ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE ALGUNAS INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE DERIVADA

SANDRA JUDITH SANTOS MENDOZA

RAFAEL AUGUSTO VALLESTA ALFARO

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

SINCELEJO

2002

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE ALGUNAS INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE DERIVADA

SANDRA JUDITH SANTOS MENDOZA

RAFAEL AUGUSTO VALLESTA ALFARO

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemática

Director

Lic. Jairo Escorcia Mercado

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

SINCELEJO

2002

DEDICATORIAS

A Dios, luz en mi camino.

A mis padres: Silvio Santos y Lucy Mendoza, por apoyarme incondicionalmente.

A mis hermanos Sandro y Carolina, por comprenderme y tolerarme.

A mi novio Angel Torres, por motivarme a seguir adelante.

A mis profesores por contribuir en mi formación.

A mis amigas: Yarelis, Nellis, Lilia y Osiris, por los momentos compartidos.

A Carlos Santos, por tener paciencia en la transcripción del trabajo.

SANDRA

A Dios, por darme la fortaleza para seguir adelante.

A mi abuela, por brindarle el cariño y el apoyo en todos los momentos difíciles.

A mi novia: Diana, por brindarme su apoyo.

RAFAEL

AGRADECIMIENTOS

A todos los profesores y personas que contribuyeron en la realización de este trabajo, especialmente a:

El Licenciado JAIRO ESCORCIA; por brindarnos la confianza para enriquecer nuestros conocimientos con su experiencia y orientarnos como director para así poder sacar adelante este trabajo.

El Licenciado TULIO AMAYA; por las asesorías y recomendaciones aportadas.

NOTA DE ACEPTACION

____

Presidente del Jurado

____

Jurado

____

Jurado

Sincelejo, ________________________________

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE ALGUNAS INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE DERIVADA

CONTENIDO

RESUMEN

Este trabajo busca posibilitar la comprensión del concepto de derivada mediante el tratamiento de algunas interpretaciones del mismo, con la solución de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra.

SUMMARY

This work searche to make possible the comprehension of derivada's concept by means of the treat ment of some interpretations of some with the solution of problem situations that involved change's reasons of a variable whit regard to other.

Este trabajo se realizó como una alternativa didáctica para la enseñanza del cálculo diferencial a nivel de bachillerato y universitario. En particular aborda como problema la escasa comprensión del concepto de derivada presentada en estudiantes de cálculo I, en los programas Licenciatura en Matemáticas, Ingeniería Civil e Ingeniería Agrícola, en la Universidad de Sucre. Ante este problema se plantea el siguiente interrogante ¿Qué grado de comprensión del concepto de derivada desarrollarán los estudiantes de cálculo I, con la solución de situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra?, debido a que se parte del supuesto de que la solución de situaciones problemas, tratadas con algunas interpretaciones del concepto de derivadas, pueden favorecer la comprensión de este concepto. Este su puesto se hace teniendo en cuenta el enfoque de la resolución de problemas y con énfasis en el desarrollo de competencias, propuesto por el MEN a través de los lineamientos curriculares en el área de matemáticas.

El objetivo propuesto es posibilitar la compresión del concepto de derivada, a través del tratamiento de las diferentes interpretaciones de éste, con situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, para contribuir al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo diferencial.

Entre los elementos teóricos utilizados en el trabajo se encuentra la variación; concebida como los cambios que sufran determinados fenómenos u objetos en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía; estas ideas se tomaron del trabajo de J. Gamboa (1998), quien además afirma que una de las nociones que pueda generar el pensamiento variacional es la diferencia como modelo matemático básico de los cambios. Otros elementos teóricos utilizados son las diferentes formas de definir el concepto de derivada como son: tasa de cambio instantánea, interpretación geométrica (pendiente de una recta tangente a una curva), velocidad instantánea y la definición formal; tomada de algunos textos de cálculo. Por otro lado, en cuanto a la compresión del concepto, se adoptan algunas ideas de D. Perkins y T. Bithe (1999), a respecto señala que para apreciar la comprensión de una persona pídanle que resuelva un problema, explique un tema, construya un argumento, arme un producto, entre otros. Ellos manejan la comprensión a partir de criterios de desempeños flexibles, es decir, buscan que la persona muestre sus habilidades para pensar y actuar con flexibilidad usando los conocimientos que posee.

Otro aspecto que se tienen en cuenta es el concepto y modelo de una situación problema utilizado por el ICFES en las pruebas de Estado para el ingreso a la educación superior; la situaciones problema se conciben como enunciados que tienen información no necesariamente matemática, en donde se plantean preguntas referidas o no a las matemáticas, para adelantar una acción que requiere del uso de la matemática para resolverla. Estas acciones o competencias son: interpretación, argumentación y proposición; se perciben en la estructura de las preguntas de la situación y se manifiestan en las opciones de respuesta presentadas, para las cuales se debe seleccionar la correcta.

En procura de alcanzar el objetivo del trabajo, se elaboró una propuesta desarrollada en tres etapas: en la etapa 1, se diseño y aplicó un cuestionario que exploró el estado de algunas ideas variacionales y del concepto de derivada, en 30 estudiantes seleccionados equitativamente entre los tres programas académicos antes mencionados. Los resultados del cuestionario mostraron que la mayoría de los estudiantes tenían poco dominio de las ideas variacionales y especialmente el concepto de derivada; comparándolos con las ideas o conceptos científicos que se manejan en cálculo. La etapa 2, comprende las orientaciones pedagógicas realizadas a los mismos estudiantes; en donde se explicaron las definiciones del concepto de derivada: tasa de cambio instantánea, velocidad instantánea y pendiente de una recta tangente a una curva, y además algunos ejemplos con situaciones problemas contextualizadas. En estas orientaciones los estudiantes se mostraron atentos y participativos al explorar algunas interpretaciones del concepto de deriva. En la etapa 3, se diseñó y aplicó un cuestionario con tres situaciones problemas construidas de tal manera que evalúa las competencias comunicativas en matemáticas, para mirar en los estudiantes la evolución de la comprensión del concepto de derivada y de algunas interpretaciones de éste, después de las orientaciones pedagógicas recibidas de los proponentes del trabajo y por el profesor titular de la asignatura.

Los resultados del trabajo se analizaron cualitativamente, ya que es un estudio de tipo descriptivo. Los resultados del segundo cuestionario revelaron lo siguiente: en la situación Nº 1, en la pregunta 1 solo 11 estudiantes respondieron correctamente y en la pregunta 2, respondieron correctamente 25; mostrando con ello tener habilidad en la interpretación de las ideas variacionales y del concepto de derivada a partir de representaciones algebraica y gráfica. En la situación Nº 2 que consta de una pregunta, la mayoría de los estudiantes (26), mostraron habilidad en proponer al concepto de la deriva como solución al problema de la velocidad instantánea, estableciendo una relación entre ellas por medio de algunas ideas variacionales implícitas en el concepto. En la situación Nº 3, menos de la mitad de los estudiantes (10), respondieron correctamente la pregunta planteada, mostrando con ello, deficiencia en la habilidad para argumentar del por qué de la aplicación del concepto de derivada y de algunos conocimientos matemáticos relacionados con éste. De lo anterior se puede afirmar que los estudiantes en estudio, mejoraron satisfactoriamente en la compresión del concepto de derivada, tratado a través de sus diferentes interpretaciones con la solución de situaciones problema.

En conclusión, el diseño y aplicación de situaciones problema contextualizadas son un medio propicio para posibilitar en los estudiantes un acercamiento hacia los conceptos científicos manejados en cálculo o en cualquier rama de las matemáticas. Además, el tratamiento de algunas interpretaciones del concepto de derivado, a través de la solución de situaciones problemas que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra es una estrategia didáctica para abordar y comprender mejor le concepto de derivada.

Una de las recomendaciones de este trabajo es que los docentes de matemáticas implementen en su metodología, el diseño y solución de soluciones problema contextualizadas con el manejo de las competencias comunicativas en matemáticas, puesto que la solución de situaciones problema permite potenciar las capacidades de interpretación, argumentación, proposición, análisis, comprensión, entre otras; en el uso de los conocimientos matemáticos.

INTRODUCCION

La historia de las matemáticas nos permite mostrar que el estudio de la variación se inicia con las tablas babilónicas, con las gráficas de variación (Oresme en la edad media), y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista[1]. Es así como en la época del siglo XVIII dos grandes matemáticos; Newton (1642-1727) y Leibnitz (1646-1716), se preocuparon por dar solución a problemas de variación del contexto como es el movimiento de los cuerpos (la velocidad de un móvil en cualquier instante de tiempo) y problemas geométricos (trazo de una tangente a una curva en un punto dado). A raíz de estas inquietudes realizaron importantes aportes a las matemáticas de la variación permitiendo de esta manera el nacimiento del cálculo diferencial.

El cálculo diferencial a través, de la historia ha impulsado el desarrollo científico universal en diferentes campos; física, astronomía, ciencias económicas, biología, estadísticas, ciencias del comportamiento y prácticamente en todas las ramas del saber humano. El cálculo diferencial es también llamado matemáticas de cambios y es una materia tradicional en los planes de estudio de matemáticas a nivel de media vocacional y universitaria. Respecto a las formas de enseñanza de la materia en mención; la autora Wenzelburger[2] 1995, expresa "generaciones de

1. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Lineamientos Curriculares En Matemáticas. Santa Fé de Bogotá. MEN. 1998. Pág. 72
2. WENZELBURGER, Eliriede. Cálculo Diferencial. Didáctica una Guía para Maestros y Alumnos. Grupo

Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
alumnos pasaron por un curso de cálculo sin realmente entender el significado y la utilidad de estas ramas de las matemáticas; ésto se debe sobre todo a la manera abstracta y formal en la cual se presenta normalmente la materia". "tenemos muchos estudiantes de cálculo diferencial que saben aplicar métodos, definiciones y reglas en forma rutinaria, sin comprender el sentido de estas operaciones, reproduciendo los pasos más de memoria que en forma significativa".

Esas anomalías que se presentan muchas veces en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial; particularmente están presentes en el estudio de uno de los temas principales de éste; en el concepto de derivada. Atendiendo a dichas anomalías, pretendemos realizar un "estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada", con el ánimo de contribuir en una enseñanza más significativa de dicho concepto. Este estudio se hará con la realización de actividades didácticas (cuestionarios) que logren facilitar el desarrollo del pensamiento variacional y posibiliten la comprensión del concepto de derivada, a través de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra; las cuales se diseñarán de tal manera que evalúen las competencias o acciones comunicativas en matemáticas: interpretación, argumentación y proposición.

Para la realización de este trabajo el grupo investigador ha diseñado cuatro aspectos a saber:

- Marco teórico con sus respectivos autores.
- Metodología empleada en el trabajo.
- Cuestionarios que se aplicaran.
- Resultados y análisis de los cuestionarios.

1. EL PROBLEMA

1.1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACION

Después de haber cursado la asignatura cálculo I; en la que se desarrollan los temas: funciones, límites de funciones, continuidad de funciones, derivada de una función, entre otros. La temática de la derivada; causó cierto interés a nivel personal, debido a algunas dificultades presentadas en la compresión de este concepto; y por otra parte, al sostener conversaciones con los estudiantes de los programas licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil de la Universidad de Sucre que han estudiado este tema, manifestaron que el desarrollo de la definición, teoremas y regla de la derivada se les dio un manejo rutinario y mecanicista, sin encontrarles el sentido y significado del concepto de derivada como tal. Atendiendo a estos comentarios, se realizó un cuestionario diagnóstico (Pág 67), para indagar por la conceptualización de conocimientos como: variación, pendiente de una recta tangente a una curva, límite de una función, derivada de una función, entre otros; que consideramos necesarios para el manejo y estudio de la derivada.

El cuestionario diseñado se aplicó a 30 estudiantes de cálculo I, entre los programas Licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil; los cuales ya habían desarrollado el estudio de la temática en mención. En los resultados, se observó poco dominio en el aprendizaje de los conceptos relacionados con la derivada y en el concepto de la misma. Por lo que consideramos necesario realizar un "estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada", con los mismos estudiantes que se les aplicó dicho cuestionario.

Esta propuesta se concibe, con base a la teoría consultada (pensamiento variacional, resolución de situaciones problema, desarrollo y evaluación de competencias comunicativas en matemáticas, interpretaciones del concepto de derivada....), como alternativa de solución para facilitar la comprensión del concepto de derivada con el manejo de las diferentes interpretaciones de este, a través de la solución de situaciones problemas que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra en varios contextos, y estará orientada a indagar y reflexionar sobre el siguiente interrogante:

¿Qué grado de comprensión del concepto de derivada desarrollarán los estudiantes de cálculo I con la solución de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra?

1.2. JUSTIFICACION

Si hacemos una revisión general de los textos de cálculo diferencial nos podemos dar cuenta que estos presentan el estudio de la derivada de la siguiente manera: definición, teoremas y por último las aplicaciones; contrario a como lo plantea los lineamientos curriculares del área de matemáticas: “Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tienen lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no solo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas”[3].

Basándonos en lo anterior, consideramos oportuno asumir una metodología tendiente a posibilitar la comprensión del concepto de derivada, a través de la solución de situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra, en los contextos: física, economía, biología y geometría; diseñadas de tal manera que evalúen las competencias comunicativas en matemáticas: interpretación, argumentación y proposición.

En la manera tradicional se enseña a solucionar problemas utilizando el concepto de derivada, pero ¿Cómo interpretan los estudiantes el concepto de derivada en la solución de situaciones problema? . Por lo tanto se hace necesario realizar un estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada en estudiantes de cálculo diferencial, por que:

3. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Santa Fé de Bogotá. MEN. 1998. Pág. 41.

- Por medio de la solución de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, los estudiantes pueden llegar a comprender mejor el concepto de derivada y la aplicabilidad de éste en el contexto.
- Se espera que los estudiantes participen activamente mediante la solución de situaciones problema, en la construcción del concepto de derivada.
- Los estudiantes aprenden a hacer interpretaciones del concepto de derivada.
- Permite la exploración del pensamiento variacional en los estudiantes.
- El docente asume un papel de facilitador en el quehacer pedagógico.
- En la Universidad de Sucre no se ha realizado trabajo acerca de la metodología empleada para la enseñanza de la derivada.

Es pertinente porque:

- Actualmente el MEN a través de los lineamientos curriculares, ha propuesto un cambio metodológico para la enseñanza de las matemáticas, consistentes en el desarrollo de un curriculo con el enfoque de la resolución de problemas y con énfasis en el desarrollo de competencias; pero no señala el cómo realizarlo; por tanto, a través de este trabajo es posible contribuir en algunos aspectos del como realizarlo.
- Busca solucionar un problema metodológico, es decir, generar cambios de metodología en la enseñanza del concepto de derivada.

