2, C3, C8 del primer piso:

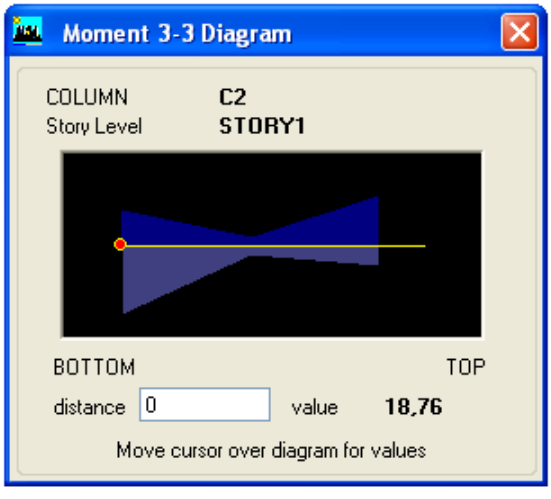
Columna	Carga Axial P_u (KN)	Momento Ultimo M_u (KN-m)
C2	341.36	18.76
C3	220.71	18.43
C8	287	18.71

Tabla 12 Cargas y momento de diseño de las columnas

Como ejemplo de las cargas de diseño para las columnas, se ilustra a continuación los resultados de la columna C2







El diagrama de interacción presentado a continuación de la columna C2 se obtuvo mediante el programa ColumFlex V1.0 de 25X30 con 6 Nº4 con estribos cada

15cm. El punto señalado en la gráfica corresponde a las combinaciones de momento y carga axial de la columna C2, por lo cual se escoge como diseño.

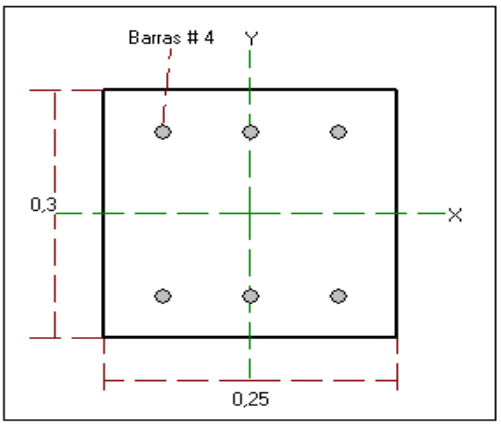
Diseño Columna Uniaxial - Acero en dos caras

Solicitaciones

Mu = 18.76 KN-m
Pu = 341.36 KN
Øc = 0.7
Øt = 0.9
b = 0.25 m
h = 0.30 m
d' = 0.05 m
d = 0,25 m
F'c = 21 MPa
Es = 200000 MPa
Fy = 420 MPa

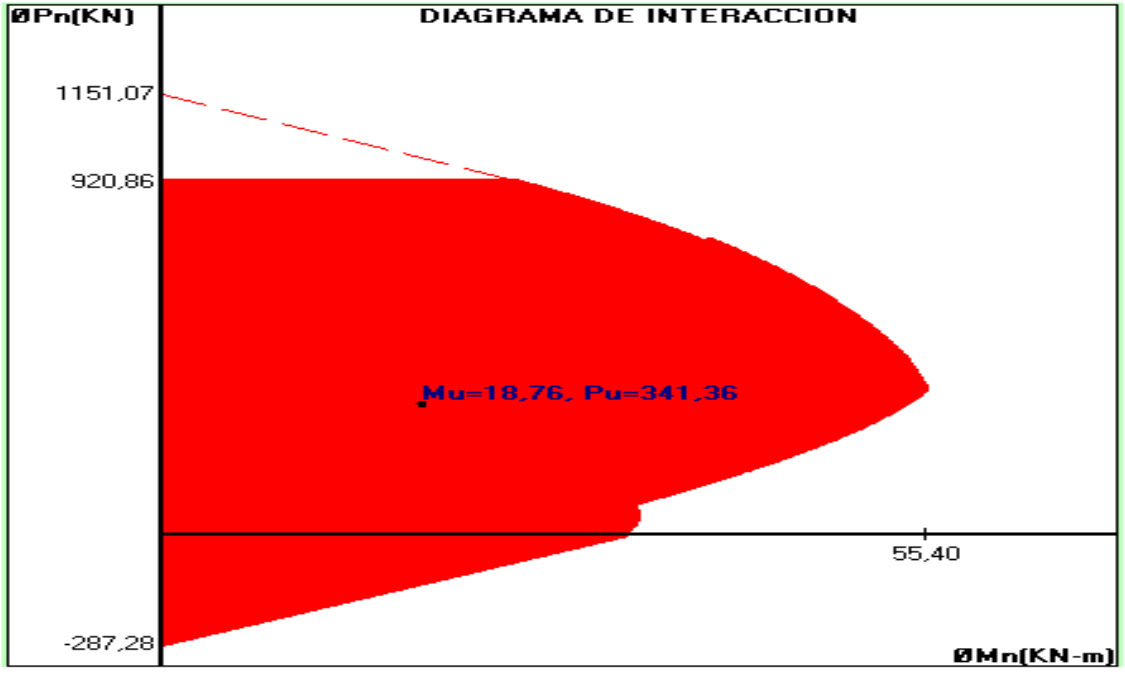
Acero

Cantidad = 6
ρ = 0,01
Ast C = 7,50E-04 m²
Barras # : 4
Ast R = 7,60E-04 m²



Observaciones:

Diseño Satisfactorio
Estribos mínimos: Barras #3, establecidos por la NSR-98(C.7.10.3)
Separación entre barras 6,23E-02m, cumple con la NSR-98(C.7.6.3)
La Cuantía está en el rango establecido por la NSR-98(C.10.9)



Las columnas C3 y C8 tienen como diseño 6 Nº4 con estribos cada 15cm.

6. ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LAS VIGAS Y COLUMNAS ESTRUCTURALES

6.1 CONFIABILIDAD DE VIGAS

Para el análisis de confiabilidad de las vigas se considerara el estado límite de falla a flexión, el cual constituye la posibilidad de falla del elemento.

6.1.1 Falla a Flexión: El momento resistente de una viga de concreto reforzado está determinado por la suma del momento que resiste el área de acero suministrado más el momento resistente por el área a compresión de la sección transversal de la viga. Por lo tanto tenemos la función de estado límite definida como:

$$G\left(A_s, F_y, d, f_c, a, b, M_{actua\ nte}\right) = A_s F_y d + 0.85 f_c a b \left(d - \frac{a}{2}\right) - M_{actuante}$$

De otra manera:

$$G\left(A_s, F_y, d, f_c, b, M_{actuante}\right) = A_s F_y d - 0.59 \frac{\left(A_s F_y\right)^2}{f_c b} - M_{actuante}$$

6.1.2 Confiabilidad Estructural de la Viga Voladizo

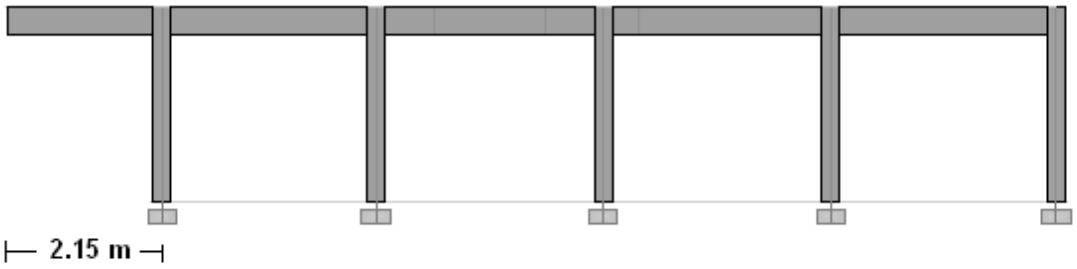


FIGURA 6.1 Visualización de la Viga en Voladizo del Pórtico C

La viga mostrada en la figura 6.1 se encuentra sometida a carga muerta, carga viva y cargas sísmicas en sus nodos, esta tiene una longitud 2.15m que puede ser considerada determinística y su sección transversal es de 25x40 cm. Se requiere determinar el índice de confiabilidad β de Hasofer y Lind.

