

# **Construcción de Interacciones Selectivas Bimodales del Campo de Radiación**

**Juan Diego Barreto Rodríguez**

**Universidad de Sucre**

**Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Física**

**Sincelejo, Colombia**

**2023**

# Construcción de Interacciones Selectivas Bimodales del Campo de Radiación

Juan Diego Barreto Rodríguez

Trabajo de grado para optar al título de:

Licenciado en Física

Director:

Dr. Wilson Enrique Rosado Mercado

Universidad de Sucre

Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Física

Sincelejo

2023

## Dedicatoria

Este trabajo va dedicado a todas esas personas que tienen un gran valor significativo espiritual y moral en mi vida, esas mismas con las que he compartido y las cuales me han inspirado de alguna manera a superarme cada día. Por eso este trabajo va dedicado a mis padres, hermanos y demás familiares, los cuales me han acompañado y brindado su apoyo en todo mi proceso de superación. Este trabajo también va dedicado a mis amigos, compañeros de estudio, todo el cuerpo de profesores que me han formado en mi proceso educativo y aquellas personas de alguna manera hacen parte de este gran logro.

Dedicado a todos los jóvenes que buscan superarse por medio de la educación.

A mi hijo *Luam Manuel Barreto Yepes*

## Agradecimientos

Ante todo agradezco a mi Dios, por darme la dicha y la fortuna de hoy día cumplir uno de los grandes propósitos que tengo ser un profesional y compartirlo con todas aquellas personas que son muy importantes para mí. Agradezco profundamente a mi profesor y hoy día director de trabajo el doctor Wilson Enrique Rosado Mercado, por depositar confianza y credibilidad en mí para que este trabajo fuera hecho toda una realidad. Agradezco el apoyo incondicional de mis padres por guiarme y conducirme por el camino correcto, por enseñarme que se logra mucho más haciendo las cosas buenas “haga el bien sin mirar a quien”, gracias por enseñarme a trabajar honradamente, gracias por enseñarme a compartir con todas las personas sin importar su estatus u condición, gracias por enseñarme esos maravillosos principios y valores que hoy día caracterizan mi forma de ser, gracias Claudia Patricia Rodríguez Mercado por ser mi madre y ejemplo a seguir, gracias Eduin Manuel Barreto Huertas por ser mi padre y por enseñarme a vivir sanamente inculcando en mí el buen trabajo y el ser social. Agradezco a mis hermanos quienes confían mucho en mis capacidades y quienes me ayudaron tanto moralmente como económicamente para que esto fuera posible.

Quiero agradecer a los establecimientos educativos donde realice mis estudios de primaria (Centro Educativo Indígena Siloe), de bachiller (Institución Educativa Indígena Técnico Agropecuario de Escobar Arriba) y pregrado (Universidad de Sucre), gracias por la formación que me brindaron en los años que hice parte de ustedes. Gracias al programa de Licenciatura en física, gracias a los profesores de la facultad de Educación y Ciencias por guiarme y ayudarme a cumplir este propósito en mi vida. Agradezco a mis compañeros de estudios, Elkin Díaz Palomino, Jesús Polanco García, Dainer de la Rosa Mejía, Mairy Yepes Berrio, Cristian Sierra, entre otros, por acompañarme a construir este proceso.

Gracias todos mis familiares y amigos que siempre creyeron en mis capacidades como estudiante y me dieron alientos de superación, gracias por esos consejos que siempre fueron de gran

necesidad, porque nunca esta demás un buen consejo y esos fueron los que sobraron de parte de ustedes.