- Induce a que los estudiantes exploren las diferentes interpretaciones del concepto de derivada.
- Se basa en el constructivismo.
- Las situaciones problema contextualizadas son pilares para acercarse al conocimiento de la derivada.

Es viable porque:

- Los proponentes, cuentan con la colaboración de los docentes titulares del área, de la institución beneficiaria.
- Los recursos utilizados son de fácil manejo y con un mínimo de costo.
- Se cuenta con el recurso humano (estudiantes de las asignaturas cálculo diferencial de las diferentes carreras de la universidad de Sucre), para el desarrollo de este trabajo.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. General

1.3.1.1. Posibilitar la comprensión del concepto de derivada a través del tratamiento de las diferentes interpretaciones del concepto de derivada con situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, para contribuir al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de los cursos de cálculo diferencial.

1.3.2. ESPECIFICOS

1.3.2.1. Identificar las diferentes interpretaciones del concepto de derivada que manejan los estudiantes de calculo I.

1.3.2.2. Construir situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra dirigida a mostrar las diferentes interpretaciones del concepto de derivada.

1.4. DELIMITACION

Esta propuesta se desarrolla alrededor de algunas interpretaciones del concepto de derivada tratadas en la asignatura cálculo I e impartida en el segundo semestre de los programas licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil de la Universidad de Sucre, orientadas por profesores de tiempo completo de dicha institución en la jornada matinal del año lectivo 2001, con la participación de 30 estudiantes; 10 de cada programa, con el objeto de mirar la comprensión e interpretación que tienen del concepto de derivada al solucionar algunas situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES

En nuestro estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada, pretendemos ver la comprensión que de dicho concepto se tiene a través de el manejo de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, aplicada a los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial de algunas carreras de la Universidad de Sucre.

Haciendo una revisión bibliográfica se encontraron varias investigaciones a nivel internacional; entre ellas la de Cristologo Dolores Flores[4], en su investigación " Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar " supone que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) puede favorecer la comprensión de los conceptos de la matemática del cambio. El afirma que los conceptos son el reflejo de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia.

4. DOLORES FLORES, Cristologo. Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en Situación Escolar. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. Conacyt. México. "Resúmenes de RELME 12".1998, Pág.37.

Otra investigación de Cristologo Dolores Flores pero en compañía de Alfonso Catalán Adame[5] es la titulada "Formación del concepto de derivada a través de la variación", ellos introducen el concepto de derivada sobre la base de la formación por etapas de las acciones mentales (FEAM). Para la formación de dicho concepto inician con la cuantificación del cambio por medio de las diferencias.

Después estudian los cambios relativos como rapidez y velocidad media, y finalmente los cambios infinitamente pequeños, modelados por medio de los diferenciales. Bajo esta línea pretendían la formación de la derivada como cociente de diferenciales desarrollando principalmente las actividades de predicción, estimación, comparación y aproximación.

Por otro lado la investigación de Roberto González[6] y Ricardo Cantoral titulado "Diseño de situaciones didácticas de resignificación: el caso de la derivada como un organizador de las derivadas sucesivas", ellos utilizaron el concepto de situación variacional como el conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica. Emplean el término resignificación porque el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan con el progreso del alumno en su estudio

5.CATALAN ADAME, Alfonso y DOLORES FLORES, Cistologo. Formación del Concepto de Derivada a través

de la Variación. Universidad Autónoma de Guerrero. Conacyt. México. “Resúmenes de RELME 12”.1998, Pág.29.
6.GONZALEZ, Roberto y CANTORAL, Ricardo. Diseño de Situaciones Didácticas de Resignificación: El Caso de la Derivada Como un Organizador de las Derivadas Sucesivas, Cinvestav – IPN. Conacyt. México. “Resúmenes de RELME 12” 1998, Pág.46.

matemático. Ellos plantean que el concepto de derivada surge hasta que se domine el concepto de derivada sucesiva; y para ello diseñaron situaciones didácticas en las cuales aplicarían su planteamiento.

En el trabajo de investigación de José Rodolfo Oliveros[7] titulada “Aprendizaje de la derivada a través del flujo instantáneo” se hace un estudio del aprendizaje de la derivada con la solución de un problema presentando un gráfico de variación para hallar el flujo instantáneo en dos momentos diferentes; llegándose a la conclusión de que las estrategias empleadas para hallar el flujo gráficamente se basan en modelos cognitivos de la tarea incompletos, inestables, cambiando cada nueva experiencias; que incluyen piezas relativamente desconectadas de conocimiento; como en el caso de dos alumnos donde el uso de gráficas, y descripciones verbales de la situación tienen poca o ninguna relación con los procesos de cálculo; los modelos se vuelven más adecuados cada vez que se prueban y discuten sin llegar nunca a la solución óptima. El conocimiento del maestro de las estrategias y dificultades de los alumnos en la resolución de estos problemas cuya estructura es la relación entre una función y su derivada podrían ayudarle en el diseño de la enseñanza.

Haciendo una revisión bibliográfica sobre el estudio de la derivada en la Universidad de Sucre, se encontraron pocos trabajos de grado que hacen su estudio, presentándolo de manera meramente matemático; entre ellos el de

7. OLIVEROS ANGELES, José Rodolfo. Aprendizaje de la Derivada a través del Flujo Instantáneo. Universidad Autónoma Chapingo – Cinvestav – IPN, México. "Resumen de RELME 12" 1998. Pá.g. 66

Leonardo Camargo[8] y Jamis Pérez titulado "Demostración gráfico del teorema el Algebra de las derivadas", este muestra un estudio teórico de la derivada con representaciones y gráficas del teorema con la demostración del mismo. Otro trabajo matemático es el de Adalith Arrieta[9] y Lidy Oviedo titulado "Estudio de algunas funciones elementales a partir del cálculo diferencial e integral", en este se realiza un estudio general de la teoría de funciones desde la perspectiva del cálculo diferencial e integral. De la misma forma hicieron un estudio Carlos Acosta[10], Oswaldo Hernández y Mario Solorzano en su trabajo titulado "Hacia una construcción del cálculo diferencial para espacios métricos" quienes se percataron de la necesidad de tener que variar las tradicionales definiciones de límite y continuidad, dadas para espacios métricos (la A – topología inducida de la métrica) que permitiera la utilización de nuevas definiciones de límite y continuidad propicias para la aparición de la derivada y de la diferencial.

2.2. BASES TEORICAS

El hombre, después de la práctica quiere mostrar conceptos generales, donde se refleja su experiencia; es así como las situaciones problema son un contexto propicio para llegar a un acercamiento conceptual de un tema específico.

8. CAMARGO ROMERO, Leonardo y PEREZ PEREZ, Jamis. Demostración Gráfica del Teorema el Algebra de las Derivadas, Universidad de Sucre. Sincelejo 1998.
9. ARRIETA VASQUEZ, Adalith y OVIEDO REDONDO, Lidy. Estudio de Algunas Funciones Elementales a

partir del Cálculo Diferencial e Integral. Universidad de Sucre. Sincelejo 1999.
10.ACOSTA, Carlos; HERNANDEZ, Oswaldo y SOLORZANO, Mario. Hacia una Construcción del Cálculo Diferencial para Espacios Métricos. Universidad de Sucre. Sincelejo 1996.

Miguel de Guzmán[11] plantea que "la enseñanza a partir de situaciones problema pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiadas para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces". Considerando como lo más importante entre otros aspectos:

- Que el alumno se prepare para solucionar problemas de la ciencia, y posiblemente, de su vida cotidiana.
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Lo anterior nos da las bases para hacer un estudio exploratorio sobre algunas interpretaciones del concepto de derivada por medio del manejo de situaciones problema contextualizadas y que el aprendizaje se dé significativamente por ser un conocimiento descubierto por el estudiante, presentándose diferencias con el aprendizaje receptivo no en estructura sino en metodología, conforme a lo que plantea la ley general 115 de 1994 donde señala los lineamientos para transformar la escuela, la enseñanza y el aprendizaje; promover el cambio de paradigma tradicional caracterizado por la transmisión mecánica de información, la pasividad en las prácticas y una preocupación excesiva por los contenidos y métodos, por otro lado, que tenga más en cuenta al individuo y sus potencialidades.

---

11. DE GUZMAN. Miguel. Enseñanza de las Ciencias y de Las Matemáticas. Editorial Popular. Madrid. 1993. Pág. 111.

Apoyándonos en los criterios presentados por los lineamientos curriculares de matemáticas[12] donde presentan una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela basándose entre otros en; privilegiar las situaciones problema como el contexto del hacer matemático escolar, donde se integren procesos de pensamiento y conocimientos que permitan a los alumnos: explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos. Es importante que los problemas no estén separados del contexto y de lenguajes familiares para el estudiante, porque estos favorecen la presentación que pueda hacer del problema, influenciando sus esquemas y estrategias de acción.

El enfoque de la resolución del problema se apoya en lo que plantea la propuesta del consejo nacional de profesores de matemáticas de Estados Unidos, publicada en 1989, bajo el título “estándares curriculares y de evaluación matemática”; la cual consiste en la adopción de la resolución de problemas como el centro de atención de la enseñanza y de la evaluación de la matemática escolar. La tendencia de los estándares es fomentar una educación matemática que enfrente al estudiante con experiencias variadas, en las que pueda percibir y apreciar la relación entre matemática y sociedad y que además, forme alumnos reflexivos, creativos, analíticos y capaces de formular hipótesis, elaborar argumentos y resolver variedad de problemas. (NCTM, 1989).

Un componente esencial en la propuesta de resolución de problemas, es la

---

12. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Lineamientos Corriculares de Matemáticas Santa Fé de

Bogotá. MEN. 1998.

Conceptualización que se tenga acerca de lo que es un problema (Santos, 1997); porque los distintos puntos de vista de lo que es un problema, son los que ocasionan que las actividades desarrolladas durante la instrucción promueven diversas actitudes o conductas. A continuación se dará a conocer lo que algunos investigadores en la enseñanza de la matemática consideran como problema:

Para Lester (1980)[13], un problema es una tarea para la que un individuo o grupo requiere encontrar una solución, pero para la que no existe un procedimiento accesible que lo garantice o lo determine completamente, el individuo o grupo debe realizar varios intentos para encontrar una solución (MEN, 1997. Pág. 52).

Kilpatrick (1985)[14], dice que un problema matemático es el que se puede identificar con un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cuál no existe un camino directo o inmediato para obtener su resolución (es).

Shoenfeld (1983)[15], usa el término problema para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla. Considera que la dificultad debe ser un impase intelectual y no solamente a nivel operacional o de cálculo.

George Polya[16], considera que tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente

13-14-15 – 16. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL.. Lineamientos Corriculares de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá. MEN. 1998.

concebida pero no inmediata de lograr. En el enfoque de resolución de problemas hay que establecer una distinción entre el proceso de resolución de un problema y la solución del mismo. El primero se refiere al proceso dentro del cual se producen diversas acciones para resolverlo, las cuales según Polya se pueden agrupar en las siguientes acciones:

- Comprender el problema.
- Concebir un plan.
- Ejecutar el plan.
- Comprobar la solución.

Mientras que el segundo, es decir, la solución del problema, es el resultado al final del proceso de resolución.

Arsac[17], 1997, supone para la solución de un problema dos tipos de condiciones:

- Condiciones sobre el enunciado:
  - Es necesario que el alumno se apropie del problema.
  - Los alumnos deben fácilmente entrar en su resolución, pueden hacer intentos, construir y manipular conjeturas y contra – ejemplos.
  - Los alumnos pueden suministrar explicaciones con el apoyo de sus conjeturas.
- Condiciones sobre la disposición de la clase.

En la clase debe haber una actitud que conduzca a los alumnos a asegurar la validez del resultado producido.

17.ARSAC, Gilbert. Et Al. Características. De Situaciones de Enseñanza en el Aula. Iniciación al Razonamiento Deductivo en el Colegio. Universidad de Lyon, Lyon. 1992. Pág. 17 – 22.

El profesor no comenta si las soluciones propuestas son exactas o no; es la misma clase la que los debatirá.

Teniendo en cuenta las bases teóricas antes mencionadas sobre situaciones problema y su solución podemos decir que a través de estas se puede llegar a conceptualizar variedad de temas dependiendo de la disciplina y los contextos en que se manejen estos, pero para ello es necesario destacar un elemento que es base fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje; la comprensión. Alrededor de esta surgen muchos interrogantes por responder como son: ¿Qué es la comprensión?, cuando los alumnos logran comprensión ¿Qué han logrado?, ¿Cómo puede un alumno manifestar comprensión de algo?. No es necesario dar una respuesta inmediata y precisa a estos interrogantes, mejor presentemos algunas concepciones que den claridad al estudio de la comprensión.

Para David Perkins[18], el conocimiento, la habilidad y la comprensión son el material que se intercambia en educación. El conocimiento es información a mano, nos sentimos seguros de que un alumno tiene conocimiento si puede reproducirlo cuando se le interroga, pero la comprensión no se reduce al conocimiento, es más que sólo reproducir información. Comprender es más que una habilidad rutinaria bien automatizada. En pocas palabras, comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe.

18.PERKINS, David y BLITHE, Tina. La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el Docente. Ed. PARDOS. Buenos Aires. 1999. Pág. 89 – 72.

Por otro lado, Wiske[19], 1998, propone para el desarrollo de la comprensión un marco guía en el que se debe responder a cuatro preguntas fundamentales:

1. ¿Qué temas vale la pena comprender?
2. ¿Qué debe comprenderse de esos temas?
3. ¿Cómo fomentar la comprensión?
4. ¿Cómo identificar la comprensión de los estudiantes?

Las respuestas a estas preguntas pueden hallarse en cada uno de los elementos del marco de enseñanza para la comprensión que propone el grupo de investigadores del proyecto cero del posgrado de educación de la universidad de Harvard, tales elementos son: temas generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua.

- TEMAS GENERATIVOS

Son las tareas centrales, esenciales que los estudiantes estudiarán durante el curso, son ideas, tópicos o temas que se presentan para una comprensión profunda. Los investigadores de este proyecto encontraron que la elaboración de mapas conceptuales ayuda a definir aquello que tiene mayor potencial generativo.

19.WISKE, 1998. Tomado de: BLYTHE, Tina y Colaboradores. Enseñanza para la Comprensión: Los Elementos del Marco. Ed. PARDOS. Buenos Aires. 1999.