La tabla presentada a continuación proporciona información sobre las variables del problema:

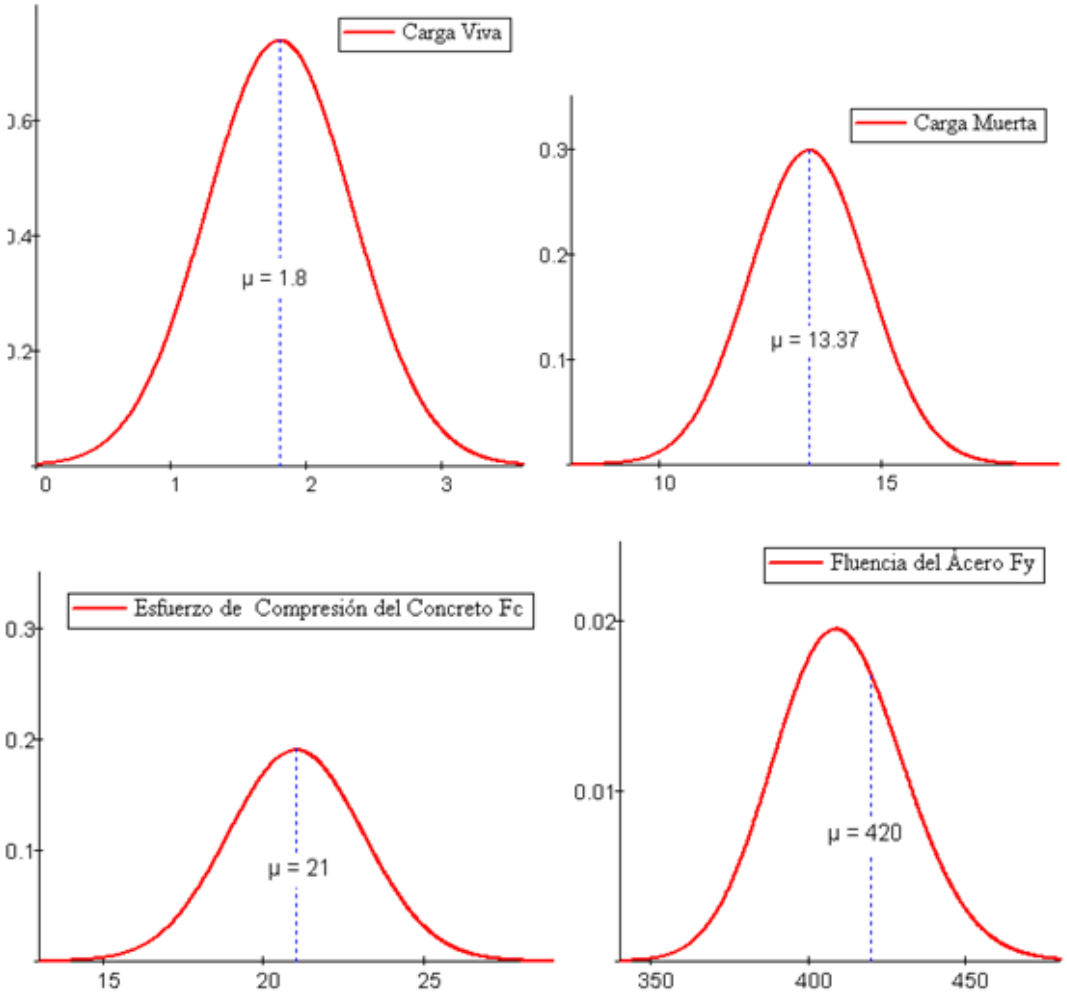
Parámetros	Media μ	Coeficiente de Variación	Distribución
CM	13.37 KN/m^2	10%	Normal
CV	1.8 KN/m^2	30%	Normal
F_c	21000 KN/m^2	10%	Normal
F_y	420000 KN/m^2	8%	LogNormal
H	0.40 m	5%	Normal
B	0.25 m	5%	Normal
A_s	15.24 cm^2	5%	Normal

Tabla 13 Información estadística de las variables para la determinación de la confiabilidad

6.1.2.1 Determinación de la Naturaleza de las Variables: Es presentada como dato del problema. Nótese que las variables relacionadas con el acero y las dimensiones presentan una variación pequeña comparada con las cargas; esto se explica de acuerdo a el control de calidad, cosa que no es posible con las cargas, dado que es complicado modelar las cargas y las predicciones sobre los valores medios de las mismas suelen estar acompañadas de una gran incertidumbre. Para nuestro caso de estudio vamos a suponer que las variables se distribuyen de manera normal excepto la fluencia del acero (F_y) que se distribuirá de manera Log-normal debido a los estudios realizados por la ACI-318 acerca de su variación y se asumirá independencia entre ellas.

Además estos coeficientes de variación se tomaron teniendo en cuenta las postulaciones, escritos y la experiencia en el tema de Mauricio Sanchez y Nowak, A., Collins[20] [21].

A continuación se muestra la variabilidad de los parámetros involucrados en el cálculo de la confiabilidad estructural:



[20] Sánchez, M. (2004). Introducción a la Confiabilidad y la Evaluación de Riesgos: Teoría y Aplicaciones en Ingeniería

[21] Nowak, A., Collins, K. (2000): Reliability of Structures. McGraw Hill International.

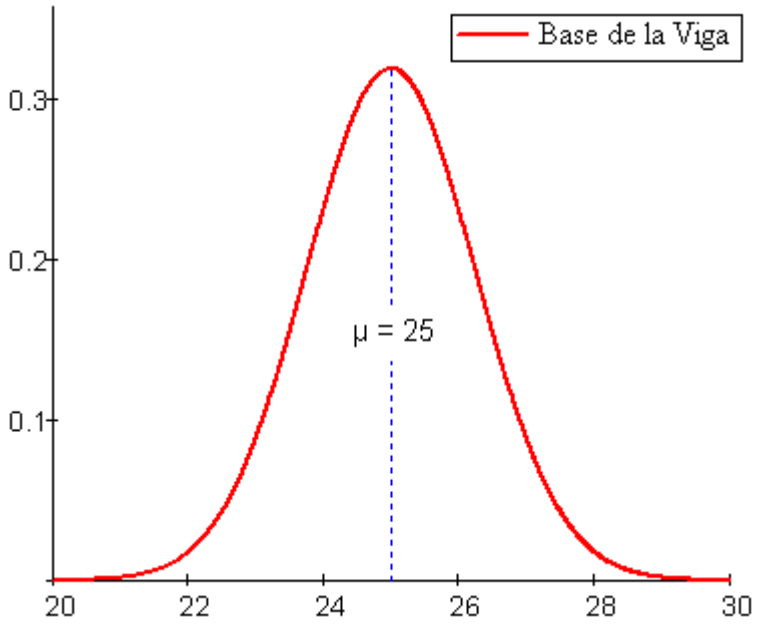


FIGURA 6.2 Variabilidad de los Parametros

6.1.2.2 Selección de la Función de Estado Límite*:* En nuestro estudio solamente vamos a considerar un estado límite y es la falla a flexión. Por lo tanto definimos nuestra función de estado límite como:

$$G\left(A_s, F_y, h, f_c, b, M_{actuante}\right) = A_s F_y (h - 0.05) - 0.59\frac{\left(A_s F_y\right)^2}{f_c b} - M_{actuante}$$

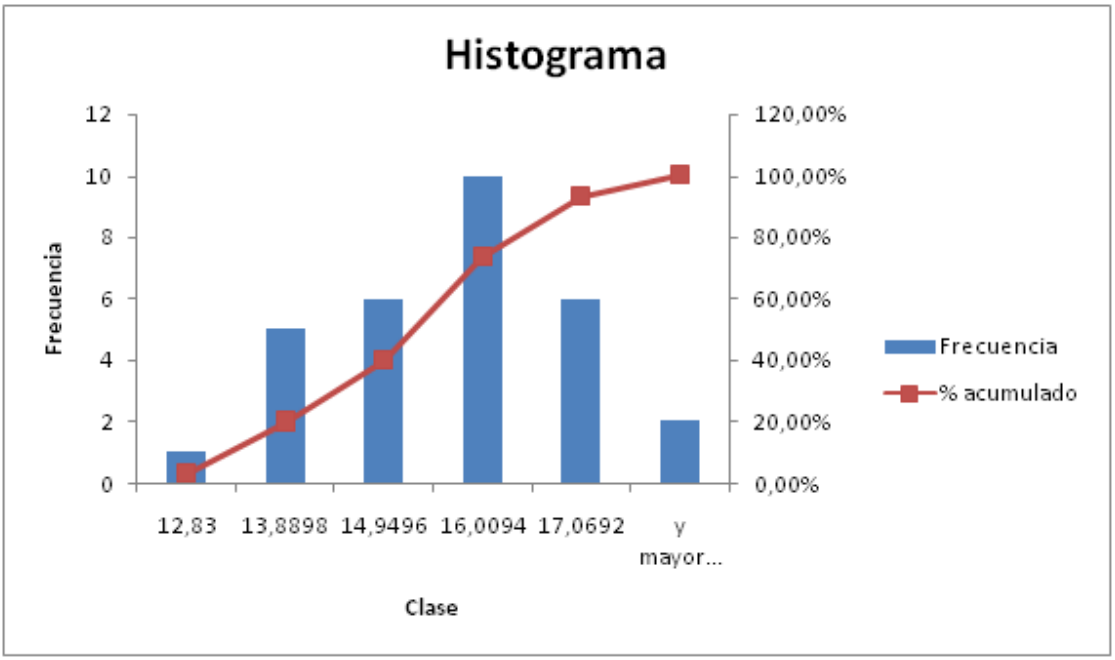
En lo concerniente al momento actuante la ecuación que lo rige no se puede determinar de forma explícita, ya que la viga hace parte de un sistema estructural lo cual conllevo a realizar un estudio de regresión multilineal que nos permitiera obtener una expresión en función de las cargas actuantes sobre la estructura, utilizando para la variación de las cargas la técnica de muestreo *Latin HyperCube Sampling* y con ayuda del programa ETAB 9.4 de la casa Computer and Structures para cada combinación de carga de servicio se obtuvieron los momentos respectivos.