## Resumen

Las interacciones selectivas de un modo de cavidad, en las cuales una excitación de un modo del campo de radiación es confinada entre dos estados de Fock seleccionados controladamente, han sido objeto de estudio para aplicaciones como la generación y reconstrucción de estados cuánticos, operaciones lógicas cuánticas, preparación de estados entrelazados atómicos y del campo de radiación. Todas estas de mucho interés en ciencias de la información cuántica. En este trabajo, se extendió la selectividad de manera simultánea a dos modos de cavidad, logrando así interacciones selectivas bilineales. Las cuales han sido obtenidas en dos configuraciones de niveles atómicos y como resultado se obtuvieron dos tipos de interacción selectiva bilineal. Las interacciones logradas para ambos casos son validadas numéricamente usando parámetros típicos de cavidades en el régimen de la electrodinámica cuántica, en las cuales se comparó la evolución de las poblaciones de los subespacios seleccionados obtenidas del Hamiltoniano total, con las oscilaciones sinusoidales de Rabi derivadas de las dinámicas efectivas diseñadas, demostrando que los Hamiltonianos diseñados actúan efectivamente sólo en los estados seleccionados.

Palabras Claves: Hamiltoniano, Interacción, Bimodal, Efectivo, Selectivo.

## Abstract

Selective cavity-mode interactions, in which an excitation of a radiation field mode is confined between two controlledly selected Fock states, have been studied for applications such as quantum state generation and reconstruction, quantum logic operations, preparation of atomic entangled states and radiation field. All of these are of great interest in quantum information science. In this work, the selectivity was extended simultaneously to two cavity modes, thus achieving bilinear selective interactions. Which have been obtained in two configurations of atomic levels and as a result two types of bilinear selective interaction were obtained. The interactions achieved for both cases are numerically validated using typical parameters of cavities in the quantum electrodynamics regime, in which the evolution of the populations of the selected subspaces obtained from the total Hamiltonian were compared with the Rabi sinusoidal oscillations derived from the designed effective dynamics, showing that designed Hamiltonians act effectively only in selected states.

Keywords: Hamiltonian, Interaction, Bimodal, Effective, Selective.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>11</b>
1.1	Objetivos . . . . .	14
1.1.1	Objetivo General . . . . .	14
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>15</b>
2.1	Cuantización del campo electromagnético . . . . .	15
2.1.1	Cuantización de un campo unimodal . . . . .	16
2.1.2	Campos Multimodos . . . . .	23
2.2	El modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	31
2.2.1	Interacción átomo campo . . . . .	31
2.2.2	Modelo de Jaynes-Cummings mecánico-cuántico . . . . .	34
2.3	Obtención de dinámicas efectivas: El método de Daniel F.V James y Jonathan Jerke	40
<b>3</b>	<b>Interacciones selectivas bimodales del campo de radiación</b>	<b>46</b>
3.1	Método general para la construcción de interacciones selectivas tipo Jaynes-Cummings	47
3.2	Construcción de interacciones selectivas de cavidad bimodales . . . . .	50
3.2.1	Interacciones selectivas bimodales Caso I . . . . .	50
3.2.1.1	Condición para la Selectividad . . . . .	52
3.2.1.2	Evolución de los estados . . . . .	54
3.2.1.3	Validación de la interacción . . . . .	55



	9
3.2.2 Interacciones selectivas bimodales Caso II . . . . .	55
3.2.2.1 Condición para la Selectividad . . . . .	58
3.2.2.2 Evolución de los estados . . . . .	59
3.2.2.3 Validación de la interacción . . . . .	60
<b>4 Conclusión</b>	<b>62</b>
<b>Apéndice</b>	<b>63</b>
<b>Referencias</b>	<b>70</b>

# Índice de figuras

2.1.1 Cavidad óptica con paredes perfectamente conductoras situadas en $z = 0$ y $z = L$ , donde el campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección $x$ y el campo magnético a lo largo de la dirección $y$ . Tomada de Hernández L, (pag. 5), 2017. . . . .	17
2.1.2 Niveles de energía del oscilador armónico. Tomada de Hernández L, (pag. 9) 2017. . . . .	22
2.2.1 Diagrama de nivel de energía atómica donde el nivel $E = 0$ se toma a medio camino entre los niveles $ g\rangle$ y $ e\rangle$ . Tomada de Gerry C. Knight P, (pag. 92) 2005. . . . .	37
3.2.1 Configuración atómica para la obtención del Hamiltoniano selectivo bimodal Caso I. Fuente: Autoria Propia . . . . .	51
3.2.2 Simulación del Hamiltoniano Selectivo bimodal Caso I. Fuente: Autoria Propia . . . . .	56
3.2.3 Configuración atómica para la obtención del Hamiltoniano selectivo bimodal Caso II. Fuente: Autoria Propia . . . . .	57
3.2.4 Simulación Hamiltoniano selectivo bimodal Caso II. Fuente Autoria Propia . . . . .	61