- METAS DE COMPRENSION

Las metas de comprensión define de manera específica las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los estudiantes comprenden mejor durante su indagación (Wiske, 1998), identifican aquello que el maestro quiere que los estudiantes comprendan en una unidad. Existen unas metas de comprensión más generales; los hilos conductores, que son preguntas esenciales, centrales que guían el trabajo de estudiantes y profesor.

- DESEMPEÑOS DE COMPRENSION

La perspectiva que orienta la filosofía del marco específico es que la comprensión se manifiesta en las acciones que realiza el estudiante. Los desempeños de comprensión son acciones que realiza el estudiante por medio de actividades sencillas que apuntan al logro de la comprensión, de tal manera que reflexionen acerca del tema de interés y los hilos conductores fundamentales.

- VALORACION CONTINUA

Un elemento importante del marco es la valoración; la cual se utiliza como una herramienta de retroalimentación y no como evaluación del proceso final. El aprendizaje se produce al evaluar el desempeño frente a otros desempeños con criterios claros. De esta forma la valoración promueve a la vez que evalúa el aprendizaje (Wiske, 1998).

En general, cuando se habla de aprendizaje nos referimos a un proceso continuo de evolución y manifestación del conocimiento. Particularmente el aprendizaje en matemáticas requiere de la apropiación de elementos tales como, el desarrollo del pensamiento en todas sus categorías, el desarrollo del lenguaje; manejo de signos y símbolos matemáticos entre otros. En nuestro estudio sobre el tema derivada es necesario mirar el desarrollo del pensamiento variacional, que permita facilitar la comprensión del concepto de derivada. La variación no es más que los cambios que sufren ya sean determinados fenómenos u objetos, es por eso que el cálculo diferencial es llamado la matemática de cambios. En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). José Luis Gamboa[20] en su trabajo supone que para contribuir, en la enseñanza, es necesario la creación de mejores condiciones para la comprensión de las ideas variacionales de la matemática del cambio. También afirma que una de las nociones claves puede generar pensamiento variacional es la diferencia, pero la diferencia como modelo matemático básico de los cambios.

20.GAMBOA, José Luis. Nociones Generadoras de Pensamiento Variacional el la Educación Básica. Universidad Autonomía de Guerreo. Conacyt. México.(RELME 12, 1998).

Cantoral[21], 1997, define el pensamiento variacional como una parte del pensamiento matemático avanzado, trata sobre las relaciones ente la matemática de la variación y el cambio por un lado y con los procesos de pensamiento por el otro.

Por otra parte, Vigotsky[22], 1988, plantea acerca del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) la unidad entre ambos es el pensamiento verbal. El pensamiento es la presencia de un reflejo generalizado de la realidad, el cual constituye también la esencia del significado de las palabras y consecuentemente ese significado es una parte inalineable de la palabra como tal, que pertenece tanto al dominio del lenguaje como del pensamiento.

Otro aspecto fundamental para el estudio del concepto derivada son las razones de cambio. En la vida diaria se determinan razones de cambio de procesos, pero no se maneja en forma de un método matemático abstracto; es por eso que Wenzelburger[23], 1995, en su guía propone que el acceso más natural al cálculo diferencial es a través del problema de determinar razones de cambios locales o instantáneos.

También afirma que normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada; este método tiene muchas

21. CONTORAL, Ricardo. Pensamiento y Lenguaje Variacional. Seminario de Educación Superior. Departamento de matemática Educativa, CINVESTAV, del LPN, México 1997 (RELME 12, 1998).
22. VIGOTSKY, L. 1988. Pensamiento y Lenguaje. Ed. Quinto Sol. México (RELME 12, 1998).
23. WENZELBURGER, Eliriede. Cálculo Diferencial. Guía Didáctica para Maestros y Alumnos. Grupo Editorial. Iberoamericana S.A. de C.V. México. 1995.

desventajas porque no es fácil de entender que el límite de las pendientes de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se llama derivada. Además no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el dinamismo de una derivada que describe el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. A veces también se introduce la derivada como factor de proporcionalidad de manera que la recta g: $x \rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la mejor aproximación lineal de la función f en una variable de x_0, entonces la diferencia $g(x) - g(x_0)$ es proporcional a la diferencia $x - x_0$ con factor de proporcionalidad $f'(x_0)$. Este método aritmético – algebraico tiene la desventaja de ser muy abstracto y de revelar poco acerca del concepto fundamental de una matemática de cambio; la razón de cambio. En casi todos los problemas reales en los cuales hay una dependencia funcional de magnitudes no solo interesan los valores de las magnitudes sino los cambios de estas, o las razones de cambio promedio de una función f:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para todas las razones de cambio, una vecindad pequeña de a se puede considerar la razón de cambio local:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - f(a)}{x - a}$ como una aproximación adecuada.

Un ejemplo típico de razón de cambio es lo que físicamente se conoce como velocidad. Una velocidad es la razón (el cociente) entre una distancia y un tiempo, y describe el cambio en la posición de un cuerpo con respecto al tiempo transcurrido.

Ciertas razones de cambio tienen nombres especiales:

La razón de cambio del tamaño de una persona se llama tasa de crecimiento. La razón de cambio de la posición de un vehículo con respecto al tiempo se llama velocidad. La razón de cambio de la temperatura de un líquido se llama velocidad de enfriamiento (o calentamiento). En economía interesan por ejemplo la razón de cambio del índice de precios a nivel nacional. Otra razón de cambio es la tasa de natalidad de una nación que describe el incremento de la población.

La ilustración del concepto fundamental del cálculo a través de gráficas es muy útil ya que existe una relación estrecha entre pendientes y razones de cambio. Una razón de cambio característica para una gráfica en forma de segmentos de línea recta sólo cambia si hay variación en la pendiente de ésta. Si crece la gráfica, la razón de cambio y la pendiente son positiva. Si decrece la gráfica, la razón de cambio y la pendiente son negativa.

Ejemplo 1: Supongamos que el precio de un artículo en un primer mes era de 600 unidades monetarias (um) y en el tercer mes subió a 1.200 (um) (Tabla 1)[24].

---

24. Ejemplo 1. Tomado de: WENZELBURGER, Eliriede. Cálculo Diferencial. Guía Didáctica para Maestros y Alumnos, Grupo Editorial. Iberoamericana S.A. de C.V. México. 1995.

Mes	Precio
1	600 pesos
3	1.200 pesos

Tabla 1

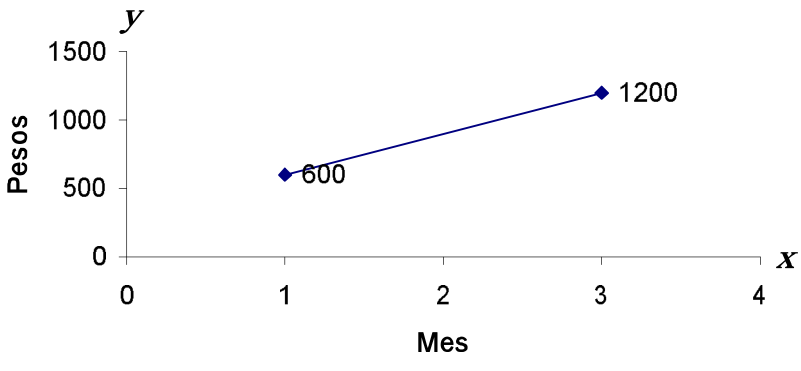
Al graficar estos datos se describe una función lineal (figura 1a) y suponer que el incremento del precio ocurrió como en la fig. 1b.

La razón de cambio del precio se define de la siguiente manera. Se calcula el cambio en dirección vertical (1.200 – 600) y se divide por el cambio en dirección horizontal (3-1). Así:

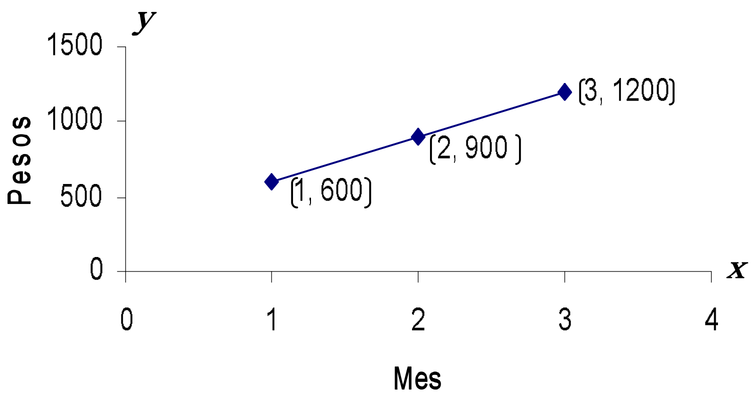
$$\text{Razón de cambio} = \frac{600}{2} = 300 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

Este valor numérico caracteriza el incremento del precio. Si en el cuarto mes se ofreció el producto con 30% de descuento como promoción (fig. 1c), así:

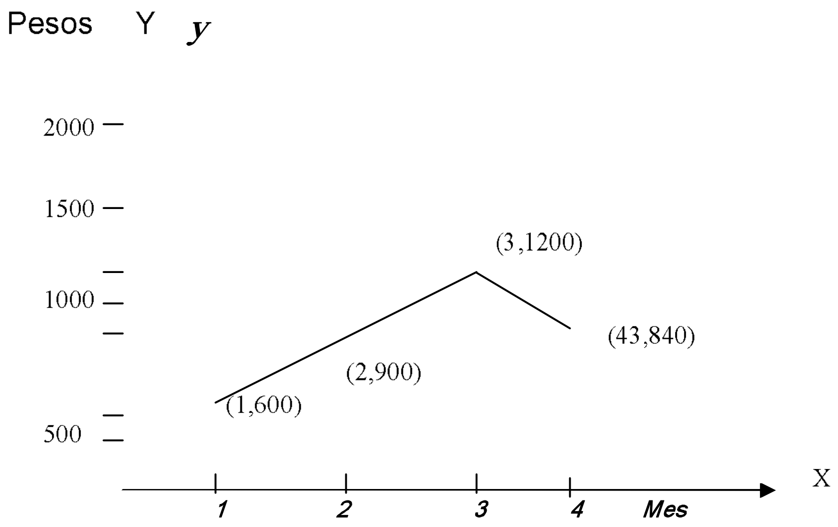
$$\text{Razón de cambio} = \frac{840 - 1200}{4 - 3} = -\frac{360}{1} = -360 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$



(a)



(b)



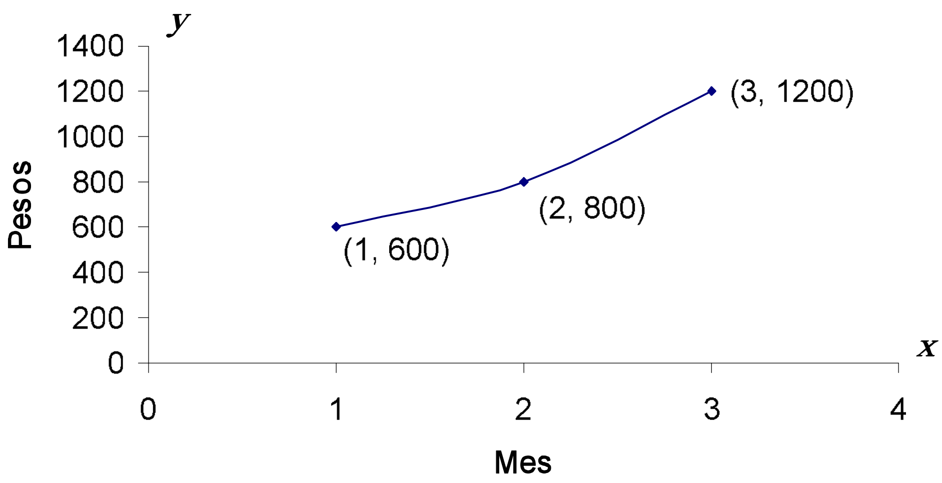
(c)
Fig. 1

Ahora calculemos la razón de cambio para un valor intermedio de tiempo; por ej. Para 2 meses, así:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{900 - 600}{2-1} = \frac{300}{1} = 300 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

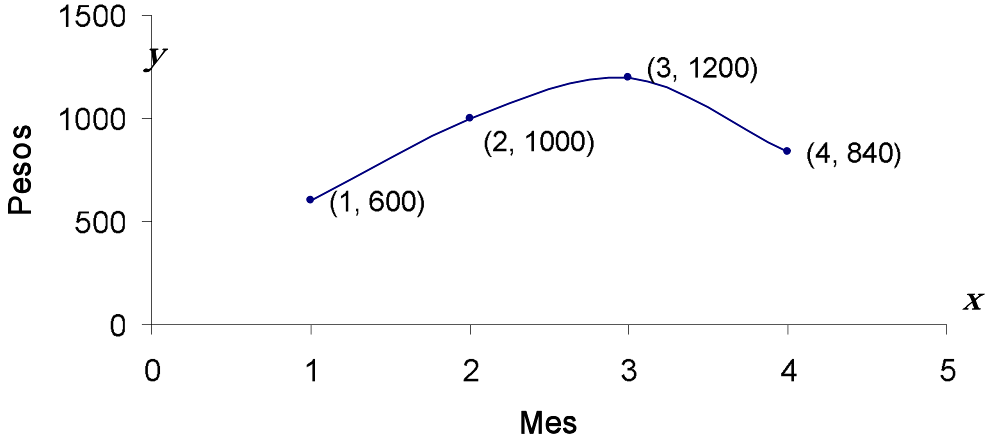
Esta razón de cambio es igual a la primera. Al observar la relación entre razón de cambio y la pendiente de una recta; podemos decir que ésta última en un sistema de coordenadas x, y es una medida de la razón de cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x.

Ejemplo[25] 2: Utilicemos el ejemplo anterior pero con cambios en algunos datos. Supongamos que los precios no subieran siguiendo una relación lineal (verse fig. 2a,b)



(a)

25. Ejemplo 2. Tomado de: WENZELBURGER, Eliriede. Cálculo Diferencial. Guía Didáctica para Maestros y Alumnos, Grupo Editorial. Iberoamericana S.A. de C.V. México. 1995.



(b)
Fig. 2

De acuerdo a la figura 2(a) el precio al principio del segundo mes parece ser de $ 800.00. Veamos la razón de cambio entre el primer y segundo mes.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{800 - 600}{1} = 200 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

Ahora calculemos la razón de cambio del precio en el tercer mes;

$$\text{Razón de cambio} = \frac{1.200 - 800}{3-2} = \frac{400}{1} = 400 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

Observamos que el valor de las razones de cambio anteriores es diferente.