MOMENTOS DE SERVICIO (KN/m)						
CARGAS DE SERVICIO			VIGA EN VOLADIZO	VIGA C3-C6		
CARGA VIVA	CARGA MUERTA	SERVICIO	Y-Y (-)	EXTREMO IZQUIERDO Y-Y (-)	CENTRO Y-Y (+)	EXTREMO DERECHO Y-Y (-)
2,223	11,171	13,394	86,53	27,8	22	38,52
1,823	14,963	16,786	108,44	34,34	27,1	48,28
1,542	12,732	14,274	92,22	29,63	23,1	41,05
0,651	13,538	14,189	91,67	29,45	22,7	40,81
2,008	12,163	14,171	91,55	29,42	23,2	40,76
1,868	13,426	15,294	98,81	31,75	25,2	44
2,688	13,202	15,890	102,66	33	25,8	45,7
1,732	13,314	15,046	97,22	31,23	24,5	43,23
2,360	10,525	12,885	83,25	26,75	21,3	37,06
1,313	14,577	15,890	102,66	32,98	26,2	45,7
1,491	11,521	13,012	84,06	27,01	21,3	37,42
1,960	14,272	16,232	104,87	33,7	26,7	46,68
1,377	13,885	15,262	98,6	31,7	25,08	43,89
1,156	14,008	15,164	97,97	31,48	24,9	43,61
1,436	12,322	13,758	88,88	28,56	22,61	39,57
1,914	16,215	18,129	117,2	37,63	29,7	52,14
2,058	13,767	15,825	102,24	32,84	26	45,51
1,053	11,777	12,830	82,89	26,63	21,05	36,9
2,109	13,651	15,760	101,82	32,72	25,86	45,33
2,949	13,089	16,038	103,62	33,29	26,4	46,12
1,240	12,973	14,213	91,82	29,5	23,4	40,88
2,444	11,984	14,428	93,21	29,95	23,71	41,49
2,164	14,418	16,582	107,13	34,48	27,3	47,69
1,686	15,219	16,905	109,21	35,09	27,84	48,62
1,640	14,756	16,396	105,93	34,04	27	47,15
1,592	14,136	15,728	101,61	32,65	25,8	45,23
1,777	12,604	14,381	92,91	29,85	23,63	41,35
2,287	15,569	17,856	115,36	37,07	29,3	51,35
2,547	12,855	15,402	99,51	31,97	25,3	44,3
0,912	12,468	13,380	86,44	27,77	22	38,48

Tabla 14 Momentos de servicio para las vigas: en voladizo y C3-C6 para distintas combinaciones de carga muerta y carga viva

Antes de realizar el análisis para cada combinación se chequeo que el vector de cargas de servicio fuera representativo, para el cual se utilizo el histograma de frecuencia de los 30 valores escogidos y su respectiva probabilidad acumulada.

Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
12,83	1	3,33%
13,8898	5	20,00%
14,9496	6	40,00%
16,0094	10	73,33%
17,0692	6	93,33%
y mayor...	2	100,00%



En este caso las cargas que se tuvieron en cuenta para la regresión multilineal fueron carga muerta (CM) y carga viva (CV) dando como resultado:

ANÁLISIS DE VARIANZA I				
	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*
Regresión	2	290590,1547	679093135,4	1,0677E-104
Residuos	28	0,005990728		
Total	30	290590,1607		

ANÁLISIS DE VARIANZA II					
	Coeficientes	*Estadístico t*	*Probabilidad*	*Inferior 95%*	*Superior 95%*
Intercepción	0				
CV	6,460289822	1367,077	4,2894E-69	6,45060	6,4699698
CM	6,460855262	9790,225	4,9260E-93	6,45950	6,4622070

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0,99999999
Coeficiente de determinación R^2	0,999999979
R^2 ajustado	0,964285693
Error típico	0,014627186
Observaciones	30

$$M_{actuante} = 6.460289822\ CV + 6.460855262\ CM$$

El coeficiente de regresión R^2 = 0.966, el valor critico F es de 1.0677E-104, el estadístico t 1367.08 y 9790.23 para la carga viva y carga muerta respectivamente.

Por lo tanto, observando las medidas estadísticas se puede concluir:

- El R^2 ajustado del modelo explica un porcentaje del 96.4% del error, es decir, que para propósitos de predicción este valor de R^2 es apropiado para el modelo en cuestión.
- Dado que el estadístico f es alto, el modelo es relevante para explicar en forma global la variable del momento.

- Dado que los estadísticos t de las variables carga muerta y carga viva son significativamente mayores a tres (3) esto implica una probabilidad del 99.9999% de que los coeficientes calculados para la ecuación del momento sean confiables para explicar el modelo.

En conclusión, el modelo propuesto es apropiado para explicar el comportamiento a partir de la carga viva y la carga muerta.

Entonces la función de estado límite es

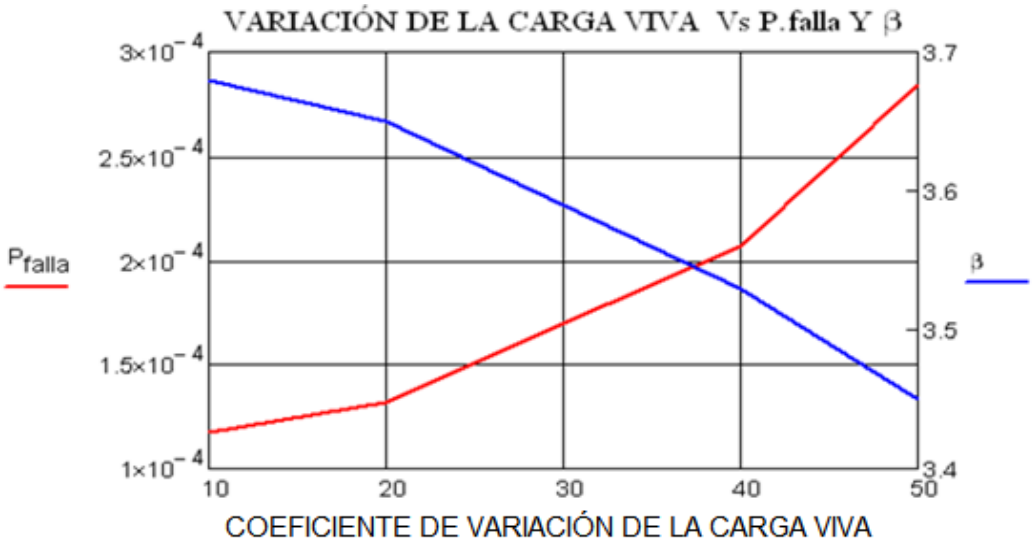
$$G(A_s, F_y, h, f_c, b, CV, CM) = A_s F_y (h - 0.05) - 0.59 \frac{(A_s F_y)^2}{f_c b} - 6.460289822\ CV - 6.460855262\ CM$$

6.1.2.3 Cálculo de la Probabilidad de Falla y Índice de Confiabilidad β: Para el cálculo de la probabilidad de falla se empleó el método de simulación de Monte Carlo y la técnica de reducción de varianza Latin HyperCube Sampling y se obtuvo una $P_{falla} = 1.70x10^{-4}$; para el *Cálculo de β* se empleó la expresión $\beta = -\Phi^{-1}(\mathrm{P_f})$ dando como resultado $\beta = 3.59$

6.1.2.4 Análisis de Sensibilidad: Vale la pena analizar lo que pasa cuando el coeficiente de variación de la carga viva se incrementa o disminuye en intervalos de 10% y el resto de parámetros se mantienen constantes:

Coeficiente Variación	B	P_{falla} (10^{-4})
10%	3.68	1.175
20%	3.65	1.32
30%	3.59	1.70
40%	3.53	2.07
50%	3.45	2.84

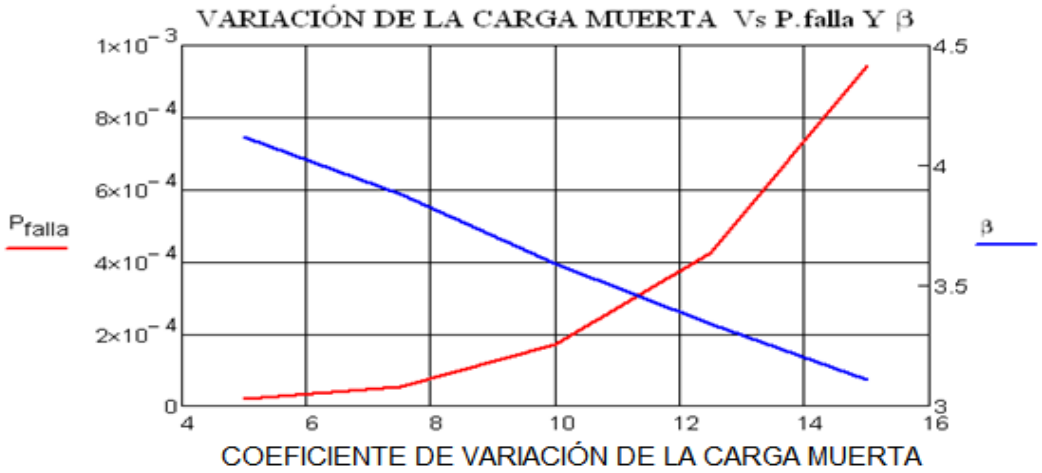
Tabla 15 Analisis de sensibilidad de la carga viva viga voladizo