# Capítulo 1

## Introducción

La interacción de un átomo de dos niveles de energía con un sistema de dimensión infinita es uno de los modelos cuánticos más fundamentales, que describe la interacción entre los sistemas de variables continuas y discretas. Un ejemplo de lo anterior es el modelo de Jaynes-Cummings (JCM por sus siglas en inglés), en el que un átomo de dos niveles interactúa con un solo modo del campo electromagnético (Jaynes y Cummings, 1963), cuyo espacio de Hilbert es de dimensión infinita. El JCM desde su realización experimental (Raithel et al., 1994), ha permitido grandes avances tanto en el campo tecnológico como científico, es por eso que en los últimos años ha tenido un acelerado desarrollo gracias al progreso de técnicas teórico-experimentales que permiten crear y detectar un fotón, así como por ejemplo estudiar un átomo dentro de una cavidad.

En el año 1963 fue propuesto el modelo de Jaynes-Cummings para estudiar los aspectos clásicos de la emisión espontánea, que modela la interacción de un átomo de dos niveles con un modo del campo electromagnético presente en una cavidad. Actualmente este modelo se sigue utilizando para describir la interacción entre átomos y radiación a nivel cuántico. En sus años de vigencia han propuesto muchas extensiones y modificaciones al modelo aportando gran cantidad de nuevos efectos que ponen de manifiesto la naturaleza cuántica de la radiación. Algunas de estas modificaciones se logran en el régimen dispersivo, en el cual la desintonía átomo-campo es lo suficientemente grande como para que no se produzcan transiciones atómicas directas; sin

embargo, se producen interacciones dispersivas entre el átomo y el campo de cavidad (García et al., 2019). El modelo de Jaynes-Cummings despierta un gran interés ya que muchas de sus predicciones son verificadas en forma experimental, además es posible realizar interacciones del tipo Jaynes-Cummings en cavidades de alta fineza, y también en forma efectiva en trampas iónicas y circuitos superconductores (Huerta y Rodríguez, 2016).

La ingeniería de Hamiltonianos enfoca sus esfuerzos teóricos para facilitar la experiencia en la manipulación de los estados del campo de radiación o la materia mejorando cada vez más la fidelidad de los estados producidos. Es por esto que la comunidad científica trabaja intensamente en la exploración de esquemas más eficientes y robustos que permitan un mayor control sobre la manipulación de los estados cuánticos.

Entre estos esquemas propuestos, con lo que tiene que ver con el campo de radiación, se encuentran las interacciones selectivas, llamadas así porque una excitación de un modo del campo de radiación está confinada únicamente entre dos estados de Fock del espacio de Hilbert infinito que constituye la base del campo de radiación. Estas interacciones selectivas, ya han sido aplicadas con éxito en la generación y reconstrucción de estados cuánticos (Santos et al., 2001), operaciones lógicas cuánticas (Solano, 2005), preparación de estados entrelazados atómicos (Youn et al., 2007), preparación de estados estacionarios de Fock y estados entrelazados del campo de radiación, así como también la implementación de una tijera cuántica (Prado et al., 2014; Rosado et al., 2015; De Moraes Neto et al., 2014). Recientemente, se implementó la interacción selectiva de  $k$ -fotones en los regímenes de acoplamiento fuerte y ultra fuerte del modelo cuántico de Rabi (Cong et al., 2019), tales procesos multifotónicos cobran mucho interés para aplicaciones en ciencias de la información cuántica (Villas y Rossatto, 2019).