Si suponemos ahora que los precios cambian de acuerdo a la fig. 2(b) podemos observar las siguientes razones de cambio para 1 mes:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{1000 - 600}{1} = 400 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{1200 - 1000}{1} = 200 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{840 - 1200}{1} = 360 \left[\frac{\text{Pesos}}{\text{Mes}}\right]$$

Podemos decir que la diferencia entre una curva y una línea recta es la variación continua de la razón de cambio a lo largo de la curva.

Al usar un método gráfico es importante determinar las razones de cambio para muchos puntos muy cercanos. De esta manera se toman en cuenta todas las características importantes de la curva original.

La función de razones de cambio con respecto a la variable independiente original se deriva de los valores de la función que se estudia; por eso llamamos a esta nueva función "la derivada".

Entre una función y su derivada existe una relación especial.

Función Original	Función Derivada
Crece	Valor positivo
Decrece	Valor negativo
Queda igual, es constante	Valor cero

Tabla 2

2.3. MARCO CONCEPTUAL

La nueva propuesta para abordar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación colombiana que lanza el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de los lineamientos corriculares de matemáticas exige la aplicabilidad del conocimiento matemático ubicado en un contexto histórico y socio - cultural, atendiendo a las necesidades que tiene el humano dentro de la sociedad. Esta nueva visión de la educación exige también que se creen situaciones problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, conceptos, plantear preguntas y dar solución a ellas, analizar, interpretar y argumentar por medio de dichas situaciones.

Después de hacer una consulta bibliográfica para mirar los diferentes conceptos de situaciones problema, nos interesamos por el presentado en la tesis “evaluación de competencias en matemáticas a través de la resolución de problemas” de Inés Domínguez et. All.

La cual dice: Las situaciones problema son enunciados que tienen información no necesariamente matemática, en donde se plantean preguntas, referidas o no a las matemáticas, para adelantar una acción que requiera del uso de la matemática para resolverla. Mediante las situaciones problema es posible evidenciar la comprensión y el uso de conceptos, terminología, notación, destrezas y estrategias de aquella que desde la situación sea matematizable.

Atendiendo a éste concepto; asumimos, el diseño de las situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra, con el tratamiento de las diferentes interpretaciones del concepto de derivada a desarrollar en este trabajo.

Para tal diseño también se tienen en cuenta algunos aspectos de la evaluación por competencias comunicativas en matemáticas; por tal motivo tomamos los modelos de estructura de una situación problema presentadas por la tesis "evaluación de competencias en matemáticas a través de la resolución de problemas y por el Instituto Colombiano para el Fomento de Educación Superior (ICFES) en las pruebas de Estado, dirigidas a los estudiantes que finalizan la educación básica y media.

La tesis presenta la siguiente estructura de una situación problema:

SITUACION	Para determinar la eficacia de un nuevo eslogan de venta en una fabrica de jabón, se pregunto a 10 personas tomadas al azar, por la cantidad de producto comprado antes y después de haberse llevado a cabo la campaña publicitaria. El resultado es el siguiente:

Cantidad del producto comprado										
Antes	6	5	1	4	3	1	3	6	2	9
Después	10	4	8	4	2	3	9	5	7	8

Tabla 3

CUESTIONAMIENTO	De acuerdo a la información suministrada, el gerente de la fábrica debe continuar con la campaña publicitaria, porque:
OPCIONES	A. El 60% de las personas indagadas, compraron más o igual cantidad de producto, después de la campaña publicitaria. B. La campaña publicitaria ayudó a aumentar en un 15% las ventas del producto. C. Las ventas del producto aumentaron en un 50% en relación con las anteriores, por ayuda del nuevo eslogan. D. La campaña ayudó a aumentar las ventas en un 60%.

Este tipo de situación problema evalúa las competencias comunicativas en el área de matemáticas. El concepto de evaluación por competencias comunicativas: interpretativa, argumentativa y propositiva que manejan los autores de la, son:

La evaluación por competencias en matemáticas, consiste en una prueba indagatoria a través de situaciones problema que permiten precisar en el alumno su capacidad para usar sus conocimientos matemáticos básicos en un determinado contexto.

LA COMPETENCIA INTERPRETATIVA: refiere la capacidad del estudiante para comprender, hacer lectura, dar sentido, establecer relaciones y confrontaciones, identificando lo matematizable de la situación problema planteada. Se manifiesta cuando el estudiante modela, identifica y traduce la información dada, hace comparaciones, establece conclusiones y deducciones a partir de los hechos planteados en situaciones problema, utilizando ideas y relaciones a través de su saber matemático.

LA COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: Refiere la capacidad del estudiante para explicar en forma coherente y precisa sus razones y justificaciones de los hechos sucedidos y planteados en una situación problema. Se manifiesta cuando el estudiante da razones válidas dentro de la matemática que le permitan establecer conclusiones y condiciones necesarias y suficientes, relaciones con los hechos propuestos en una situación problema.

LA COMPETENCIA PROPOSITIVA: refiere la capacidad crítica y creativa del estudiante para producir y transformar nuevos significados al interactuar en un determinado contexto. Se manifiesta en la toma de decisiones que el alumno realiza a partir de su creatividad y transformaciones significativas en un contextos situado, al generar hipótesis, establecer conjeturas, hacer deducciones de tal manera que se evidencie su nueva forma de prever o dar solución a un problema planteado.

El ICFES a través del examen de estado, presenta la siguiente estructura de una situación problema:

Conteste las preguntas 1 a 3 teniendo en cuenta la siguiente situación:

A Juan le corresponde en una cooperativa vender electrodomésticos y cobrar la cuota fija de afiliación mensual que todo socio debe cancelar por el hecho de estar afiliado a la cooperativa. Juan debe tener en cuenta que a cada socio, cuando compra un electrodoméstico en la cooperativa, se le debe dar un descuento del 20% sobre el valor del electrodoméstico y se le adiciona un 16% por concepto del impuesto al valor agregado (IVA), y además debe tener en cuenta que cada socio sólo puede comprar un electrodoméstico mensualmente. Juan, con el fin de volver más funcional su labor de vender y cobrar, decide relacionar los datos anteriores en la siguiente función.

$$F(X) = C + X - \frac{1}{5}X + \frac{4}{25}X$$

1. En la función de Juan la X y la C representan respectivamente.

A. Números de artículo que vende Juan y costo de un artículo.

B. Cualquier cantidad de dinero y costo de un artículo.

C. Cualquier cantidad de dinero y cuota de afiliación.

D. Costo de un artículo que vende Juan y cuota de afiliación.

Claves: C, D.

2. De la función se puede deducir que un socio de la cooperativa que no compra electrodomésticos no paga nada. Esta afirmación es.

A. Verdadera, porque al asignar a la variable el valor de cero, el resultado obtenido es cero.
B. Verdadera, porque en la formula hay un valor definido para cada precio de cada electrodoméstico, y en ese caso el valor del electrodoméstico es cero.
C. Falsa, porque la cuota afiliación en la función es independiente del valor del electrodoméstico y por lo tanto del impuesto y del descuento.
D. Falsa, porque al asignar a la variable el valor cero debido a que este socio no compra ningún electrodoméstico, se tiene que se debe pagar como mínimo la cuota de afiliación.

Claves: D, C.

3. Suponiendo que llega un nuevo electrodoméstico a la cooperativa, la expresión de la función de Juan debería.

A. Modificarse, porque fue elaborada para algunos electrodomésticos.
B. Modificarse, porque el precio del nuevo electrodoméstico modificaría el valor del descuento.
C. Permanecer igual, porque a la variable de la función se le puede asignar cualquier valor real positivo.
D. Permanecer igual, porque lo que realmente modificaría la expresión es algún cambio en el descuento, la cuota fija y el impuesto.

Claves: C, D.

Las situaciones problema diseñadas en el desarrollo de este trabajo se construyeron dentro de diferentes contextos, manejando en cierta medida la evaluación por competencias comunicativas en matemáticas; para esto se tuvo en cuenta los aspectos teóricos y modelos de situaciones problema, de la tesis antes mencionada y del examen de Estado presentado por el ICFES. A través de dichas situaciones problema pretendemos posibilitar la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de calculo I de los programas Ingeniería Agrícola, Ingeniería Civil y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre.

El concepto de comprensión que adoptamos es el presentado por David Perkins. "Comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe"; este autor maneja la comprensión a partir de un criterio de desempeño flexible. Perkins también presenta dos ideas para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, primero pídanle que haga algo que ponga su comprensión en juego, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto. Segundo lo que los estudiantes respondan no solo demuestra su nivel de comprensión actual si no lo más probable es que los haga avanzar. Al trabajar por medio de su comprensión en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor.

En cuanto a la "conceptualización" tenemos en cuenta las ideas de Miguel y Julian de Zubiría[26] que definen al concepto como "organizaciones internas de nociones",

26. ZUBIRIA, Miguel y Julián. Fundamentos de Pedagogía Conceptual. Plaza y Janes Editores. Colombia. 1989. Pág. 112, 146 y 152.

dicen que mientras los instrumentos intelectuales con que cuenta el individuo corresponden a categorías; las cuales son conceptos de conceptos ó un sistema conceptual. Para los investigadores la conceptualización es "la abstracción de las nociones de un concepto específico".

En el campo de la formación educacional matemática, las reflexiones y conceptualizaciones, hacen mirar a esta disciplina como una ciencia que debe estar ligada a otras disciplinas, a la actividad humana y a la cultura; es decir, considerándola como un constructor abierto. Todo este conjunto de consideraciones hacen parte y fortalecen a la matemática educacional, colocando a esta disciplina en un campo significativo; con base a este, abordamos el planteamiento de Edwin R. Cars[27] (1965) en la génesis del concepto que expresa "las generalizaciones, aprendidas como resultado del pensamiento reflexivo no se olvidan; por lo contrario, llegan a ser cada vez más significativas a medida que se aplican a nuevas situaciones". En el aprendizaje significativo las ideas se relacionan sustancialmente con lo que el alumno ya sabe; Así, los nuevos conocimientos se vinculan de manera estrecha con los anteriores.

Este estudio se basa en las ideas del aprendizaje significativo, el cual permitirá mirar si los estudiantes interpretan el concepto de derivada de manera significativa. Asumimos como interpretación "las diferentes manifestaciones,

---

27. ZUBIRIA, Miguel y Julián. Fundamentos de Pedagogía Conceptual. Plaza y Janes Editores. Colombia. 1989. Pág. 112, 146 y 152.

presentaciones o definiciones que se den respecto a la derivada".

De acuerdo con las interpretaciones que se pueden hacer de la derivada; Thurston[28] señaló que la gente tiene muchas maneras diferentes de entender la derivada, por ejemplo: como pequeña tasa de cambio (infinitesimal); como la derivada de x^n es nx^{n-1}, como definición formal; como la pendiente de una recta; como velocidad instantánea, etc; es una lista interminable de todas las posibles maneras de pensar acerca de la derivada.

Teniendo en cuenta las diferentes maneras de interpretar la derivada señaladas por Thurston, a continuación presentaremos algunas definiciones de está dadas por diferentes autores.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO

La derivada de una función f(x) en un punto x =a, es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x), en el punto P(a, f(a)) de la gráfica de f(x) (véase figura 3).

La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P(a, f(a)) y Q(a+h, f(a+h)) se determina por el cociente:

---

28. THURSTON. Tomado de: OLIVEROS, José Rodolfo. Aprendizaje de la derivada a Través del flujo Instantáneo. Universidad Autónoma Chapingo – Cinvestav – IPN. México. "Resumen de RELME 12" 1998. Pág. 66.

$$Msec = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al tomar el límite de este cociente cuando h → 0, el punto Q tiende a P y en consecuencia, la recta secante tiende a la recta tangente. Por lo tanto f'(a) será el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto P. (véase figura 4). Simbólicamente:

$$Mtan = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

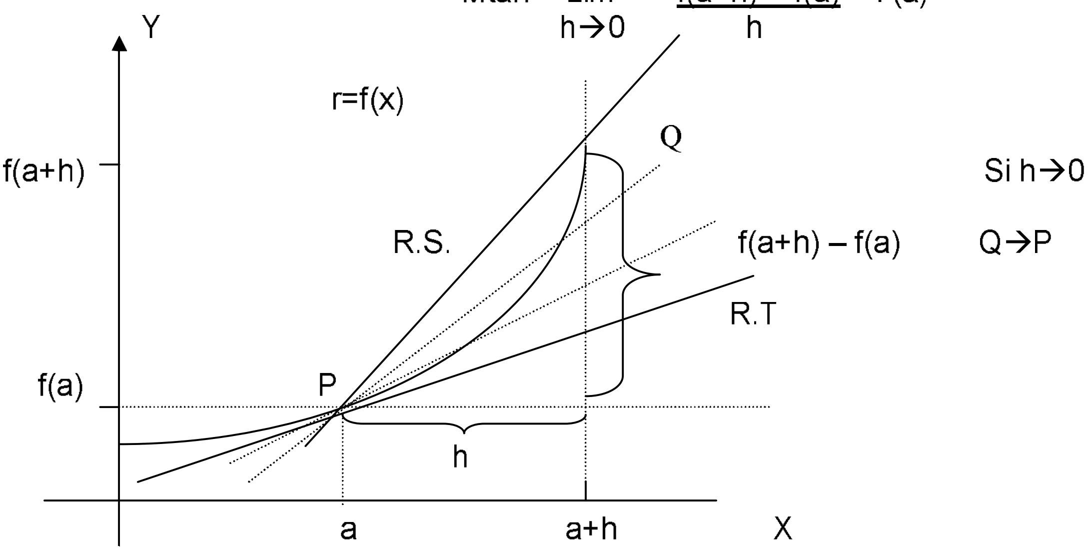


Fig. 3

La derivada de una función en un punto corresponde a la pendiente de la gráfica de la función en dicho punto.

DEFINICIÓN DE DERIVADA COMO TASA DE CAMBIO

La expresión "tasa de cambio de una función" es matemáticamente equivalente a "la derivada de la función (con respecto a una variable independiente)".

La tasa de cambio es también llamada "tasa de variación".

- TASA DE VARIACION MEDIA

La tasa de variación de una función f(x) en el intervalo [a,b], es la razón entre el incremento de la función y el incremento de la variable, simbólicamente:

$$Tvm = \frac{\Delta f(x)}{\Delta X}; \text{ o bien, } Tvm = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

La tasa de variación instantánea de una función f(x) en un punto a corresponde al límite de la tasa de variación media cuando b → a, simbólicamente:

$$Tvi = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \text{ o bien, } Tvi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

La tasa de variación instantánea se refiere siempre a un punto. Este concepto coincide con el concepto de derivada de una función en un punto.