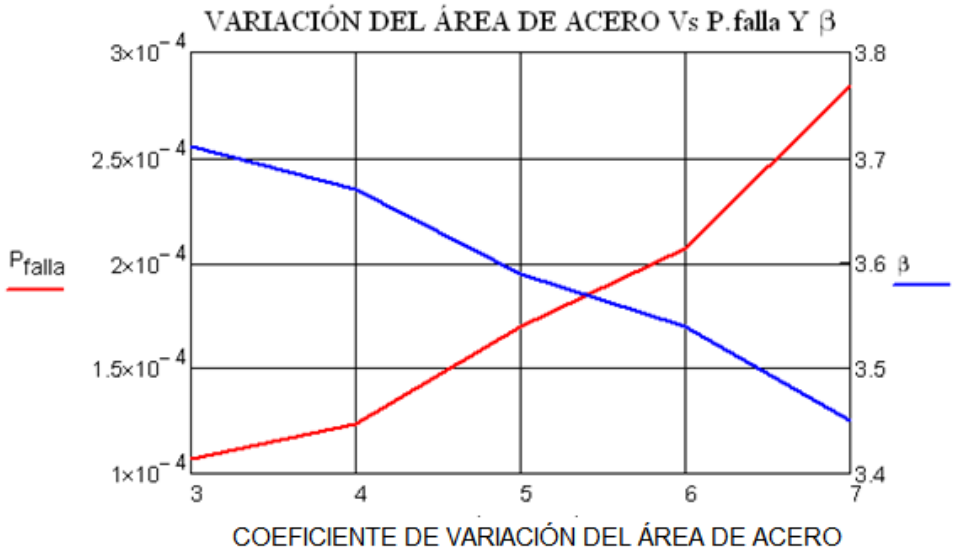
Es interesante ver lo que ocurre si el coeficiente de variación de la carga muerta se incrementa o disminuye y el resto de parámetros se mantienen constantes:

Coeficiente Variación	B	P_{falla} (10^{-5})
5%	4.12	1.95
7.5%	3.88	5.35
10%	3.59	17.0
12.5%	3.34	42.45
15%	3.11	94.15

Tabla 16 Analisis de sensibilidad de la carga muerta viga voladizo



Otro dato de interés es la forma en la cual varía la probabilidad de falla y el índice de confiabilidad β de acuerdo a la variación del área de acero suministrado. En la siguiente gráfica se muestra una variación entre un rango del 3% al 7% del área suministrada:



A partir de este análisis de sensibilidad de las variables carga viva, carga muerta y área de acero para la viga en voladizo, se puede observar que la variable de más peso en el resultado del índice de confiabilidad β y la probabilidad de falla es la carga muerta, a pesar de que su coeficiente de variación es menor al de la carga viva; pero en magnitud es significativamente mayor.

En lo referente al área de acero influye de manera similar a la carga viva, pero si comparamos los coeficientes de variación se tiene una relación promedio entre 4 y 10 veces entre estos. Por tal razón el área de acero es una variable de peso en el resultado del índice de confiabilidad β como en la resistencia de la viga a flexión. De acuerdo a esto, posteriormente se hace un análisis de sensibilidad entre el área de acero suministrado y el área de acero requerido para las vigas a la cual se le está estudiando la confiabilidad estructural teniendo en cuenta el diseño que se obtiene por la NSR-98 y el nuevo código colombiano de diseño NSR-09 el cual está en periodo de revisión.

6.1.3 CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE LA VIGA C3-C6

Los cálculos de la probabilidad de falla y el índice de confiabilidad β se determino con el mismo procedimiento descrito para la viga en voladizo y con la información de las variables de la tabla 13. La confiabilidad se realizo para los tres momentos críticos (Extremo izquierdo (1), Centro (2), Extremo derecho (3)) en la viga.

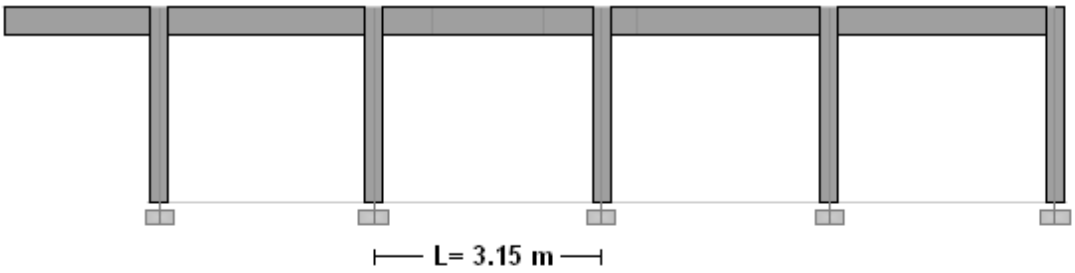


FIGURA 6.3 Visualización de la Viga C3-C6

A continuación se muestran los resultados:

	SECCION DE LA VIGA C3-C6		
	Extremo Izquierdo	Centro	Extremo Derecho
R^2 Ajustado	0.9642	0.9642	0.9643
Estadístico f	1677244.54	328742	35631144.5
Valor Critico de f	$1.68x10^{-69}$	$6.049x10^{-60}$	$6.46x10^{-101}$
Estadístico t CV	68.37	31.38	990.28
Estadístico t CM	486.14	214.16	7091.55
Coeficiente de CV	2.08782181	1.70947798	2.87576549
Coeficiente de CM	2.07303707	1.62970454	2.87591299

Tabla 17 Análisis estadístico del momento para la viga C3-C6

A partir de estos resultados estadísticos obtenidos se puede concluir que los coeficientes calculados son apropiados para modelar la variable del momento actuante en cada sección con respecto a la variabilidad de los parámetros carga viva y carga muerta.

A continuación se muestra la ecuación de estado límite de cada una de las secciones de la viga C3-C6 analizada y su respectiva confiabilidad estructural:

Sección	Ecuación de Estado Límite	B	P_f (10^{-4})
1	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, CV, CM) = A_s F_y (h - 0.05) - 0.59\frac{(A_s F_y)^2}{f_c b} - 2.08782181\ CV - 2.07303707\ CM$	3.75	0.94
2	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, CV, CM) = A_s F_y (h - 0.05) - 0.59\frac{(A_s F_y)^2}{f_c b} - 1.70947798\ CV - 1.62970454\ CM$	-----	0
3	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, CV, CM) = A_s F_y (h - 0.05) - 0.59\frac{(A_s F_y)^2}{f_c b} - 2.87576549\ CV - 2.87591299\ CM$	3.25	5.87

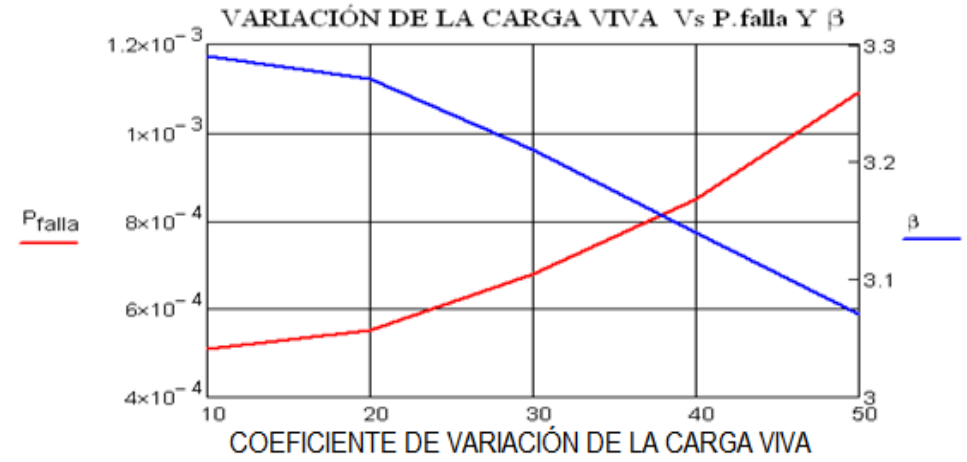
Tabla 18 Confiabilidad estructural Viga C3-C6

Considerando independencia en los posibles casos de falla de la viga C3-C6, de acuerdo a la estadística la probabilidad de falla es la suma de las probabilidades de falla de cada sección, entonces:

$$P_{falla} = P_1 + P_2 + P_3 \rightarrow P_{falla} = 6.790x10^{-4}$$

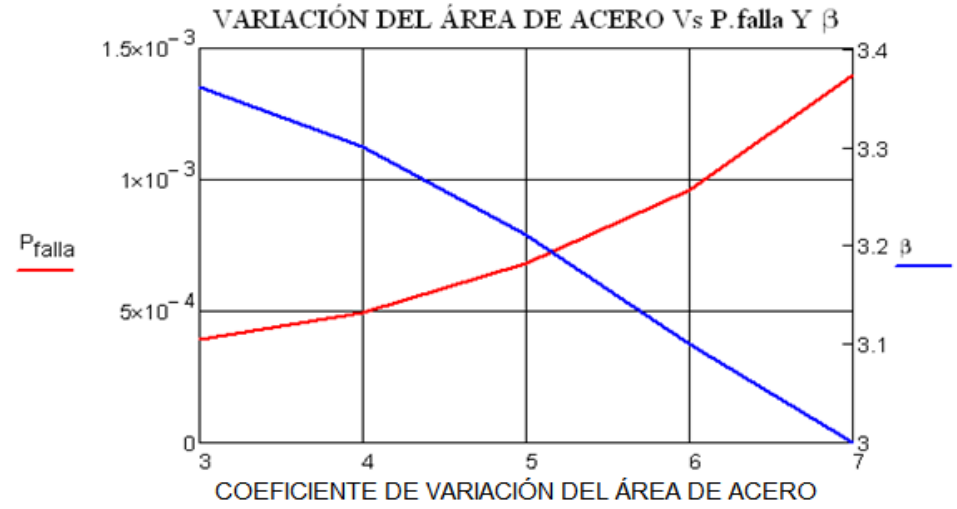
Obteniéndose como resultado un índice de confiabilidad para la viga C3-C6 de $\beta = 3.21$

6.1.3.1 Análisis de Sensibilidad: Las siguientes graficas muestran los diferentes índices de confiabilidad β y probabilidades de falla de la viga C3-C6, el cual se hace variando un parámetro y dejando el resto de parámetros constantes:



COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE LA CARGA VIVA

COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE LA CARGA MUERTA



COEFICIENTE DE VARIACIÓN DEL ÁREA DE ACERO

De acuerdo a este análisis de sensibilidad de las variables carga viva, carga muerta y área de acero para la viga C3-C6, se puede afirmar que el comportamiento de la confiabilidad estructural es similar al de la viga en voladizo.