Por todo lo aquí mencionado, en este trabajo se propone extender las interacciones selectivas de un único modo, a interacciones selectivas multimodos, específicamente al caso particular de interacciones selectivas bilineales mediante átomos multiniveles y su interacción con cavidades

bimodales. Las interacciones diseñadas en este trabajo serán base de estudios a futuras posibles aplicaciones, como por ejemplo la protección de estados entrelazados del campo de radiación y compuertas lógicas cuánticas.

## **Sobre este Trabajo de Grado**

Este trabajo de grado busca construir Hamiltonianos selectivos en cavidades ópticas bimodales del campo de radiación en el régimen de la electrodinámica cuántica de cavidades, para dos configuraciones atómicas de cuatro niveles de energía. Para alcanzar dicho objetivo, este trabajo se ha distribuido de la siguiente manera: El capítulo 2, se presentan los fundamentos teóricos los cuales inician con la cuantización del campo electromagnético para campos de un modo de cavidad y campos multimodos, seguido de ello se muestra el modelo de Jaynes-Cummings (JCM), finalizando con la teoría de Hamiltonianos efectivos de James y Jerke. El capítulo 3, inicia con el método general que permite la construcción de interacciones selectivas a partir de un Hamiltoniano efectivo, continuando con la construcción y validación de las interacciones selectivas de cavidad bimodales (para dos casos considerados), las cuales son el propósito y función de este trabajo. En el capítulo 4, se muestran las conclusiones obtenidas, para dar por finalizado el trabajo.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo General**

- Construir Hamiltonianos selectivos en cavidades que soportan dos modos de vibración del campo de radiación en el régimen de la electrodinámica cuántica de cavidades.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Realizar la generalización de la técnica de Hamiltonianos selectivos de un solo modo de cavidad a Hamiltonianos selectivos multimodos (Bimodales).
- Aplicar la técnica de interacciones selectivas multimodales al caso particular de interacciones bilineales.
- Comprobar la validez de las interacciones selectivas construidas, utilizando la herramienta de cálculo Qutip.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

En este capítulo se muestra la forma en como el campo electromagnético de un modo de vibración pasa de su estado clásico a un estado totalmente cuantificado y así considerar el caso para el campo a diferentes modos de vibración y el caso cuando hay presencia de un átomo en el campo electromagnético para así describir la interacción que estos generan mediante condiciones que favorecen su interpretación, como es el caso de un átomo de dos niveles interactuando con un campo de un solo modo de vibración, hasta llegar a considerar el mismo átomo con un campo de varios modos de vibración. También se muestra el método para la construcción de dinámicas efectivas las cuales son el eje fundamental de este trabajo.

### 2.1 Cuantización del campo electromagnético

En esta sección se presenta la cuantización del campo electromagnético, con particular atención en la interpretación del fotón como una excitación elemental de un modo normal del campo. Se comienza con el caso de un campo unimodal confinado en paredes conductoras en una cavidad

unidimensional, y luego se da una interpretación a los campos multimodos.

### 2.1.1 Cuantización de un campo unimodal

La cuantización del campo de un solo modo se desarrollada considerando que el campo de radiación esta confinado en una cavidad en  $z = 0$  y  $z = L$ , como se muestra en la figura (2.1.1). Dado este esquema, el campo eléctrico se anulara en las fronteras y tomara la forma de una onda estacionaria. Se supone también que no hay fuentes de radiación y que el campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección  $x$ , de tal manera que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t)$ , donde  $\mathbf{e}_x$  es un vector unitario de polarización. Así, las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre están dadas en unidades del sistema internacional (SI) por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1.4)$$

El campo eléctrico unimodal que satisface las ecuaciones de Maxwell y estas condiciones de contorno están dadas por,

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz) \quad (2.1.5)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia del modo y  $k$  es el número de onda relacionado con la frecuencia por  $k = \omega/c$ ,  $V$  es el volumen efectivo de la cavidad y  $q(t)$  es un factor dependiente del tiempo que tiene dimensión de longitud y actuará como una posición canónica. La condición de frontera en  $z = L$  produce las frecuencias permitidas  $\omega_m = c(m\pi/L)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  El campo magnético en la