La interpretación de la derivada como tasa de variación instantánea de una función, con frecuencia es aplicable en problemas económicos y administrativos.

Por ejemplo: en los conceptos de costo marginal, ingreso marginal, elasticidad, propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

- DEFINICIÓN DE DERIVADA COMO VELOCIDAD INSTANTÁNEA

El término velocidad con frecuencia se describe como una cantidad que determina la rapidez y la dirección de un objeto en movimiento.

- VELOCIDAD PROMEDIO

La velocidad promedio es la razón entre la diferencia de las distancias y la diferencia de los tiempos.

En general, si f(t) es la función distancia cubierta desde el instante 0 hasta el instante t. Entonces, para dos instantes a y b (a<b), la diferencia f(b) – f(a) es la distancia recorrida entre los instantes t = a y t=b; se determina la velocidad promedio Vprom por:

$$\text{Vprom} = \frac{\text{distancia}}{\text{Tiempo}} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

- VELOCIDAD INSNTANTÁNEA

La velocidad instantánea es el límite de la velocidad promedio cuando el tiempo es más pequeño(t=a). En general, si f(t) representa la distancia desde una localización dada a un objeto en el instante t, entonces la velocidad instantánea en el instante t = a está determinada por:

$$V(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Siempre y cuando el límite exista.

Así, la función velocidad es la derivada de la función distancia en un instante t = a.

Además de calcular la velocidad, la derivada permite calcular la razón a la cual cambia una gran variedad de cantidades.

- DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

"La derivada de una función en un punto corresponde a la tasa de variación instantánea de la función en un punto".

$Tvi(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, donde f'(a) es la derivada de la función f(x) en el punto a.

f'(a) es un número real; si este límite no existe, la función no será derivable en el punto a.

f'(a)también se suele escribir como:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ o } f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- DERIVADAS LATERALES

La derivada por la izquierda de la función f(x) en x = a se define como:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

"h tiende a cero, siendo h < 0".

Análogamente, la derivada por la derecha de la función f(x) en x = a, se define como:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

"h tiende a cero, siendo h>0"

PROPIEDAD 1.

Una función es derivable en un punto si sus derivadas laterales existen y son iguales.

PROPIEDAD 2.

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en dicho punto. Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él.

DEFINICION FORMAL DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de f(x) es la función f'(x) dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Siempre y cuando el límite exista. El proceso de calcular una derivada se llama derivación.

El cociente $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ se llama cociente diferencial.

NOTACIONES ALTERNAS: La función derivada se ha denotado con f'(x), que se lee <<f prima de x>>. Hay otras notaciones usadas comúnmente, cada una con ventajas y desventajas. Uno de los coinventores del cálculo, Gottfried Leibniz, usó la notación

$\frac{d\,f(x)}{dx}$ (Notación de Leibniz)

para la derivada. Si se escribe y = f(x), las siguientes son alternativas para denotar la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

La expresión $\frac{d}{dx}$ se llama operador diferencial y expresa que debe tomarse la derivada de cualquier expresión que siga.

- EJEMPLOS DE ALGUNAS SITUACIONES QUE ILUSTRAN EL USO DE LAS DIFERENTES INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE DERIVADA:

- SITUACION 1

¿ Qué tan rápido puede correr una persona?

En la época moderna, el ganador de los 100 metros planos en los juegos olímpicos ha ganado el título del “ser humano más rápido del mundo”. De aquí surge una pregunta matemática significativa: ¿exactamente que quiere decir el más rápido?; muchos de nosotros podemos imaginar medidores de rapidez unidos de alguna manera a los corredores para que cualquiera que registre la mayor rapidez pueda ser declarado el más rápido. Se puede argüir razonablemente que es importante también mantener una rapidez alta durante un cierto período; pero concentrémonos en la rapidez instantánea que puede ser medida por un aparato. Sin un aparato medidor, ¿Cómo se puede determinar la rapidez máxima de un corredor? Hasta hoy tenemos la fórmula elemental:

Distancia = razón x tiempo

Despejando la razón (rapidez), se obtiene:

Rapidez = distancia / tiempo

Sin embargo, ésta fórmula solamente da una rapidez promedio en cualquier lapso y cualquier distancia dados.

Por ejemplo: Supongamos que un corredor cubre 100 metros en 10 segundos. La rapidez promedio es 100m/10s = 10 m/s. Pero esta no es la rapidez máxima que puede alcanzar el corredor ya que a los velocistas no se les permite correr desde que inician la carrera sino poco a poco van adquiriendo la rapidez y aun al finalizar la carrera puede que no tenga velocidad máxima ya que puede estar cansado. Por lo tanto durante la carrera habrán algunos períodos en que el corredor alcanza su máxima rapidez o velocidad; es decir, que la velocidad del corredor varia a determinados intervalos de tiempo. Se puede observar que si se promediara en intervalos de tiempo y distancia más cortos, se podría tener una aproximación mayor de la rapidez máxima. Por ejemplo, si un corredor cubre 10 metros en 0,91 segundos, la rapidez promedio es 10m/0,91s = 11 m/s. Esto nos indica que entre más corto sea el intervalo que se use más preciso tiende a ser el cálculo de la velocidad.

SITUACION 2.

La derivada como velocidad instantánea.

Supongamos que un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba desde el suelo a una velocidad de 45 m/s. Despreciando la fricción con el aire y suponiendo que sólo actúa la gravedad; así el proyectil se mueve en línea recta. Sea f(t) la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. A causa de la gravedad el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a valer cero, y en ese momento cae al suelo. Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura f(t) está dada por $f(t) = 45t - 5t^2$. El término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Observamos que f(t) = 0 cuando t=0 y t = 9, osea, que el proyectil regresa a la tierra después de 9 segundos, por lo tanto la altura f(t) es válida para $0 \leq t \leq 9$. Determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento.

SOLUCION.

Primero que todo determinemos la velocidad media durante un intervalo de tiempo, es decir, desde el instante t al t + h; se define la velocidad media o promedio como el cociente de las diferencias de las distancias entre el intervalo de tiempo.

A partir del siguiente gráfico:

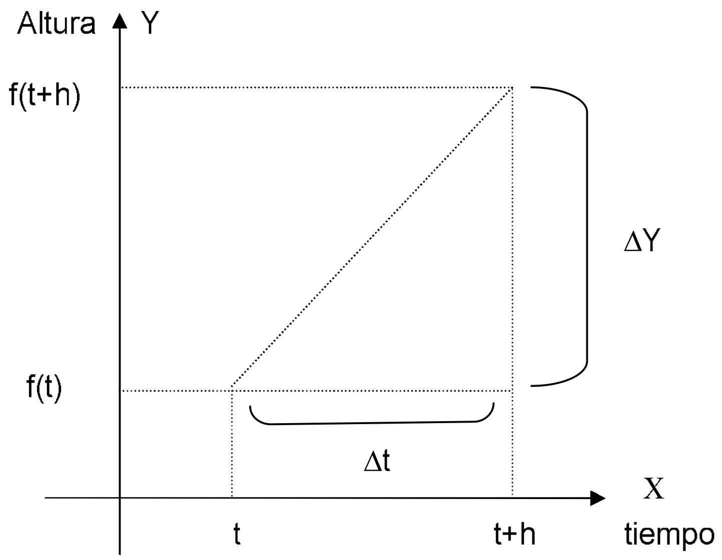


Fig. 4

$Vm = \frac{\Delta y}{\Delta t}$; donde Vm es la velocidad media.

$$Vm = \frac{f(t+h) - f(t)}{t + h - t}$$

$$\boxed{Vm = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}$$

La distancia recorrida en un instante t es:

$f(t) = 45t - 5t^2$. En el tiempo t + h, tomando $0<h<1$ la distancia recorrida es.

$$f(t+h) = 45(t+h) - 5(t+h)^2$$

$$= 45t + 45h - 5(t^2 + 2ht + h^2)$$

$$= 45t + 45h - 5t^2 - 10ht - 5h^2$$

Luego Vm en [t,t + h] está dada por:

$$Vm = \frac{\cancel{45t} + 45h - \cancel{5t^2} - 10ht - 5h^2 - \cancel{45t} + \cancel{5t^2}}{h}$$

$$Vm = \frac{45h - 10ht - 5h^2}{h}$$

$$Vm = \frac{\cancel{h}(45 - 10t - 5h)}{\cancel{h}}$$

$$Vm = 45 - 10t - 5h$$

Si $h \rightarrow 0$, $Vm \rightarrow Vi = 45 - 10t$, de donde Vi es la velocidad instantánea. Formalmente se representa por

$Vi = \lim_{h \to 0} (45-10t-5h) = 45 - 10t$; este límite corresponde a la función derivada de la función altura del proyectil en cualquier instante t.

SITUACION 3.

La derivada como tasa de cambio.

En un laboratorio de biología se observa el crecimiento del número de ciertas bacterias al transcurrir cada hora como se muestra en la siguiente tabla.

Nº al inicio	Después de 1h	Después de 2h	Después de 3h	Después de 4h
50	51	54	59	66

Tabla 4

Esta información se representa en la siguiente gráfica.

Nº de bacterias

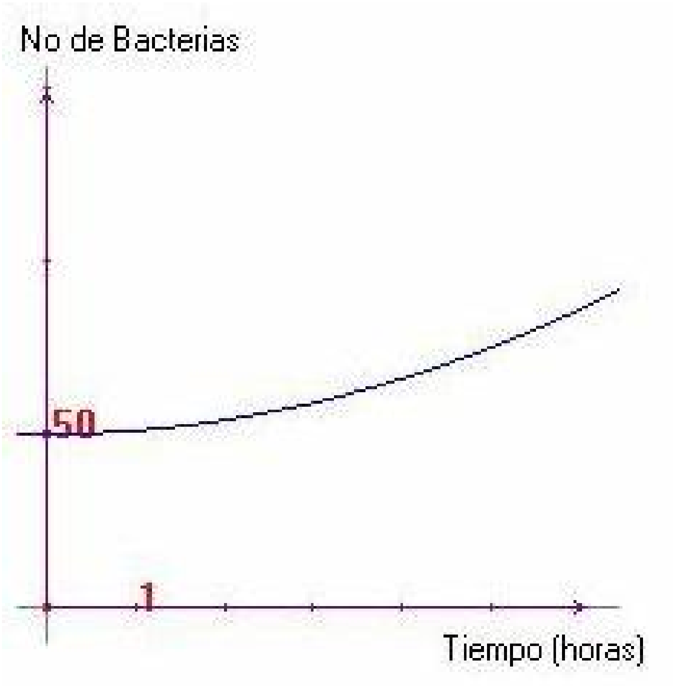


Fig. 5

Determinar: la tasa de cambio media del crecimiento del número de bacterias durante las dos primeras horas, la tasa de cambio instantánea en la segunda hora y la tasa de cambio instantánea en cualquier hora t.

SOLUCION

Podemos establecer a partir de la gráfica (fig. 5) y de la tabla de valores (tabla 4), la ecuación de la función que determina el número de bacterias al transcurrir un tiempo es: $f(x) = x^2 + 50$ como la tasa de cambio media se define también por el cociente que determina la velocidad media, entonces.

$$T.C.m = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

La tasa de cambio media del crecimiento de las bacterias para las primeras 2 horas se obtiene así:

$$T.C.m = \frac{f(2) - f(0)}{2-0}$$

$$T.C.m = \frac{54 - 50}{2}$$

$$T.C.m = 2 \left[\frac{\text{bacterias}}{\text{horas}} \right]$$

Ahora la tasa de cambio media en el intervalo [2,2+h] está dada por:

$$T.C.m = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$T.C.m = \frac{(2+h)^2 + 50 - (2^2 + 50)}{h}$$

$$T.C.m = \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 + \cancel{50} - \cancel{4} - \cancel{50}}{h}$$

$$T.C.m = \frac{4h + h^2}{h}$$

$$T.C.m = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}$$

$$T.C.m = 4 + h$$

Si h → 0, entonces T.C.m → T.Ci =4.

Formalmente la T.Ci se representa; para este caso con el Limite: $\lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$

Luego la tasa de cambio instantánea de crecimiento del número de bacterias en la segunda hora es de 4 [bacterias/horas].

Para determinar la tasa de cambio instantánea del crecimiento del número de bacterias en la hora t; primero hallamos la T.C.m. de f(x) en [t, t+h].

$$T.C.m = \frac{(t+h)^2 + 50 - (t^2 + 50)}{h}$$

$$T.C.m = \frac{\cancel{t^2} + 2th + h^2 + \cancel{50} - t^2 - \cancel{50}}{h}$$

$$T.C.m = \frac{h\ (2t + h)}{h}$$

$$T.C.m = 2t + h$$

Si h → 0, entonces T.Cm → T .Ci = 2t; formalmente se define como

$T.Ci = \lim_{h \to 0} (2t+h) = 2t$ que corresponde a la derivada de f(x) en cualquier instante t.

SITUACIÓN 4.

La derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en determinado punto.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 1$ en $x = 1$.

SOLUCIÓN

Representamos a la parábola $y = x^2 + 1$ y las rectas tangente y secante a ella que pasan por el punto (1,2) en la siguiente gráfica.

Fig. 6

Si $h \to 0$ la recta secante que pasa por los puntos P(1,2) y Q(1+ h, f(1+h)) tiende a la recta tangente que pasa por el punto (1,2). Así la pendiente de la recta secante (m_{RS}) tiende a la pendiente de la recta tangente (m_{RT}). Por la teoría desarrollada sobre la interpretación geométrica de la derivada en un punto, se tiene:

$$m_{RT} = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$m_{RT} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 + 1 - (1^2 + 1)}{h}$$

$$m_{RT} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$m_{RT} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$m_{RT} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2 + h)}{\cancel{h}}$$

$$m_{RT} = \lim_{h \to 0} 2 + h$$

$$m_{RT} = 2$$

Ahora para hallar la ecuación de la recta tangente utilizamos la expresión establecida anteriormente.

$Y - f(a) = m_{RT} (X - a)$ ó $y - f(a) = f'(a).(x - a)$

Así; $y - f(1) = 2(x - 1)$, despejando a y, tenemos:

$y = 2 (x - 1) + f(1)$

$y = 2(x - 1) + 2$

$y = 2x - 2 + 2$

$y = 2x$

Luego $y=2x$ es la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2+1$ en el punto (1,2).