6.1.4 ANALISIS DE SENSIBILIDAD ENTRE AREA DE ACERO SUMINISTRADA Y AREA DE ACERO REQUERIDA PARA VIGAS ESTRUCTURALES DISEÑADAS POR LA NSR-98

Para llevar este análisis se partió de la idea de que los diseños dependen en gran parte de los criterios del diseñador y dado que el área de acero suministrada casi nunca es posible que sea igual al área de acero requerida debido a que esta es proporcionada en barras de áreas estándares. Por tal motivo se diseñaron las vigas estudiadas de varias maneras y se les calculo el índice de confiabilidad β. Además se determino para cada diseño el exceso en porcentaje del área de acero suministrada (A_{Sum}) con respecto al área de acero requerida (A_{Req}).
Obteniéndose:

Diseño	Viga (25x40)cm	Momento Ultimo (KN-m)	Acero Req (cm^2)	Numero De Barras	Acero Sum (cm^2)	% Exceso	β
1	Voladizo	140.69	12.80	3 N°8	15.24	19.1	4.04
2	Voladizo	140.69	12.80	2 N°8 + 1N°7	14.03	9.6	3.59
3	C3-C6	62.63	5.08	3 N°5	6.0	18.1	4.24
4	C3-C6	62.63	5.08	2 N°5 + 1N°4	5.23	3.0	3.25
5	C3-C6	45.21	3.591	2 N°5	3.98	10.8	3.75

Tabla 19.1 Análisis de sensibilidad entre área de acero suministrada y área de acero requerida NSR-98

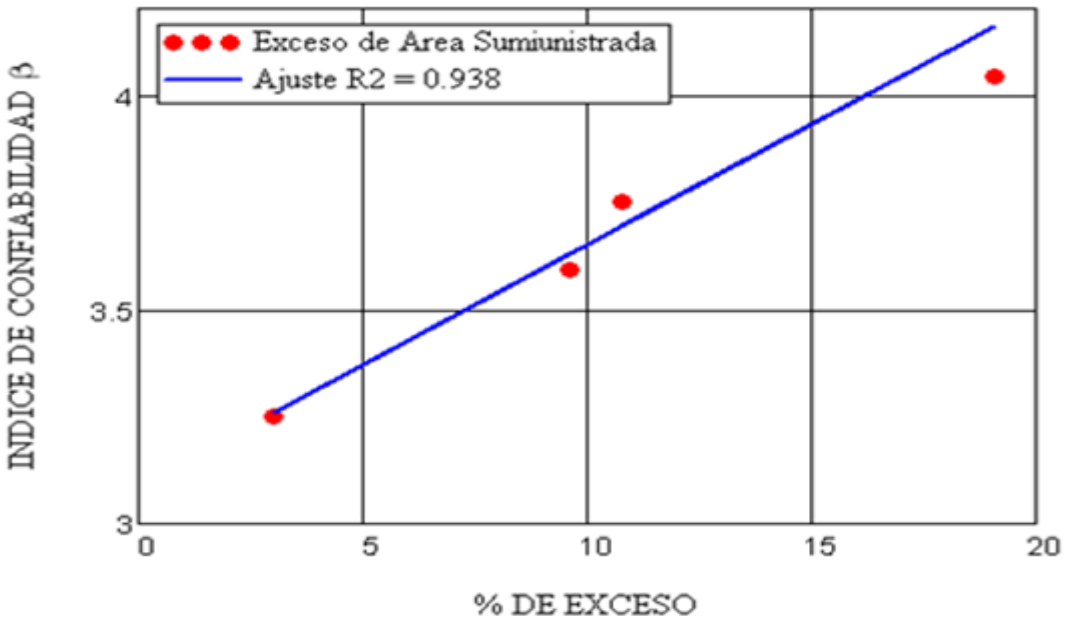


FIGURA 6.4 Analisis de Sensibilidad Asum/Areq NSR-98

Con los resultados de % de exceso y el índice de confiabilidad β se construyo la grafica (Figura 6.4) y se determino la curva que más se ajustara a los datos dando como resultado:

Ecuación de la regresión $\beta = 3.09 + 0.056\, x\, \%Exceso$

El intercepto de la regresión indica el índice de confiabilidad objetivo mínimo que la norma sismo resistente NSR-98 busca en los diseños que se generan con sus especificaciones sea aproximadamente de 3.0 y que equivaldría a que el área de acero suministrada sea igual al área de acero requerida por el diseño, es decir, un porcentaje de exceso del 0 %.

6.1.5 ANALISIS DE SENSIBILIDAD ENTRE AREA DE ACERO SUMINISTRADA Y AREA DE ACERO REQUERIDA PARA VIGAS ESTRUCTURALES DISEÑADAS POR LA NSR-09

Para llevar este análisis se tuvo en cuenta lo que especifica la nueva norma de diseño sismo-resistente NSR-09. Por ejemplo la combinación de cargas estática en este nuevo documento es 1.2 Carga muerta + 1.6 carga Viva. Además se tuvo

en cuenta las consideraciones que se establecieron para el análisis de sensibilidad por la metodología de diseño NSR-98.

Obteniéndose:

Diseño	Viga (25x40)cm	Momento Ultimo (KN-m)	Acero Req (cm^2)	Numero De Barras	Acero Sum (cm^2)	% Exceso	β
1	Voladizo	122.26	10.81	3 N°7	11.61	7.4	2.51
2	C3-C6	54.42	4.37	2 N°5 + 1N°4	5.23	19.7	3.25
3	C3-C6	54.42	3.37	4 N°4	5.08	16.2	3.06
4	C3-C6	39.28	3.098	2 N°5	3.96	27.8	3.74
5	C3-C6	39.28	3.098	3 N°4	3.81	23	3.44

Tabla 19.2 Análisis de sensibilidad entre área de acero suministrada y área de acero requerida NSR-09

Con los resultados de % de exceso y índice de confiabilidad β se construyo una grafica y se determino la curva que más se ajustara a los datos dando como resultado:

Ecuación de la regresión $\beta = 2.073 + 0.06\, x\, \%Exceso$

El intercepto de la regresión indica el índice de confiabilidad objetivo mínimo que la norma sismo resistente NSR-09 busca en los diseños que se generan con sus especificaciones sea aproximadamente de 2.0 y que equivaldría a que el área de acero suministrada sea igual al área de acero requerida por el diseño, es decir, un porcentaje de exceso del 0 %.

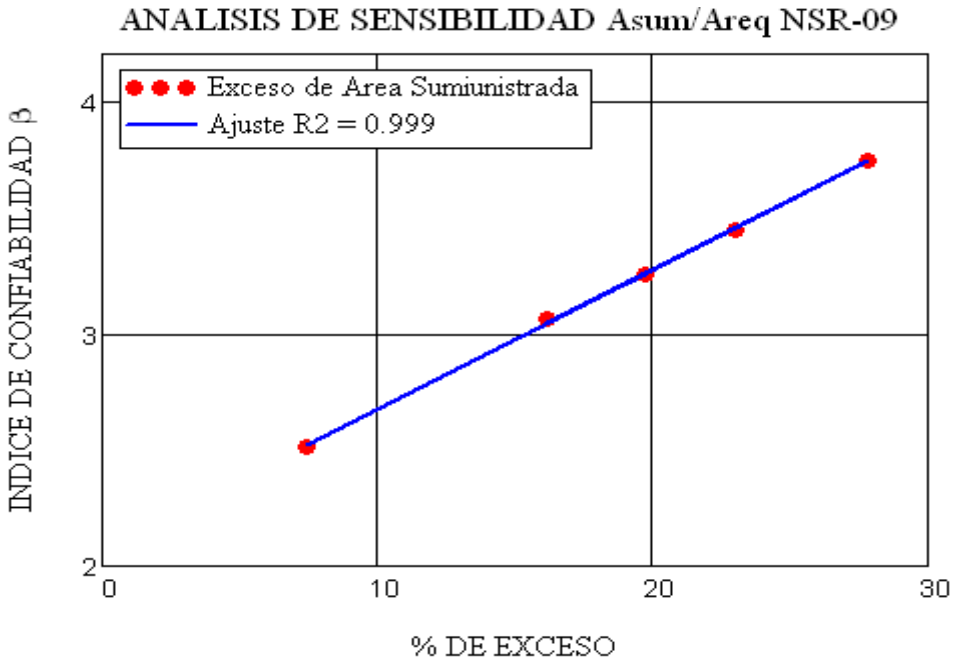
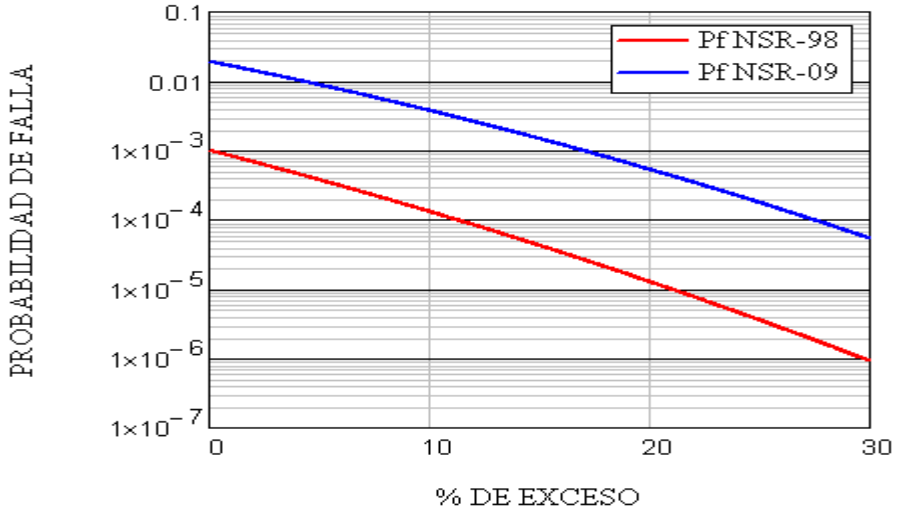