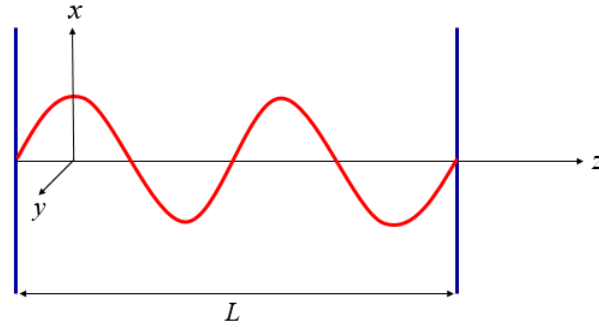


Figura 2.1.1: Cavity óptica con paredes perfectamente conductoras situadas en  $z = 0$  y  $z = L$ , donde el campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección  $x$  y el campo magnético a lo largo de la dirección  $y$ . Tomada de Hernández L, (pag. 5), 2017.

cavity se obtiene a partir de las ecuaciones (2.1.2) y (2.1.5), esto es  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y B_y(z, t)$

$$-\partial_z B_y = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \sin(kz),$$

integrando se obtiene

$$B_y(z, t) = \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k} \right) \left( \frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz) \quad (2.1.6)$$

Aquí,  $\dot{q}(t)$  desempeña el papel de un momento canónico para una partícula de masa unitaria, es decir  $p(t) = \dot{q}(t)$ . La energía clásica del campo o Hamiltoniano  $\hat{H}_c$  del campo unimodal esta dada por

$$\begin{aligned} \hat{H}_c &= \frac{1}{2} \int dV \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] \\ \hat{H}_c &= \frac{1}{2} \int dV \left[ \varepsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

A partir de las ecuaciones (2.1.5) y (2.1.6), se puede notar que

$$H_c = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.1.8)$$

Es evidente que un campo unimodal es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa

unitaria, donde los campos eléctrico y magnético, aparte de algunos factores de escala, desempeñan los roles de posición y de momento canónico, respectivamente. Los libros de texto sobre la mecánica cuántica discuten la Cuantización del oscilador armónico unidimensional. Aquí se toma el planteamiento de que habiendo identificado las variables canónicas  $q$  y  $p$  para el sistema clásico, simplemente se usa la regla de correspondencia para reemplazarlas por sus equivalentes operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , así como se muestra en (Hernández, 2017). Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I} \quad (2.1.9)$$

A partir de ahora se sigue la costumbre y se descarta el operador de identidad  $\hat{I}$  y se escribe  $[\hat{q}, \hat{p} = i\hbar]$ . Así, los campos eléctricos y magnéticos se convierten en los operadores

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{q}(t)\sin(kz), \quad (2.1.10)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\right) \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{p}(t)\cos(kz) \quad (2.1.11)$$

respectivamente. El Hamiltoniano se convierte en

$$\hat{H}_c = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2), \quad (2.1.12)$$

Los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  son hermíticos y por lo tanto corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente y tradicional introducir los operadores no-hermíticos de aniquilación ( $\hat{a}$ ) y creación ( $\hat{a}^\dagger$ ) a través de las combinaciones

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (2.1.13)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.1.14)$$

Así, los operadores de campo eléctrico y magnético se pueden reescribir como

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (2.1.15)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz) \quad (2.1.16)$$

donde  $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\varepsilon_0 V)^{1/2}$  y  $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k) (\varepsilon_0 \hbar\omega^3/V)^{1/2}$ , representan respectivamente los campos eléctrico y magnético por fotón. Los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.1.17)$$

y como resultado el operador Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H}_c = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.18)$$

Hasta ahora no se ha dicho nada de la dependencia temporal de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ . Para un operador arbitrario  $\hat{O}$  que no tiene dependencia explícita del tiempo.