3. METODOLOGIA

3.1. TIPO DE INVESTIGACION

Esta propuesta se fundamenta en un estudio cualitativo de tipo descriptivo ya que, pretende valorar cualitativamente la evolución de la comprensión del concepto de derivada que desarrollen los estudiantes por medio de la solución de situaciones problema que involucran razón de cambio de una variable con respecto a otra diseñadas en diferentes contextos.

3.2. POBLACION Y MUESTRA

La propuesta planteada fué aplicada en estudiantes de la asignatura calculo I impartida en el segundo semestre de los programas licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil de la Universidad de Sucre; los cuales son un total de 43, distribuidos en la jornada matinal del segundo período del año 2001.

La muestra tomada aleatoriamente es de 30 estudiantes seleccionados equitativamente de los tres programas donde el 93.33% son hombre y el 6.66% restantes son mujeres.

3.3. RECURSOS

3.3.1. Recursos Didácticos

El grado de comprensión e interpretación del concepto de derivada en los estudiantes de la asignatura cálculo I, de los programas licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil, se determina por el conocimiento que demuestran tener y por el uso del conocimiento acerca de la derivada en la solución de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, en diferentes contextos. En procura del desarrollo de tal comprensión nos apoyamos en:

- El cuestionario Nº 1, para mirar la conceptualización que tenían los estudiantes respecto a conocimientos matemáticos relacionados con la derivada y del concepto de la misma.
- Orientaciones pedagógicas realizadas por parte de los proponentes a los estudiantes antes mencionados.
- El cuestionario Nº 2, para evaluar el logro alcanzado de la propuesta.

3.3.2. Recursos Humanos e Institucionales

Para el desarrollo de este trabajo se contó con la participación activa de 30 estudiantes de la asignatura calculo I, del segundo período del 2001, de los programas licenciatura en matemáticas, ingeniería agrícola e ingeniería civil de la

Universidad de Sucre, además con la colaboración de los docentes titulares de la asignatura antes mencionada y algunas otras; quienes nos cedieron espacios dentro de su intensidad horaria para llevar a cabo las orientaciones pedagógicas y aplicar los cuestionarios diseñados.

3.4. DESCRIPCION DEL PROCESO METODOLOGICO

Con el propósito de alcanzar los objetivos planteados, se elaboró una propuesta que se desarrolla, a través de las siguientes etapas:

Etapa 1.

- Diseño del cuestionario Nº 1; en el cual se presentan interrogantes y problemas que permiten indagar por la conceptualización que tenían los estudiantes de algunos conocimientos matemáticos básicos, relacionados con el concepto de derivada; los cuales consideramos necesarios para el estudio del concepto de la misma, tales como: variación, razón de cambio, intervalo, recta secante a una curva, recta tangente a una curva, pendiente de una recta tangente a una curva, función, limite de una función, derivada de una función, entre otros.

- Aplicación del cuestionario Nº 1, en el segundo período del año 2001, a los 30 estudiantes seleccionados; el cual fue resuelto en un lapso de tiempo de 100 minutos.

Etapa 2.

- Orientaciones pedagógicas realizadas por los proponentes en dos días, durante 2 horas por día; en donde se explicó el concepto de derivada presentado como: tasa de cambio instantánea, pendiente de una recta tangente a una curva y velocidad instantánea; tal como se presenta en el marco conceptual.

También se explicó cuatro ejemplos de situaciones problema que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, en los contextos: física, biología y geometría (ver pág. 52-60), en las cuales se mostraron algunas interpretaciones del concepto de derivada para posibilitar la comprensión del mismo. La situaciones problemas explicadas, se tomaron de algunos textos de cálculo, pero se les hicieron ciertas modificaciones en la presentación y la solución de éstas, para de alguna forma acercar al estudiante en el desarrollo de las competencias o acciones: interpretación, argumentación y proposición.

- Diseño del cuestionario Nº 2; en donde se presentan tres situaciones problemas que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, construidas en los contextos: geometría, física y economía, siguiendo el modelo usado por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), en el examen de Estado; en donde presentan la situación, el cuestionamiento o pregunta y cuatro opciones de respuestas (A, B, C, D), evaluando las competencias o acciones comunicativas en matemáticas: interpretación, argumentación y proposición.

Las tres situaciones problema presentadas en el cuestionario Nº 2, se construyeron de la siguiente manera:

- En la situación Nº 1, se plantean dos cuestionamientos o preguntas; cada una con cuatro opciones de respuesta (A, B,C,D). En la pregunta 1, se busca evaluar la acción interpretación y tiene la opción valida C, como respuesta. En la pregunta 2, se evalúa también la acción interpretación y tiene dos opciones válidas de respuesta C y B; la primera es la respuesta con mayor complejidad de conocimiento matemático y la segunda es la respuesta con menor complejidad de conocimiento matemático.

- En la situación Nº 2, se plantea una pregunta con cuatro opciones de respuesta (A, B, C, D), de las cuales; A y D son las opciones válidas con las respuestas de mayor y menor complejidad de conocimiento matemático respectivamente. Dicha pregunta busca evaluar la competencia proposición en los estudiantes.
- En la situación Nº 3, se plantea una pregunta con cuatro opciones de respuestas (A, B, C, D); de las cuales, C es la opción con la respuesta válida y la opción B se diseñó de tal manera que es verdadera para la situación pero no es válida para la afirmación que se hace en el cuestionamiento; esto se hizo para que el estudiante al analizar la situación y el cuestionamiento, establezca

cuál es el argumento válido, ya que en dicha pregunta se evalúa la competencia argumentación.

- Aplicación del cuestionario Nº 2, en el primer periodo del año 2002, a los 30 estudiantes seleccionados, con una duración de 50 minutos. Este cuestionario se aplicó con el objeto de evaluar el logro alcanzado por los estudiantes, después de haber estudiado el concepto de derivada durante el curso de cálculo I y de haber atendido a las explicaciones hechas por los proponentes en las orientaciones pedagógicas.

- Análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario Nº 2.

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS
PROGRAMA LICENCIATURA EN MATEMATICAS

CUESTIONARIO Nº 1

Este cuestionario tiene el objetivo de recoger información sobre el acercamiento conceptual que has tenido a ciertos elementos básicos en el estudio del concepto de derivada.

Agradecemos tu colaboración respondiendo con sinceridad las siguientes preguntas:

Nombre del Alumno:____

Programa: ____

1. ¿Qué es variación?

1.1. Escribe un ejemplo cotidiano donde se presente la variación.

2. ¿Qué es razón de cambio?

2.1. Da un ejemplo cotidiano de razón de cambio.

3. ¿Qué es un intervalo?

3.1. Muestra un ejemplo cotidiano de intervalo.

4. ¿Qué es la pendiente de una recta?

4.1. ¿Cómo se calcula?

4.2. ¿Qué es la pendiente de una curva?

5. ¿Qué es una recta secante a una curva?

5.1. Representa gráficamente una recta secante a una curva.

6. ¿Qué es una recta tangente a una curva?.

6.1. Representa gráficamente una recta tangente a una curva.

6.2. ¿Qué es la pendiente de una recta tangente a una curva?

6.2.1. Hallar la pendiente de la recta tangente $Y = X^2 + 1$ en el punto (-1,2).

Fig. 7

7. ¿Qué es una función?

7.1. Determinar cuál de las siguientes relaciones es función y cuál no

7.1.1. S = {1.2), (2.2.), (3,6), (1.4), (4.8), (5.6), (7.2), (8.8), (9.6)}

7.1.2. R = {(1.2), (2.2), (3.6), (8.4), (7.6), (9.8), (5.2), (4.8), (6.6)}

8. ¿Qué es él límite de una función?

8.1. Comprueba qué: $\lim_{X \to 2} (5x - 6) = 4$

8.2. Hallar el siguiente límite: $\lim_{X \to -3} \frac{X^2 - 9}{X + 3}$

9. ¿Qué idea tienes de derivada de una función en un punto'

9.1. Da un ejemplo del contexto donde se aplique la derivada

10. ¿Qué idea tiene de la función derivada de una función dada?

Responsables: Director

SANDRA SANTOS Lic. JAIRO ESCORCIA

RAFAEL VALLESTA

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS
PROGRAMA LICENCIATURA EN MATEMATICAS

CUESTIONARIO Nº 2

En este cuestionario se te propone resolver situaciones problema que involucran razón de cambios asociadas con el concepto de derivada. en cada situación problema hay cuatro opciones de respuesta (A, B, C, D), en las cuales puede encontrar dos opciones válidas; usted debe seleccionar entre ellas solo una, la que considere relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con la condiciones particulares de la situación problema,
La selección de la opción la puedes hacer encerrando la letra de ésta en un círculo.

Agradecemos las respondas con sinceridad.

Nombre del alumno: ____

Programa: ____

SITUACION Nº 1

Dada la siguientes representación gráfica:

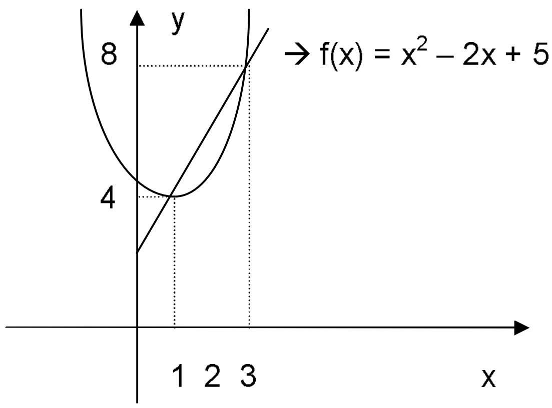


Fig. 8

La ecuación de la recta que es tangente a la curva y paralela a la recta secante representada en la gráfica, se puede hallar utilizando la solución de la ecuación.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2$$

1. En la ecuación anterior, x_0 representa.

A. La abscisa de cualquier punto de la parábola.
B. La abscisa de cualquiera de los dos puntos dados de la secante.
C. La abscisa del punto intersección entre la curva y la recta tangente.
D. La abscisa de cualquier punto de la recta tangente a la curva.

2. La igualdad anterior expresada con el límite representa.

A. La derivada de la curva evaluada en cualquiera de los dos puntos de la recta secante.
B. La pendiente de la recta tangente a la curva.
C. La derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia entre la curva y la recta.
D. La derivada de la curva evaluada en cualquier punto de tangencia de la curva.

SITUACION Nº 2

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad V_i, sin tener en cuenta la fricción con el aire y suponiendo que solo actúa la gravedad.

Se establece que con la fórmula $H = V_i - gt^2/2$, se determina la altura que alcanza el proyectil al transcurrir cierto tiempo t.

La velocidad que llevaría el proyectil en cualquier instante t se puede determinar:

A. Hallan la tasa de cambio instantánea de la función altura en cualquier instante de tiempo t y evaluándola en el instante t dado.
B. Calculando la razón entre la altura y el tiempo empleado por el proyectil.
C. Igualando la derivada de la función altura a cero y resolviéndola.
D. Evaluando la derivada de la función altura en el tiempo dado.

SITUACION Nº 3

Una agencia de transporte oferta durante una semana el costo por kilogramo transportado de cierto producto. El precio por kilogramo transportado es de $

10.000 si la carga total de un viaje pesa 30 kgs o menos; pero si la carga sobre pasa los 30 kgs hace una rebaja de $ 100 por cada kg excedente.

El ingreso total por kilogramo transportado de cada viaje esta dado por expresión:

$$i(x) = \begin{cases} 10.000\ x \text{ si } x \leq 30 \\ 13.000\ x - 100\ x^2 \text{ si } x > 30 \end{cases}$$

La ecuación $\lim_{h \to 0} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} = 0$, permite obtener el número de kilogramos que debe transportar la agencia para obtener un ingreso máximo por viaje, porque:

A. De ella, se deduce que entre más carga x transporte la agencia mayor es el ingreso obtenido en el viaje realizado.
B. De ella, se deduce que las tasas de variaciones medias del ingreso i(x) en los intervalos de kilogramos transportados [60, 65] y [65, 70] cambian de signo positivo a signo negativo.
C. De ella, se deduce el punto crítico o vértice de una parábola que abre hacia abajo.
D. De ella, se deduce que entre más numero de kilogramos x se transporten, mayor es el precio por kilogramo transportado.

3.5. ANÁLISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos de la aplicación de los cuestionarios Nº 1 y Nº 2 se llevan a una tabulación con porcentajes para su descripción, teniendo en cuenta las pequeñas muestras (10 estudiantes) de cada programa respecto a la muestra total (30 estudiantes).

Se analizarán los resultados del cuestionario Nº 1 y del cuestionario Nº 2.