FIGURA 6.5 Analisis de Sensibilidad Asum/Areq NSR-09

En términos de probabilidad de falla tenemos:



De acuerdo a esto los códigos de diseño NSR-98 y NSR-09 presentan el siguiente rango de confiabilidad estructural

NSR-98 **NSR-09**

$$\binom{3}{4} = \binom{1.35x\ 10^{-3}}{3.167x\ 10^{-5}} \qquad \binom{2}{3.5} = \binom{2.275x\ 10^{-2}}{2.326x\ 10^{-4}}$$

El código de Diseño Sismo Resistente NSR-98 permite probabilidades de falla del orden de $1.35x10^{-3}$ hasta $1.67x10^{-5}$, mientras que el nuevo código de diseño NSR-09 presenta probabilidades de falla del orden de $2.27x10^{-2}$ hasta $2.326x10^{-4}$ para vigas estructurales.

El índice de confiabilidad β es inversamente proporcional al factor que modifica la resistencia y proporcional a los factores de mayoración de las cargas. Esto se ve evidenciado en los factores de carga muerta y carga viva del nuevo código NSR-09 en donde se especifican valores de 1.2 y 1.6 respectivamente a diferencia del código NSR-98 que trabaja con factores de 1.4 y 1.7

6.2 CONFIABILIDAD DE COLUMNAS UNIAXIALES

Las columnas están definidas por la NSR-98 Sec. C.2.l como elementos estructurales cuya solicitación principal es la carga axial de compresión, acompañada o no de momentos flectores, torsión o tensiones cortantes con una relación de longitud a su menor dimensión de la sección de 3 o más.
Las columnas sometidas a carga axial pura no existen. En estructuras aporticadas las vigas de piso y las columnas son fundidas monolíticamente y esta situación produce algunos momentos en los extremos restringidos de las columnas[22].
Para el análisis de confiabilidad de las columnas uniaxiales se considerara el estado límite de falla por la combinación de esfuerzos entre la carga axial y el momento aplicado, el cual constituye la posibilidad de falla del elemento.

6.2.1 Falla a Flexión Uniaxial: La condición general de carga de una columna está representada por un momento flexionante Mu, y por una carga axial Pu trasmitidas por la placa o por las vigas de piso. En el cual el sistema de cargas

[22] Roberto Rochel Awad. Hormigon Reforzado. Segunda Parte.Pag.101

puede transformarse colocando la carga axial, P_u con una excentricidad "e" tal que Muy = Pu * e. En el caso de flexión uniaxial el eje neutro permanece paralelo a una de las caras de la columna.

De acuerdo a la teoría de Hormigón Reforzado la capacidad de una columna para soportar carga externa está representada por las siguientes expresiones. Puede simplificarse el cálculo si se emplea armadura simétrica, As = A'.

$$P_u = \phi 0.85 f_c ab + \phi A_s' f_{scompresi\grave{o}n} - \phi A_s f_{stensi\grave{o}n}$$

$$M_u = \phi 0.85 f_c ab \left(d - \frac{a}{2}\right) + \phi A_s' f_{scompresi\grave{o}n} (d - d')$$

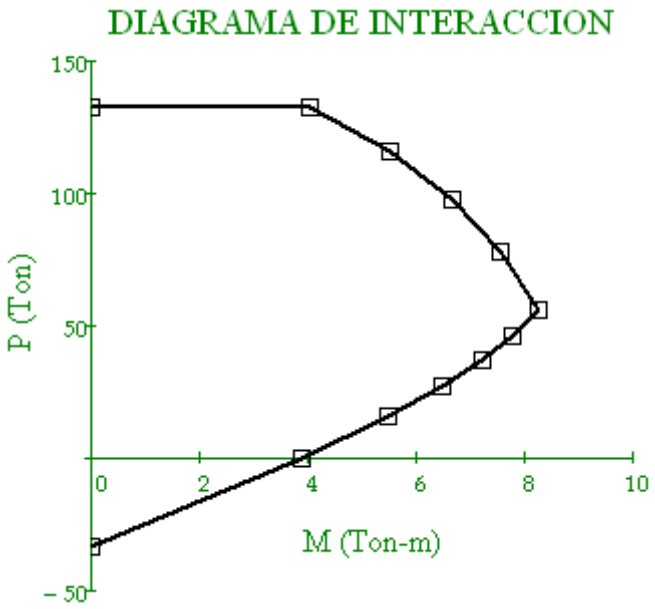
Conocidos los valores de las solicitaciones externas Pu y Mu, la columna puede diseñarse a partir de estas expresiones; pero el proceso de resolver estas ecuaciones es muy laborioso por lo que tradicionalmente se ha recurrido a la elaboración de tablas y gráficos que permiten un análisis más rápido y sencillo llamados *Diagramas de Interacción*.

En el proceso de diseño se conocen previamente las dimensiones y materiales de la columna pues inicialmente ha sido necesario realizar un análisis de estabilidad y de control de derivas para cargas horizontales y verticales, solo cuando este ha satisfecho las condiciones generales de estabilidad se obtienen las acciones sobre los elementos y se procede al diseño[23].

A continuación se presentan los pasos que se tuvieron en cuenta para determinar la confiabilidad a la flexión uniaxial:

- ✓ Se realizo el diagrama de interacción para la columna de dimensiones y materiales conocidos, sin utilizar factores de resistencia.

[23] Roberto Rochel Awad. Hormigon Reforzado. Segunda Parte.Pag.110



- ✓ Se determino la ecuación que rige al momento de servicio en función de la carga viva, carga muerta y la aceleración sísmica.
- ✓ Se determino la ecuación que rige a la carga axial de servicio en función de la carga viva, carga muerta y la aceleración sísmica.
- ✓ Para determinar el número de veces que falla la columna se realizo un diagrama de flujo (MathCad) en el cual determinara cuando la coordenada (M, P) se encontraba fuera del área que encierra el diagrama de interacción que es la situación que produce la falla.
- ✓ Por último se determino la confiabilidad estructural para cargas de servicio.

6.2.2 Confiabilidad Estructural de las Columnas

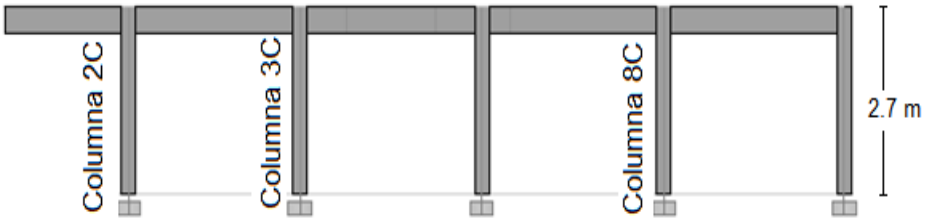


FIGURA 6.6 Visualización de las Columnas Estudiadas del Pórtico C

Las columnas mostradas en la figura 6.6 se encuentra sometida a carga muerta, carga viva y cargas sísmicas en sus nodos, estas tienen una longitud 2.70 m que puede ser considerada determinística y su sección transversal es de 25x30 cm. Se requiere determinar el índice de confiabilidad β de Hasofer y Lind. La tabla 20 proporciona información sobre las variables del problema.

6.2.3 Determinación de la Naturaleza de las Variables: Es presentada como dato del problema. Además de lo explicado en el capitulo 6.1.2.1 en lo relacionado a la variabilidad de las cargas, dimensiones y áreas de acero; lo único adicional en el caso de columnas es la variable de la aceleración sísmica.

Para determinar la densidad de probabilidad de la aceleración sísmica se utilizo una distribución extrema tipo II que es útil para modelar la máxima carga sísmica sobre estructuras.