La ecuación de movimiento de Heisenberg dice que

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}] \quad (2.1.19)$$

Para el operador de aniquilación  $\hat{a}$  esto se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] \\ \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ \frac{d\hat{a}}{dt} &= i\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ \frac{d\hat{a}}{dt} &= i\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ \frac{d\hat{a}}{dt} &= -i\omega \hat{a} \end{aligned}$$

que tiene la solución

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (2.1.20)$$

Por el mismo método, o simplemente tomando el conjugado hermitico de la ecuación (2.1.20), se obtiene

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (2.1.21)$$

El operador producto  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  es llamado el operador número y se denota como  $\hat{n}$ . Además,  $|n\rangle$  denota un estado propio de energía del campo unimodal con valor propio energético  $E_n$ , tal que

$$\hat{H}_c |n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (2.1.22)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.1.22) por  $\hat{a}^\dagger$  entonces podemos generar una nueva ecuación de valor propio

$$\hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (2.1.23)$$

Usando las relaciones de conmutación de la ecuación (2.1.17) podemos escribir esto como

$$\hbar\omega \left[ (\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2}\hat{a} \right] |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (2.1.24)$$

ó

$$\hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) \quad (2.1.25)$$

Que es el problema de valor propio con el estado propio  $(\hat{a}^\dagger |n\rangle)$  con el valor propio de energía  $E_n + \hbar\omega$ . Ahora debería quedar claro por que  $\hat{a}^\dagger$  se llama operador de creación: crea un “cuanto” de energía  $\hbar\omega$ . También se podría decir de manera bastante abierta, que  $\hat{a}^\dagger$  crea un “fotón” de energía  $\hbar\omega$ . De manera similar si multiplicamos la ecuación (2.1.22) por el operador  $\hat{a}$  y usamos la relación de conmutación, obtenemos

$$\hat{H}_c (\hat{a} |n\rangle) = (E_n - \hbar\omega) (\hat{a} |n\rangle) \quad (2.1.26)$$

Donde es evidente que el operador  $\hat{a}$  destruye o aniquila un cuanto de energía o fotón, el estado propio  $\hat{a} |n\rangle$  que posee el valor propio de energía  $E_n - \hbar\omega$ . Evidentemente, repitiendo el procedimiento de la ecuación (2.1.26) resultará en la disminución del valor propio de energía en múltiplos enteros de  $\hbar\omega$ . Pero la energía del oscilador armónico siempre debe ser positiva, por lo que debe haber un valor propio de energía más bajo,  $E_0 > 0$ , con el estado propio correspondiente  $|0\rangle$  tal que

$$\hat{H}_c (\hat{a} |0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega) (\hat{a} |0\rangle) \quad (2.1.27)$$

por lo tanto, se concluye que

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (2.1.28)$$

Donde el estado  $|0\rangle$  se conoce como estado vacío o estado base, por tanto se puede conocer la energía del estado base

$$\hat{H}_c |0\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle \quad (2.1.29)$$

de modo que el valor propio de energía más baja es la llamada energía de punto cero  $\hbar\omega/2$ . Dado que  $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ , los valores propios de energía son

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.30)$$

Estos niveles de energía se representan, contra el potencial del oscilador armónico, en la figura

(2.1.2) Así, para el operador numérico  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  tenemos

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.1.31)$$

Estos estados numéricos deben normalizarse de acuerdo con  $\langle n | n \rangle = 1$ . Para el estado  $\hat{a} |n\rangle$  tenemos

$$\hat{a} |n\rangle = c_n |n-1\rangle, \quad (2.1.32)$$

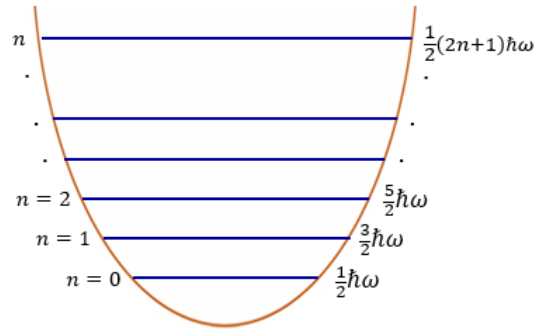


Figura 2.1.2: Niveles de energía del oscilador armónico. Tomada de Hernández L, (pag. 9) 2017.