3.5.1. Resultados y Análisis de Cuestionario Nº 1 **Encuesta diagnóstica dirigida a los estudiantes de cálculo I**.

TABLA Nº 5. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO Nº 1

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
1. ¿Qué es variación?	* Cambio	6 Est	60%	* Cambio	8 Est	80%	* Cambio	7 Est	70%
	* Promedio	1 Est	10%	* No dio rta.	2 Est	20%	* No dio rta	3 Est	30%
	* Espacio	1 Est	10%						
	* Valor	1 Est	10%						
	* No dio Rta	1 Est	10%						
1.1. Ejemplos cotidianos dados	* Temperatura	4 Est	40%	* Producción de un producto específico anual	2 Est	20%	* Calentamiento al cual sea ha expuesto una sustancia.	1 Est	10%
	* Volumen de un cubo	1 Est	10%					3 Est	30%
	* Velocidad	1 Est	10%						
	* Recorrido de un auto en 2 puntos diferentes	1 Est	10%	* M.V.A.	1 Est	10%	* Velocidad de un automóvil al tomar una curva	1 Est	10%
				* Cambio de un dato en una igualdad matemática	1 Est	10%	* Bolsa de valores de un país	1 Est	10%
	* Aceleración	1 Est	10%						
	* No dio Rta.	2 Est	20%	* Velocidad	2 Est	20%	* Fuerza de gravedad con respecto a la posición de la tierra	1 Est	10%
							* Aceleración de un auto.	1 Est	10%
							* No dio Rta.	5 Est	50%

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
2. ¿Qué es razón de cambio?	* La que se da con respecto al tiempo	1 Est	10%	* Variación	1 Est	10%	* Movimiento	1 Est	10%
				* Intervalo	2 Est	20%	* Relación entre movimiento de un punto a otro	1 Est	10%
				* Cambio esperado	2 Est	20%	* Cambio	3 Est	30%
				* Sustitución	1 Est	10%	* Límite	1 Est	10%
				* No dio Rta	4 Est	40%	* Cociente	1 Est	10%
	* Valor de una variable de un estado inicial a uno final	3 Est	30%				* No dio Rta	3 Est	30%
	* Variación	2 Est	20%	*					
	* Maximizar	1 Est	10%						
	* Minimizar	1 Est	10%						
	* velocidad Cte	1 Est	10%						
2.1. Ejemplos cotidianos dados	* La tasa promedio de variación de la temperatura de 6 a.m. a 12 m.	1 Est	10%	* Ganancia o perdida en la producción de un producto	2 Est	20%	*Desplazamiento de un auto entre los puntos A – B	1 Est	10%
							* Aumento o disminución del IVA	1 Est	10%
							* Caída Libre	1 Est	10%
	* 2 autos que paren a velocidad en sentido contrario	1 Est	10%	* Resultados obtenidos en laboratorio que se acomode a lo que se espera	1 Est	10%	* No dio Rta	7 Est	70%

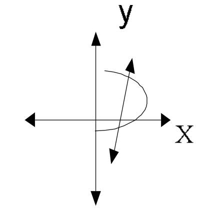
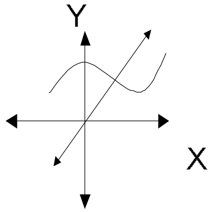
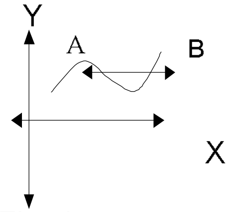
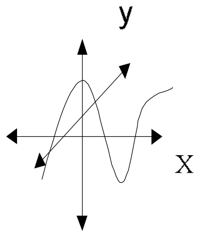
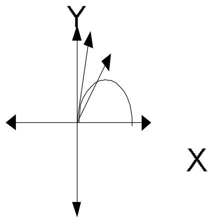
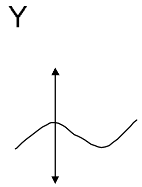
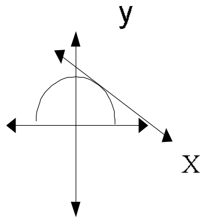
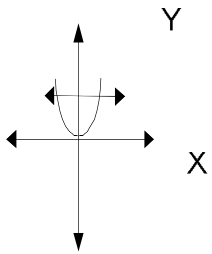
Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
	* Velocidad de un objeto con respecto al tiempo desde A – B.	1 Est	10%	* No dio Rta	7 Est	70%	*No dio Rta	7 Est	70%
	* 2 personas desplazándose de un lugar a otro en diferente medio de transporte	1 Est	10%						
	* La derivación de una figura geométrica.	1 Est	10%						
	* Radio de un círculo	1 Est	10%						
	* Persona que se mueve a unas velocidad y ña sombra varia de acuerdo al movimiento	1 Est	10%						
	* No dio Rta	1 Est	30%						
3. ¿Qué es un intervalo?	* Segmento	1 Est	10%	* Puntos comprendidos en un movimiento	1 Est	10%	* Entorno	1 Est	10%
	* Margen dada a una función	1 Est	10%	* Espacio	1 Est	10%	* Conjunto	4 Est	40%
							* Subconjunto	2 Est	20%
	* Conjunto	2 Est	20%	* Segmento de recta	1 est	10%	* Espacio comprendido entre dos puntos	1 Est	10%

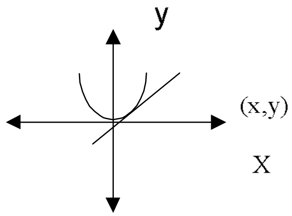
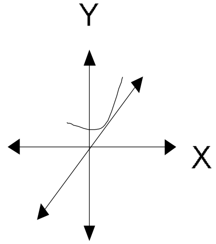
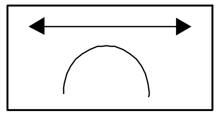
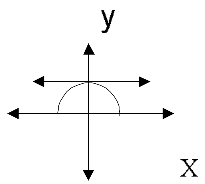
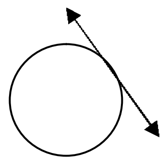
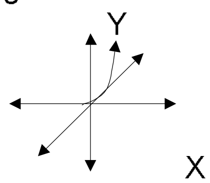
Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
	* Donde se define el dominio y rango de una función.	1 Est	10%	* Porción	1 Est	10%			
				* Dato	1 Est	10%			
				* Punto	1 Est	10%	* No dio Rta.	2 Est	20%
	* Porción	2 Est	20%	* Tiempo en que sucede algo	1 Est	10%			
	* Trayectoria limitada	1 Est	10%	* No dio Rta	3 Est	30%			
	* Espacio comprendido entre dos componente	1 Est	10%						
	* No dio Rta	1 Est	10%						
3.1.Ejemplos cotidianos dados	* Distancia entre Sincelejo y Sampues	1 Est	10%	Una hora	4 Est	40%	*Partido de fútbol	1 Est	10%
							* Jóvenes entre 14 y 18 años	1 Est	10%
	* De 2pm a 4 pm	3 Est	30%	*$]-\infty,1]$	1 Est	10%	* Horario de Clases	1 Est	10%
							* $(-\infty,\infty)$	3 Est	30%
	* [a,b]	1 Est	10%	* No dio Rta	5 Est	50%	* Clima tropical	1 Est	10%
	* [-5, 10]	1 Est	10%				* No dio Rta	3 Est	30%
	* [1, 00]	1 Est	10%						
	*Los candidatos a la presidencia	1 Est	10%						
	* Número de mujeres estudiantes de Uni-Sucre	1 Est	10%						
	* No dio Rta	1 Est	10%						

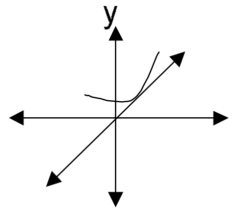
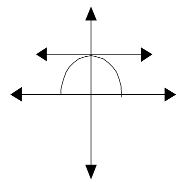
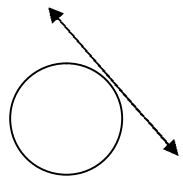
Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
4. ¿Qué es la pendiente de una recta?	*Angulo de inclinación de una recta	3 Est	30%	Recta que sube y baja	1 Est	10%	*Grado de Inclinación	6 Est	60%
	* Angulo formado al interceptar la recta con el eje x	1Est	10%	*Angulo formado por una recta con el plano horizontal	1 Est	10%	* Angulo formado por la recta con el eje coordenado	1 Est	10%
								3 Est	30%
	* La que da el sentido a una recta	1 Est	10%	* Inclinación	3 Est	30%			
	* Dirección que toma la recta	1 Est	10%	* No dio Rat.	5 Est	50%	* No dio Rta	1 Est	10%
	* Cociente de diferencia entre la ordenada y la abcisa	1 Est	10%						
	*No dio Rta.	3 Est	30%						

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
4.1.¿Cómo se calcula?	* $m\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	5 Est	50%	* $m\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	4 Est	40%	* $m\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	10 Est	100%
								1 Est	10%
	* Mediante la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abcisas	1 Est	130%	* Colocando una línea a tierra	1 Est	10%		1 Est	10%
								3 Est	30%
	* Mediante le cociente entre el coeficiente que acompaña a x y el que acompaña a y	1 Est	10%	* No dio Rta	5 Est	50%		1 Est	10%
	* $-\frac{B;}{A}$ donde B Es el coeficiente de Y y A el coeficiente de x	1 Est	10%						
	* Despejando a y	1 Est	10%						
	* No dio Rta	1 Est	10%						
4.2.¿Qué es la pendiente de una curva?	* La derivada de la curva en el punto (x,y)	5 Est	50%	* Calculo de la declinación de una curva	1 Est	10%	* Area debajo de una curva	1 Este	10%
	* La que indica hacia donde se dirige la curva	1 Est	10%	* No dio Rt a	9 Est	90%	* Derivada	1 Est	10%
	* Inclinación	1 Est	10%				* Grado de inclinación de una curva	1 Est	10%
	* Es la recta tangente a ella	1 Est	10%				* Grado donde la curva hace su máxima prolongación	1 Est	10%
	* No dio Rta	2 Est	20%				* No dio Rta	6 Est	60%

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
5.¿Qué una recta secante a una curva?	* La que corta a la curva en dos punto diferentes	6 Est	60%	* Cuando se calcula el ángulo formado entre la recta y una línea curva	1 Est	10%	* Línea que corta la curva	2 Est	20%
	* Recta que pasa por una función tocándola en un solo punto	1 Est	10%	* No dio Rt a	9 Est	90%	*La que toca la curva en dos puntos	4 Est	40%
	* Recta que corta a la curva	1 Est	10%				* La que corta la curva en un solo punto	4 Est	40%
	* No dio Rta	2 Est	20%						

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
5. 1. Representación gráfica de una recta secante a una curva.	 Fig. 1	3 Est	30%	 Fig. 1	1 Est	10%	 Fig. 1	6 Est	60%
	 Fig. 2	3 Est	30%	 Fig. 2	1 Est	10%	 Fig. 2	3 Est	30%
	 Fig. 3	1 Est	10%	No dio Rta	8 Est	80%	No dio Rta	1 Est	10%
	 Fig. 4	1 Est	10%						
	* No dio Rta	2 est	20%						

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
6. ¿Qué es una recta tangente a una curva?	*La que toca a la curva en un solo punto	7 Est	70%	* Curvatura formada entre la línea recta y la curva	1 Est	10%	*Recta que pasa cerca a la curva y no la toca	1 Este	10%
	* Una recta que atraviesa la función en dos puntos	1 Est	10%	* Velocidad angular	1 Est	10%			
	* La pendiente	1 Est	10%	* No dio Rta.	8 Est	80%	* La que toca la curva en un punto	8 Est	80%
	* No dio Rta	1 Est	10%				* La recta que pasa por el borde de la curva	1 Est	10%
6.1. Representación gráfica de una recta tangente a una curva.	 Fig. 1	3 Est	30%	 Fig. 1	1 Est	10%	 Fig. 1	1 Est	10%
	 Fig. 2	4 Est	40%	 Fig. 2	2 Est	20%	 Fig. 2	8 Est	80%

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
	 Fig. 3	3 Est	30%	 Fig. 3 * No dio Rta	1 Est 6 Est	10% 10%	 Fig. 3	1 Est	10%
6.2. ¿Qué es la pendiente de una recta tangente a una curva	* Dirección de la recta en el punto de tangencia a la curva * Derivada de la curva en un punto *Inclinación * No dio Rta.	1 Est 4 Est 1 Est 1 Est	10% 40% 10% 10%	* No dio Rta.	10 Est	10%	* Valor en el punto que toca a la curva * Grado de inclinación de la recta * No dio Rta.	1 Est 2 Est 7 Est	10% 20% 70%
6.2.1.Hallar la pendiente de la recta tangente a $y = x^2 + 1$ en el punto (-1,2)	* - 2 * -1	9 Est 1 Est	90% 10%	* No dio Rta	10 Est	100%	*- 2 * 0,5 * No dio Rta	1 Este 1 Est 8 Est	10% 10% 80%

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
7. ¿Qué es una función?	* Relación	6 Est	60%	* Correspondencia	4 Est	40%	* Relación	9 Est	90%
	* Intervalo	1 Est	10%	* Conjunto de parejas ordenadas	2 Est	20%	* No dio Rta.	1 Est	10%
	* No dio Rta	3 Est	30%	* La que tiene una sola imagen	1 est	10%			
				* No dio Rta	3 Est	30%			
7.1.Deteminar cual de las siguientes relaciones es una función y cual no.									
7.1.1. S	* Si	1 Est	10%	* Si	3 Est	30%	* Si	0 Est	0%
	* No	7 Est	70%	* No	4 Est	40%	* No	9 Est	90%
	* No dio Rta	2 Est	20%	* No dio Rta	3 Est	30%	* No dio Rta	1 Est	10%
7.1.2. R	* Si	7 Est	70%	* Si	6 Est	60%	* Si	7 Est	70%
	* No	1 Est	10%	* No	1 Est	10%	* No	2 Est	20%
	* No dio Rta	2 Est	20%	* No dio Rta	3 Est	30%	* No dio Rta	1 Est	10%

Preguntas	Respuestas Dadas								
	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
8. ¿Qués es el límite de una función?	* Aproximación	2 Est	20%	* Diferencia de E y S	1 Est	10%	* Punto hacia donde tiende la función	5 est	50%
	* Un número real	4 Est	40%	* Punto máximo	1 Est	10%	* Valor donde la variable independiente nunca llega a ser la dependiente	2 Est	20%
				* Valor más acercado donde puede llegar una función	2 Est	20%			
	* Una cota	3 Est	30%	* No dio Rta	6 Est	60%	* Cuando un valor se acerca a la curva por un lado	1 Est	10%
	* No dio Rta	1 Est	10%				* $\lim_{x \to n} f(x) = n$	1 Est	10%
							* No dio Rtsa	1 est	10%
8.1. Comprueba que $\lim_{X \to 2} (5x-6) = 4$	* En forma directa			*En forma directa			* En forma directa		
	Si			Si	8 Est	80%	Si	10Est	100%
	No	6 Est	60%	No	2 Est	20%			
	* Definición	1 Est	10%						
		3 Est	30%						
8.2. Hallar $\lim_{X \to -3} \frac{x^2 - 9}{x+3}$	* -6	10 Est	100%	• 3	1 Est	10%	* - 6	10Est	100%
				• 6	2 Est	20%			
				• -6	3 Est	30%1			
				• 0	1 Est	0%			
				• No existe	1 Est	10%			
				• No dio Rta	2 Est	20%			

	Lic. Matemáticas			Ing. Agrícola			Ing. Civil		
9. ¿Qué idea tienes de derivada de una función en un punto?	* Rapidez con que cambia la dirección de la recta tangente a una curva	1 Est	10%	* No dio Rta	10 Est	100%	* Variación del término	2 Est	20%
	*Derivada en un punto	1 Est	10%				* Razón de cambio que hay en un determinado tiempo	1 Est	10%
	* Pendiente	4 Est	40%				* No dio Rta	7 Est	70%
	* Limite	1 Est	10%						
	* No dio Rta	3 Est	30%						
9.1. Da ejemplos del contexto donde se aplica la derivada	* Hallar el área máxima de un terreno	1 Est	10%	* No dio Rta	10 Est	100%	* Velocidad	1 Est	10%
	*Optimizar	1 Est	10%				* Acelaración	1 Est	10%
	* Derivados de la leche	1 Est	10%				* No dio Rta	8 Est	80%
	* Dormir-reposar	1 Est	10%						
	*Calcular la pendiente de una curva	1 Est	10%						
	* No dio Rta	5 Est	50%						
10. ¿Qué idea tienes de la función deriva de una función dada?	* Rapidez con que varia la pendiente de la función	1 Est	10%	* La misma función	1 Est	10%	* Razón de cambio	1 Est	10%
	*Intersección entre las funciones	1 Est	10%	* No dio Rta.	9 Est	90%	* No dio Rta	9 Est	90%
	* Otra función	1 Est	10%						
	* Variación	1 Est	10%						
	* Tangente	1Est	10%						
	* Pendiente	1 Est	10%						
	* Límite	3 Est	30%						

	* No dio Rta	1 Est	10%					

En los resultados obtenidos en la tabla Nº 5, se observa que la mayoría de los 30 estudiantes manejan dentro del cálculo los conceptos de variación, recta tangente a una curva, recta secante a una curva y función. Pero en los temas: razón de cambio, intervalo, pendiente de una recta tangente a un curva, límite de una función, derivada de una función y función derivada de una función dada, dieron ideas o conceptos no muy claros e inapropiados en comparación con los conceptos científicos manejados en el cálculo. En particular, la mayoría de los estudiantes de licenciatura en matemáticas mostraron ideas válidas dentro del cálculo y especialmente del concepto de derivada de una función, mientras que la mayoría de los estudiantes de ingeniería civil y la totalidad los estudiantes de ingeniería agrícola no presentaron sus ideas acerca de la derivada de una función.