Parámetros	Media μ	Coeficiente de Variación	Distribución
CM	13.37 KN/m^2	10%	Normal
CV	1.8 KN/m^2	30%	Normal
F_c	21000 KN/m^2	10%	Normal
F_y	420000 KN/m^2	8%	LogNormal
H	0.30 m	5%	Normal

B	0.25 m	5%	Normal
$A_{sTension}$	3.81 cm^2	5%	Normal
$A_{sCompresion}$	3.81 cm^2	5%	Normal
$A_{Sísmica}$	0.156 gravedad	167%	Extrema II

Tabla 20 Información estadística de las variables para la determinación de la confiabilidad

Las expresiones de *f(x)*, *F(x)*, μ_X y σ_X para la distribución extrema tipo II son:

$$f_{(x)} = \frac{k}{u}\left(\frac{u}{x}\right)\left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} e^{-(u/x)^k} \qquad F_{(x)} = e^{-(u/x)^k}$$

$$\mu_x = u\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad k>1 \qquad {\sigma_x}^2 = u^2\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] \quad k>2$$

La media y el coeficiente de variación de la aceleración sísmica se tomaron teniendo en cuenta las postulaciones, escritos y la experiencia en el tema de Hasofer A., Rackwitz R y Nowak, A., Collins[24] [25] en estudios realizados para la ciudad de California que se encuentra en una zona de amenaza sísmica intermedia.

Debido a que en Colombia no existen estudios acerca del tema, estos parámetros fueron adoptados para el estudio, debido a que Sincelejo de acuerdo con el mapa de amenaza sísmica de la NSR-98 se encuentra en zona Intermedia.

A partir de las anteriores expresiones se calcularon los parámetros *k* y *u.* Los cuales nos permitieron hallar la ecuación de la distribución de probabilidad, la ecuación de la distribución de probabilidad acumulada y su respectiva inversa.

Dando como resultado:

$$f_{(x)} = \frac{2.211}{0.096}\left(\frac{0.096}{x}\right)\left(\frac{u}{x}\right)^{3.211} e^{-(0.096/x)^{2.211}}$$

[24] Hasofer A., Rackwitz R. (2000): Time-dependant models for code optimization.
[25] Nowak, A., Collins, K. (2000): Reliability of Structures. McGraw Hill International.

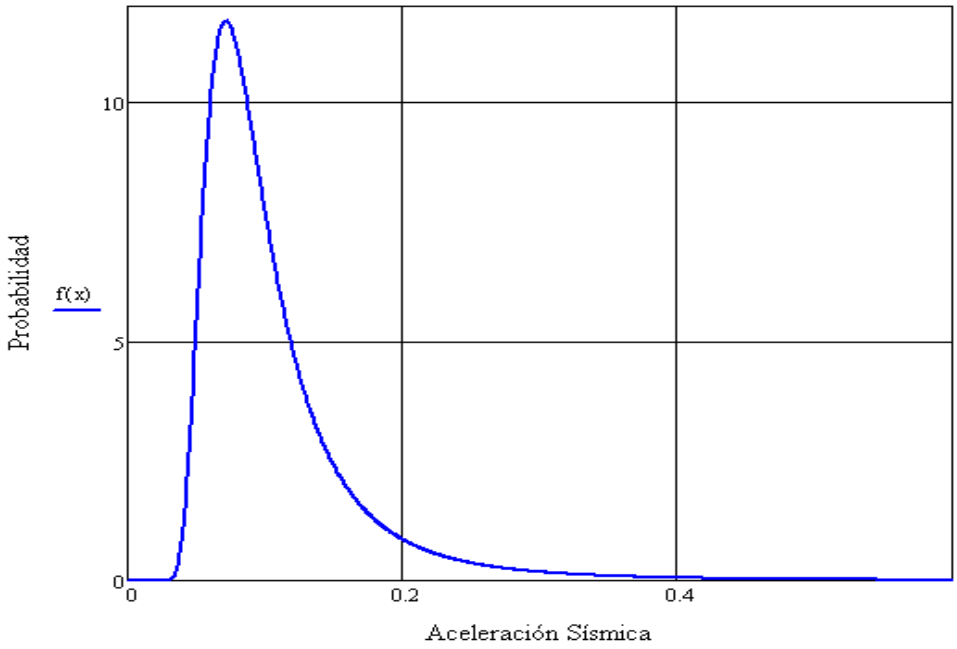


FIGURA 6.7 Densidad de Probabilidad de la Aceleración Sísmica

$$F_{(x)} = e^{-\left(0.096/x\right)^{2.211}} \quad entonces\ la\ inversa \rightarrow x = \frac{0.096}{\left[-ln\left[F_{(x)}\right]\right]^{1/2.211}}$$

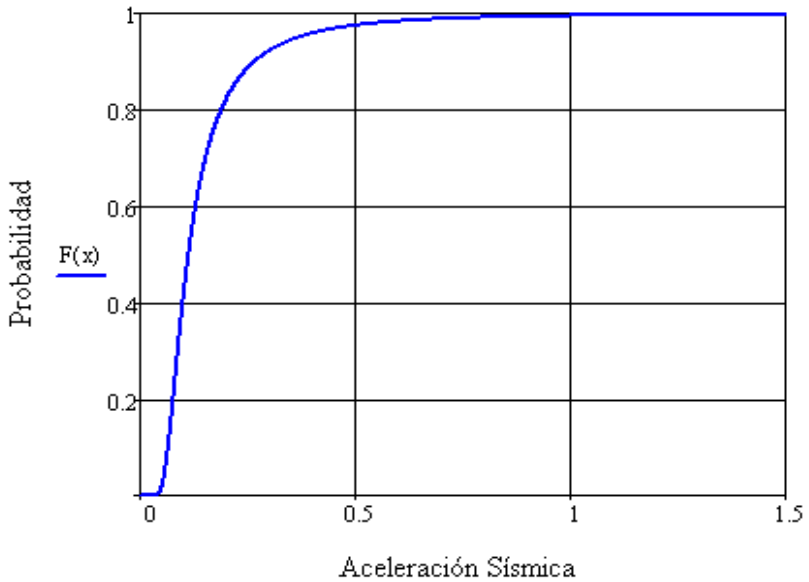


FIGURA 6.8 Distribución de Probabilidad Acumulada de la Aceleración Sismica

6.2.4 Selección de la Función de Estado Límite*:* En nuestro estudio solamente vamos a considerar un estado límite y es la falla a flexión uniaxial. Por lo tanto definimos nuestra función de estado límite como:

$$G(A_s, F_y, h, f_c, b, M, P) = Diagrama\ de\ Interac\,ción(A_s, F_y, h, f_c, b) - Cargas\ actuantes(M, P)$$

En lo concerniente al momento y la carga axial actuante la ecuación que lo rige no se puede determinar de forma explícita, ya que las columnas hacen parte de un sistema estructural lo cual conllevo a realizar un estudio de regresión multilineal que nos permitiera obtener una expresión en función de las cargas actuantes sobre la estructura, utilizando para la variación de las cargas la técnica de muestreo *Latin HyperCube Sampling* y con ayuda del programa ETAB 9.4 de la casa Computer and Structures para cada combinación de carga de servicio se obtuvieron los momentos y cargas axiales respectivas.
En lo referente a la carga sísmica se determino el cortante vasal como:

$$V_{vasal} = Area\ de\ la\ Losa\ x\ Carga\ Muerta\ x\ Aceleracion\ Sismica$$
$$Donde\ el\ Area\ de\ la\ Losa\ es\ 107\ m^2$$

Y utilizando el análisis de fuerza equivalente dispuesto por la NSR-98 se determinaron los respectivos cortantes sísmicos que se tuvieron en cuenta para obtener los diferentes momentos y cargas axiales de servicio.

MOMENTOS Y CARGA DE SERVICIO									
CARGA SERVICIO		A_o Sísmica	V Vasal	COLUMNA 2C		COLUMNA 3C		COLUMNA 8C	
CV	CM			Y-Y (+)	P	Y-Y (+)	P	Y-Y (+)	P
2,223	11,171	0,086	103	17,23	204,94	17,03	137,85	17,28	174,77
1,823	14,963	0,247	395	55,89	243,79	55,81	178,23	56,53	214,51
1,542	12,732	0,09	123	20,14	217,76	19,88	147,17	20,18	186,03
0,651	13,538	0,064	93	16,26	217,89	15,97	145,7	16,21	185,42
2,008	12,163	0,133	173	26,54	213,72	26,32	147,15	26,68	183,83
1,868	13,426	0,158	227	33,7	228,71	33,36	159,63	33,51	197,72
2,688	13,202	0,106	150	24,11	241,77	23,83	164,1	24,17	206,87
1,732	13,314	0,058	83	15,21	231,81	14,89	154,18	15,13	196,88
2,36	10,525	0,098	110	18,04	196,62	17,8	132,83	18,05	167,94
1,313	14,577	0,068	106	18,43	243,91	18,11	163,2	18,38	207,61
1,491	11,521	0,072	89	15,37	199,63	15,11	133,69	15,34	169,97
1,96	14,272	0,182	278	40,67	240,93	40,5	170,19	41,04	209,21
1,377	13,885	0,094	140	22,61	232,42	22,34	157,53	22,67	198,76
1,156	14,008	0,141	211	31,71	227,43	31,51	157,99	31,94	196,27
1,436	12,322	0,127	167	25,64	207,53	35,43	142,85	25,79	178,48
1,914	16,215	0,29	503	70,18	259,71	70,17	194,02	71,07	230,41
2,058	13,767	0,169	249	36,8	235,95	36,62	165,47	37,12	204,34
1,053	11,777	0,102	129	20,48	194,84	20,26	132,66	20,55	166,9
2,109	13,651	0,368	538	73,97	220,88	74,05	170,73	74,99	198,59
2,949	13,089	0,609	853	114,58	209,92	114,95	179,99	116,36	196,93
1,24	12,973	0,083	115	19,08	217,19	18,81	146,39	19,1	185,36
2,444	11,984	0,149	191	28,63	216,87	28,41	150,13	28,81	186,91
2,164	14,418	0,218	336	48,23	243,58	48,1	174,92	48,72	212,84
1,686	15,219	0,198	322	35,3	249,36	40,87	177,9	52,68	217,34
1,64	14,756	0,116	183	17,27	248,1	22,73	169,91	24,33	212,98
1,592	14,136	0,076	115	8,28	240,94	13,67	161,75	25,12	205,33
1,777	12,604	0,079	107	6,87	220,21	12,31	147,93	23,8	187,71
2,287	15,569	0,111	185	17,96	270,89	23,38	184,74	35,01	232,19
2,547	12,855	0,121	166	14,78	233,35	20,25	159,49	31,82	200,17
0,912	12,468	0,051	68	1,55	206,42	6,98	136,99	18,39	175,18

Tabla 21 Momentos y Cargas de servicio para las columnas del pórtico C para distintas combinaciones de carga muerta, carga viva y carga sísmica.