donde  $c_n$  es una constante por determinar. Entonces el producto interno de  $\hat{a}|n\rangle$  consigo mismo es

$$(\langle n|\hat{a}^\dagger)(\hat{a}|n\rangle) = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n,$$

$$(\langle n|\hat{a}^\dagger)(\hat{a}|n\rangle) = \langle n-1|c_n^*c_n|n-1\rangle = |c_n|^2, \quad (2.1.33)$$

y así  $|c_n|^2 = n$  entonces podemos tomar  $c_n = \sqrt{n}$ , por lo tanto

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.1.34)$$

del mismo modo podemos demostrar que

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.1.35)$$

A partir de este último resultado, es sencillo mostrar que los estados numéricos  $|n\rangle$  pueden generarse a partir del estado base  $|0\rangle$  mediante la acción repetida del operador de creación  $\hat{a}^\dagger$ :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (2.1.36)$$

Debido a que  $\hat{H}_c$  y  $\hat{n}$  son hermíticos, los estados de diferente número son ortogonales, es decir,

$\langle n' | |n \rangle = \delta_{nn'}$ , además, los estados numéricos forman un conjunto completo, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (2.1.37)$$

Los únicos elementos de matriz que no desaparecen de los operadores de de aniquilación y creación son

$$\langle n-1 | \hat{a} |n \rangle = \sqrt{n} \langle n-1 | |n-1 \rangle = \sqrt{n} \quad (2.1.38)$$

$$\langle n+1 | \hat{a}^\dagger |n \rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1 | |n+1 \rangle = \sqrt{n+1} \quad (2.1.39)$$

## 2.1.2 Campos Multimodos

Los resultados para el campo unimodal confinado a una cavidad se pueden generalizar a campos de radiación multimodos. Consideremos que estos campos están en el espacio libre donde se supone que no hay fuentes de radiación ni cargas, por lo que las ecuaciones (2.1.1-2.1.4) aun se mantienen. Los campos de radiación eléctrico y magnético pueden expresarse en términos del potencial vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  que satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.40)$$

y la condición del calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.41)$$

donde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1.42)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.43)$$

Ahora imaginamos que el espacio libre puede modelarse como una cavidad cubica de lado  $L$  con paredes perfectamente reflectantes. La idea aquí es que  $L$  debería ser muy grande en comparación con las dimensiones de cualquier cosa dentro del cubo con la que la radiación podría interactuar (por ejemplo, los átomos). También asumimos que  $L$  es mucho mas grande que las longitudes de onda del campo. Todos los resultados físicos obtenidos de dicho modelo deben ser independientes del tamaño de la cavidad, ya que, una vez realizados todos los cálculos, tomamos  $L \rightarrow \infty$ , tal cual se muestra en (Gerry y Knight, 2005).

El propósito de la cavidad cubica es imponernos condiciones de contorno periódicas en las caras del cubo. Por ejemplo, en la dirección  $x$  necesitaremos que las ondas planas satisfagan la condición

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} \quad (2.1.44)$$

de lo que se sigue que

$$k_x \left( \frac{2\pi}{L} \right) m_x, m_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.45)$$

De manera similar, para las direcciones  $y$  y  $z$  tenemos

$$k_y \left( \frac{2\pi}{L} \right) m_y, m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.46)$$

$$k_z \left( \frac{2\pi}{L} \right) m_z, m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.47)$$

El vector de onda es entonces

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z) \quad (2.1.48)$$

y su magnitud esta relacionada con la frecuencia  $\omega_k$  según  $k = \omega_k/c$ . Un conjunto de enteros  $(m_x, m_y, m_z)$  especifica un modo normal del campo (a parte de la polarización), el número de modos es infinito pero numerable.



Esto es matemáticamente más simple que tratar con el continuo de modos en el espacio libre.

El número total de modos en los intervalos  $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$  es

$$\Delta m = \Delta m_x \Delta m_y \Delta m_z = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (2.1.49)$$

donde el factor de 2 tiene en cuenta las dos polarizaciones independientes.