Lo anterior deja ver que los estudiantes no dominan los conceptos relacionados con la derivada y el de la misma, teniendo en cuenta los conceptos científicos del cálculo, por lo que se debe contribuir en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada de una función, en los 30 estudiantes de cálculo I para posibilitar una mejor comprensión del mismo.

3.5.2. Resultados y Análisis de la aplicación del cuestionario Nº 2 que evalúa el logro alcanzado de la propuesta.

Para la correspondiente tabulación, en la tabla Nº 6, se anotan las opciones seleccionadas por los estudiantes de los programas ingeniería agrícola, ingeniería civil y licenciatura en matemáticas; como respuestas a las preguntas de las tres situaciones problemas. En la tabla Nº 7, se anota el número de estudiantes de los tres programas que seleccionaron las opciones validas y las opciones incorrectas, como respuesta a las preguntas de las tres situaciones problemas, y también aparece la competencia comunicativa que se maneja en cada pregunta. En la tabla Nº 8 se muestra el número total de estudiantes que seleccionaron las respuestas correctas a cada pregunta con el porcentaje total correspondiente.

TABLA Nº 6. OPCIONES SELECCIONADAS POR LOS ESTUDIANTES DE LOS TRES PROGRAMAS.

Programas	Alumno	Situación Nº 1		Situación Nº 2	Situación Nº 3
		1	2	1	1
Ingeniería Agrícola	1	C	C	D	B
	2	C	B	D	B
	3	C	B	C	C
	4	D	C	A	B
	5	A	B	A	B
	6	D	C	A	C
	7	C	B	D	C
	8	C	B	D	C
	9	D	C	B	D
	10	C	C	A	D
Ingeniería Civil	1	A	B	D	B
	2	C	C	D	B
	3	B	B	C	B
	4	C	C	A	B
	5	B	A	A	A
	6	A	C	A	C
	7	D	B	A	A
	8	D	B	B	C
	9	B	A	D	D
	10	B	A	D	C
Lic. en Matemáticas	1	D	B	D	C
	2	C	D	D	C
	3	D	B	D	A
	4	A	A	A	A
	5	A	C	A	A
	6	A	B	A	A
	7	C	B	A	C
	8	C	C	D	B
	9	A	C	A	B
	10	B	B	A	B

TABLA Nº 7: CLASIFICACION DE LAS OPCIONES SELECCIONADAS

Situación Problema	Pregunta	Opciones Válidas		Competencia Comunicativa	Nº de Estudiantes de los Programas									Total		
					Ing. Agr.			Ing. Civ.			Lic. Mat.					
		+	-		+	-	in	+	-	in	+	-	in	+	-	In
S_1	1	C		Interpretación	6		4	2		8	3		7	11		19
	2	C	B	Interpretación	5	5	0	3	4	3	3	5	2	11	14	5
S_2	1	A	D	Proposición	4	4	2	4	4	2	6	4	0	14	12	4
S_3	1	C		Argumentación	4		6	3		7	3		7	10		20

S_1 = Situación Nº 1

S_2 = Situación Nº 2

S_3 = Situación Nº 3

+ : Opción válida con la respuesta de mayor complejidad de uso del conocimiento matemático.

- : Opción válida con la respuesta de menor complejidad de uso del conocimiento matemático.

in: Opciones incorrectas seleccionada.

TABLA Nº 8. ESTADO GENERAL DE LAS RESPUESTAS CORRECTAS SELECCIONADAS POR LOS ESTUDIANTES.

Situación	Nº de Estudiantes	%
S_1	11	36.6
	25	83.3
S_2	26	86.6
S_3	10	33.3

A continuación se presenta el análisis general de los resultados obtenidos en las tablas Nº 6, Nº 7 y Nº 8.

En la situación Nº 1, construida en el contextos de la geometría, se presentaron dos preguntas; las cuales buscan evaluar una acción comunicativa y mirar la interpretación del concepto de derivada.

La pregunta 1 de la situación Nº 1, busca indagar por la interpretación que hace el estudiantes de la gráfica y la ecuación planteada, y específicamente por el reconocimiento de x_0 como un número generalizado que relaciona a la recta tangente con la curva. En las respuestas a esta pregunta, se observó que el 36.6% de los 30 estudiantes, seleccionó la opción valida C, pero particularmente la mayoría de los 10 estudiantes de ingeniería agrícola seleccionó esta opción; resultados que fueron los mejores en comparación con los resultados de los otros dos programas. En general; la minoría de los 30 estudiantes reconoce a x_0 como la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente y la curva, y además, establece relación entre el concepto de derivada y la pendiente de la recta tangente a la curva.

La pregunta 2 de la situación Nº 1, también indaga por la interpretación que hace el estudiante de la ecuación, relacionándola con la gráfica dada; esto implica el reconocimiento del concepto de derivada a partir de una interpretación geométrica. En las respuestas a esta pregunta; se observó que 11 estudiantes seleccionaron la opción válida C, que supone mayor complejidad del uso del conocimiento matemático, pués en ella se tiene en cuenta el punto de tangencia entre la curva y la recta tangente a esta; así mismo, la relación entre la derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia entre ésta y la recta, con la pendiente de la recta tangente a la curva. También se observó que 14 estudiantes seleccionaron la otra opción válida B; en donde se induce a la aplicación de la propiedad "si dos rectas son paralelas, entonces tienen pendientes iguales", para determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva y asociar ésta con la ecuación planteada. Comparando los resultados de los tres programas; los mejores los tuvieron los estudiantes de ingeniería agrícola.

Haciendo una comparación entre la cantidad de estudiantes que seleccionaron las dos opciones válidas, vemos que la mayoría de los 30 estudiantes seleccionó la opción válida B, de menor complejidad de uso del conocimiento matemático. Ahora, si sumamos el número de estudiantes que seleccionaron las dos opciones validas, obtenemos 25 estudiantes (83.3%), respondieron correctamente la pregunta, por lo que se puede decir que la mayoría de los 30 estudiantes interpretan el concepto de derivada a partir de una representación gráfica y algebraica.

La situación Nº 2, se construyó en el contexto de la física y a partir de ella se formuló una pregunta, buscando evaluar la acción proposición en los estudiantes, a través de un proceso procedimental de la conceptualización de la derivada. En esta pregunta se propone, el cómo determinar la velocidad que llevaría el proyectil en cualquier instante de tiempo, después de su partida. En las respuestas dadas a ésta; 14 estudiantes (46.6%), seleccionaron la opción válida A, que supone mayor complejidad de uso del conocimiento matemático, debido a que se propone hallar la velocidad utilizando el concepto de derivada como tasa de cambio instantánea de la función altura en cualquier instante de tiempo y evaluando en el instante de tiempo dado, mientras 12 estudiantes (40%), seleccionaron la otra opción valida D, en la cual; se plantea la utilización de la regla de cálculo de la derivada de una función polinómica para hallar la velocidad del proyectil en el instante de tiempo dado. Cabe destacar que comparando los resultados obtenidos en los tres programas, los estudiantes que mejor respondieron esta pregunta, fueron los de licenciatura en matemáticas. Teniendo en cuenta los dos últimos porcentajes, se puede afirmar que la mayoría de los 30 estudiantes, son más competentes al proponer en la solución de la situación Nº 2, y además al sumar esos dos porcentajes, se obtiene un 86.6% de estudiantes que lograron proponer como solución al problema de la velocidad del proyectil, a la derivada de la función altura que alcanza el proyectil en el instante dado.

La situación Nº 3, construida en el contexto de la economía y a partir de la cual se diseñó una pregunta, que indaga por la argumentación que hace el estudiante, mediante posibles justificaciones presentadas, para afirmar que la ecuación planteada, permite deducir el número de kilogramos que debe transportar la agencia para obtener el ingreso máximo por viaje. Como respuesta a esta afirmación, 10 estudiantes (33.3%), seleccionaron la opción válida C; la cual justifica, que de la ecuación se deduce el punto crítico o vértice de una parábola que abre hacia abajo, ya que a partir de la ecuación, se puede encontrar el valor de x, o sea, el número de kilogramos para el cual, al reemplazarlo en la función de ingreso I(x), se obtiene el máximo ingreso por cada viaje realizado. En las justificaciones presentadas; es denotar que la opción B, a pesar de ser verdadera, no es válida debido a que no se deduce de la ecuación que las tasas de variaciones medias del ingreso I(x) en los intervalos de kilogramos transportados [60, 65] y [65, 70], cambian de signo positivo a signo negativo. Pero en los resultados mostrados en la tabla Nº 6, se observa que 11 estudiantes (36.6%), seleccionaron la opción B, y al comparar este resultado con el resultado de la opción válida C, vemos que son casi iguales; esto muestra que sólo una minoría de estudiantes es competente al argumentar en la solución de la situación Nº 3.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las orientaciones realizadas en aula y en la aplicación del cuestionario evaluativo, se puede concluir que:

- El diseño y aplicación de situaciones problemas contextualizadas son un medio propicio para posibilitar en los estudiantes un acercamiento conceptual hacia los conceptos científicos manejados en cálculo o en cualquier rama de las matemáticas.

- El tratamiento de algunas interpretaciones del concepto de derivada, a través de la solución de situaciones problemas que involucran razón de cambios de una variable con respecto a otra, se perfilan como una estrategia didáctica para abordar el estudio de la derivada, ya que después de llevar esta experiencia al aula, se observó que los estudiantes se mostraron atentos y participativos al explorar y mostrar diferentes formas de concebir a la derivada y le encontraron el sentido al estudio de la derivada.
- En la solución de las situaciones problemas, los estudiantes mostraron satisfactoriamente sus capacidades interpretativas y propositivas en el uso de

los conocimientos básicos relacionados con la derivada, pero presentaron deficiencia en la capacidad de argumentar debido a que no dieron razones válidas dentro de la matemática para justificar el porque de la aplicación del concepto de derivada en una situación.

- Una evaluación realizada con la solución de situaciones problemas no propicia totalmente el desarrollo de las competencias comunicativas en matemáticas y mucho menos una comprensión profunda de cualquier tema de las matemáticas y en particular del concepto de derivada.

RECOMENDACIONES

Los proponentes de este trabajo consideramos pertinente que:

- Los docentes incluyan en la orientación de la derivada, las soluciones de situaciones problemas dirigidas a mostrar algunas interpretaciones del concepto de derivada, para que el estudiante le encuentre sentido al estudio de dicho concepto.

- Los docentes de matemáticas implementen en su metodología el diseño y solución de situaciones problemas contextualizadas, con el manejo de las competencias comunicativas en matemáticas, puesto que la solución de situaciones permite potenciar las capacidades de interpretar, analizar, argumentar, criticar, proponer, entre otras; en el uso de los conocimientos matemáticos.

Para la realización de un trabajo de aula utilizando el manejo de situaciones problemas que busquen desarrollar las competencias comunicativas en matemáticas, recomendamos que se profundice en la dinámica de aula, debido a que para lograr tal propósito se requiere de una planificación y ejecución que demanda tiempo y dedicación.

BIBLIOGRAFIA

WENZELBURGER, Eliriede. Cálculo Diferencial. Didáctica. Una Guía para Maestro y Alumnos. Grupo Editorial. Iberoamérica. S.A. de C.V.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (MEN). Lineamientos Curriculares. Matemáticas Obligatorias y Fundamentales. Santafé de Bogotá: Editorial Magisterio, 1998.

DE GUSMAN, Miguel. Enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas. Madrid: Editorial Popular, 1993.

ARSAC, Gilbert et. all. Características de Situaciones de Enseñanza en el Aula. Iniciación al Razonamiento Deductivo en el Colegio. Universidad de Lyon, 1992.

PERKINS, David y BLEYTHE, Tina. La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el Docente. Buenos Aires. Editorial PARDOS, 1999.

ZUBIRIA, Miguel y Julian. Fundamentos de Pedagogía Conceptual. Colombia. Plaza y Janes Editores, 1989.

MARTINEZ, José María. Matemáticas para Ciencias Sociales. Mc Graw – Hil, 1994.

SMITH, Robert T. y MIRTON, Roland B. Cálculo Tomo I. Mc Graw – Hil, 2002.

APOSTOL, Tom M. Claculus Volumen I. Barcrelona – Bogotá – Buenos lares – México. Editorial Reverté Col S.A., 1988.

DOMINGUEZ, Inés et. all. Evaluación de Competencias en Matemática a través de la Resolución de Problemas. Santa Fé de Bogotá, 1999.

ANEXOS

ANEXO A

PRESENTACION DE ALGUNAS MUESTRAS DEL CUESTIONARIO Nº 1 RESULETO POR ESTUDIANTES DE CALCULO I DE LOS PROGRAMAS LICENCIATURA EN MATEMATICAS, INGENIERIA CIVIL E INGENIERIA AGRICOLA.

ANEXO B

PRESENTACION DE ALGUNAS MUESTRAS DEL CUESTIONARIO Nº 2 RESULETO POR ESTUDIANTES DE CALCULO I DE LOS PROGRAMAS LICENCIATURA EN MATEMATICAS, INGENIERIA CIVIL E INGENIERIA AGRICOLA.