A continuación se muestra el análisis estadístico de la regresión multilineal de cada columna para momento y carga axial:

	MOMENTO		
	Columna 2C	Columna 3C	Columna 8C
R^2 Ajustado	0.9472	0.9563	0.9591
Estadístico f	603.21	1451.90	2448.61
Valor Critico de f	3.84×10^{-24}	4.72×10^{-29}	5.46×10^{-32}
Estadístico t CV	0.072	-0.018	0.6827
Estadístico t CM	0.024	1.2702	3.1482
Estadístico t V_{vasal}	22.62	33.480	40.04
Coeficiente de CV	0.12112604	-0.01967883	0.61587524
Coeficiente de CM	0.00505095	0.18233993	0.36392304
Coeficiente de V_{vasal}	0.13574951	0.13287018	0.12792769

	CARGA AXIAL		
	Columna 2C	Columna 3C	Columna 8C
R^2 Ajustado	0.9630	0.9629	0.9629
Estadístico f	791944742	3505634187	9110320967
Valor Critico de f	1.35×10^{-103}	$5{,}39 \times 10^{-112}$	2.187×10^{-117}
Estadístico t CV	1736,32208	3386,01803	5730,08187
Estadístico t CM	13548,2185	26428,6204	44720,1156
Estadístico t V_{vasal}	-1520,55905	1931,00384	-2076,51939
Coeficiente de CV	15,6781742	10,1337987	13,1790487
Coeficiente de CM	15,6741753	10,1343246	13,1784236
Coeficiente de V_{vasal}	-0,04862882	0,02046875	-0,01691549

A partir de estos resultados estadísticos obtenidos se puede concluir que los coeficientes calculados son apropiados para modelar la variable del momento y la carga axial actuante en cada columna con respecto a la variabilidad de los parámetros carga viva, carga muerta y carga sísmica.

A continuación se muestra la ecuación de estado límite de cada una de las columnas analizadas:

Columna	Ecuación de Estado Límite
2C	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, M, P) = Diagrama\ de\ Interacción(A_s, F_y, h, f_c, b) - Cargas\ actuantes \begin{bmatrix} (0.12112604\text{CV} + 0.00505095\text{CM} + 0.13574951\text{V}_{\text{vasal}} \\ (15{,}6781742\text{CV} + 15{,}6741753\text{CM} - 0{,}04862882\text{V}_{\text{vasa}} \end{bmatrix}$
3C	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, M, P) = Diagrama\ de\ Interacción(A_s, F_y, h, f_c, b) - Cargas\ actuantes \begin{bmatrix} (-0.01967883\text{CV} + 0.18233993\text{CM} + 0.13287018\text{V}_{\text{va}} \\ (10{,}1337987\text{CV} + 10{,}1343246\text{CM} + 0{,}02046875\text{V}_{\text{vas}} \end{bmatrix}$
8C	$G(A_s, F_y, h, f_c, b, M, P) = Diagrama\ de\ Interacción(A_s, F_y, h, f_c, b) - Cargas\ actuantes \begin{bmatrix} (0.61587524\text{CV} + 0.36392304 + 0.12792769\text{V}_{\text{vasal}}) \\ (13{,}1790487\text{CV} + 13{,}1784236\text{CM} - 0{,}01691549\text{V}_{\text{vasal}} \end{bmatrix}$

Tabla 22 Ecuación de estado límite de las columnas estudiadas

6.2.5 Cálculo de la Probabilidad de Falla y Índice de Confiabilidad β: Para el cálculo de la probabilidad de falla se empleó el método de simulación de Monte Carlo y la técnica de reducción de varianza Latin HyperCube Sampling y se obtuvo:

COLUMNA	INDICE DE CONIABILIDAD β	PROBABILIDAD DE FALLA
2C	1.36	0.0874
3C	1.21	0.1132
8C	1.26	0.1032

En lo referente a la confiabilidad estructural de columnas uniaxiales diseñadas por la norma sismo resistente NSR-09 genera la misma confiabilidad que el código NSR-98 para la estructura analizada debido a que el diseño que se obtiene es el mismo.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para el análisis de los resultados se calificó el nivel de seguridad de las columnas uniaxiales y vigas estructurales en función del índice de confiabilidad, empleando los límites generales recomendados por varios autores (Sánchez, M (2005), Nilson, Arthur H (1999), Baecher, Gregory B. Christian, Jhon T, Hasofer y Lind, los cuales definen el valor objetivo de la probabilidad de falla.

En el caso de vigas estructurales, la nueva norma de Diseño Sismo Resistente NSR-09 se encuentra calibrada para $\beta_{objetivos}$ entre 2 y 3.5, mientras que la NSR98 lo está para $\beta_{objetivos}$ entre 3 y 4. Esto implica que las probabilidades de falla permitidas por la NSR09 fueron aumentadas en un orden de magnitud con respecto a las del código NSR-98.

Este cambio está sustentado por estudios (Reliability and statistics in Geotechnical Engineering. McGraw Hill International) en los cuales se recomiendan β de 2 para elementos de poca importancia estructural dentro de la estructuras de alta redundancia; β de 3 para elementos importantes en estructuras de poca redundancia y β de 2.5 para elementos de importancia estructural (Vigas voladizo) en estructuras redundantes.

Los índices de confiabilidad β proporcionados por la NSR-98 para vigas estructurales son consistentes con las recomendaciones existentes en la época en la cual el código tuvo su desarrollo. Con relación al nuevo código de diseño NSR-09, los índices de confiabilidad objetivo se encuentran dentro de los rangos especificados para los códigos modernos de diseño.

Como recomendación de diseño del presente estudio, para el diseño de elementos estructurales (como vigas en voladizo) dentro de estructuras con redundancia se recomienda verificar que el área de acero suministrada exceda al menos en 8% el área de acero requerida por el diseño, ya que de esta manera se garantiza que $\beta=2.5$

El código de Diseño Sismo Resistente NSR-98 y NSR-09 permiten probabilidades de falla del orden de $8.1x10^{-2}$ hasta $11.5x10^{-2}$ para columnas uniaxiales bajo cargas de servicio y carga sísmica, generando índices de confiabilidad β entre 1.2 y 1.4. Estos índices de confiabilidad β se encuentran dentro de lo esperado teniendo en cuenta que en países desarrollados para estructuras bajo acciones sísmicas los índices de confiabilidad β están alrededor de 1.75

Finalmente, como futuros trabajos de investigación, se recomienda adelantar estudios similares al del presente trabajo en las áreas de geotecnia, especialmente lo referente al diseño estructural de cimentaciones superficiales

BIBLIOGRAFIA

- Normas Colombianas de Diseño y Construcciones Sismo Resistente NSR-98, Asociación Colombia de Ingeniería Sísmica – Santa fe de Bogotá: 3R Editores, 1999-2001.
- *Meli Piralla, Roberto (2000): Diseño Estructural. Editorial Limusa, S.A. Grupo Noriega Editores Balderas 95, México D.F, Pág. 55-70.*
- *Arroyo Amell, Orlando (2004): Método Para Optimizar el Diseño de Sistemas Estructurales. Tesis de Pregrado.*
- *Nilson, Arthur H (1999): Diseño de Estructura de Concreto. Editorial Mc GRAW- HILL INTERAMERICANA S.A, Santafé de Bogotá, Colombia.*
- *Spiegel,Murray R (2000): Estadística. Editorial Mc GRAW- HILL INTERAMERICANA S.A, Santafé de Bogotá, Colombia.*
- Capitulo 4 Aceptabilidad del Riesgo

  www.tdcat.cesca.es/TESIS_UPC/AVAILABLE/TDX041610075520/06Capitulo4.PD
- Sánchez, M. (2004). Introducción a la Confiabilidad y la Evaluación de Riesgos: Teoría y Aplicaciones en Ingeniería. Ediciones UniAndes.
- MELCHERS, Robert E. "*Structural Reliability Analysis and Prediction*".1999.
- Nowak, A., Collins, K. (2000): Reliability of Structures. McGraw Hill International.
- Hasofer A., Rackwitz R. (2000): Time-dependant models for code optimization. Proceedings ICASP-99. Balkema Rotterdam, Vol. 1, pp 151-158.

- Madsen, O., Krenk, S., Lind, N. (1986): Methods of Structural Safety. Prentice Hall
- Baecher, Gregory B. Christian, Jhon T. Reliability and statistics in Geotechnical Engineering. McGraw Hill International.

ANEXOS