En un límite casi continuo, en el que asumimos que las longitudes de onda son pequeñas en comparación con  $L$ , tendremos ondas densamente empaquetadas en el espacio  $k$  y, por lo tanto, podremos aproximarnos a  $\Delta m$  por el diferencial

$$dm = 2 \left( \frac{V}{8\pi^3} \right) dk_x dk_y dk_z \quad (2.1.50)$$

donde hemos establecido  $V = L^3$ . En coordenadas polares esféricas del espacio  $k$

$$\mathbf{k} = k (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \quad (2.1.51)$$

y tenemos

$$dm = 2 \left( \frac{V}{8\pi^3} \right) k^2 dk d\Omega \quad (2.1.52)$$

donde  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$  es el elemento de ángulo sólido al rededor de la dirección  $\mathbf{k}$ .

Usando la relación  $k = \omega_k/c$  podemos transformar la ecuación (2.1.52) en

$$dm = 2 \left( \frac{V}{8\pi^3} \right) \frac{\omega^2 k}{c^3} d\omega_k d\Omega \quad (2.1.53)$$

integrando la ecuación (2.1.52) sobre el ángulo sólido nos da:

Los números de modos en todas las direcciones en el rango  $k$  a  $k + dk$

$$V \frac{k^2}{\pi^2} dk = V \rho_k dk \quad (2.1.54)$$

donde  $\rho_k dk$  es la densidad de modos (número de modos por unidad de volumen) y obviamente  $\rho_k = k^2/\pi^2$ . Integrando la ecuación (2.1.53) de la misma manera produce:

Los números de modos en todas las direcciones en el rango  $\omega_k$  a  $\omega_k + d\omega_k$

$$V \frac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3} d\omega_k = V \rho(\omega_k) d\omega_k \quad (2.1.55)$$

donde  $\rho(\omega_k) d\omega_k$  es también la densidad de modo con  $\rho(\omega_k) = \omega_k^2/(\pi^2 c^3)$ .

El potencial vectorial se puede expresar como una superposición de ondas planas en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (2.1.56)$$

Donde  $A_{\mathbf{k}s}$  es la amplitud compleja del campo y donde  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$  es un vector de polarización real. La suma sobre  $\mathbf{k}$  simplemente significa la suma sobre el conjunto de números enteros  $(m_x, m_y, m_z)$  y la suma sobre  $s$  es la suma sobre las dos polarizaciones independientes. Estas polarizaciones deben ser ortogonales  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}$  y de la condición de calibre de la ecuación (2.1.48) debe satisfacer

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} = 0, \quad (2.1.57)$$

conocida como condición de transversalidad. El calibre de coulomb se conoce a veces como calibre transversal en el que la polarización es ortogonal a la dirección de propagación.

Los vectores de polarización  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$  y  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$  forman un sistema diestro tal que

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \hat{\mathbf{k}} \quad (2.1.58)$$

En el espacio libre, la suma de la ecuación (2.1.56) se reemplaza por la integral

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk. \quad (2.1.59)$$

Ahora de las ecuaciones (2.1.40) y (2.1.41) obtenemos para las amplitudes complejas  $A_{\mathbf{k}s}(t)$  la ecuación del oscilador armónico

$$\frac{d^2 A_{\mathbf{k}s}}{dt^2} + \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} = 0 \quad (2.1.60)$$

donde  $\omega_k = ck$ . La solución es

$$A_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} \quad (2.1.61)$$

donde hemos establecido  $A_{\mathbf{k}s}(0) \equiv A_{\mathbf{k}s}$ .

De las ecuaciones (2.1.42) y (2.1.43), los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, son

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}], \quad (2.1.62)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k (k \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) [A_{\mathbf{k}s}(t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}] \quad (2.1.63)$$

La energía del campo esta dada por

$$H_c = \frac{1}{2} \int_V \left( \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV \quad (2.1.64)$$

Encontramos que la contribución a  $H_c$  del campo eléctrico y magnético es:

$$\frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) - R$$

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) + R$$

la energía toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 H_c &= \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) - R + \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) + R \\
 H_c &= 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) \\
 H_c &= 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} A_{\mathbf{k}s}^* e^{i\omega_k t} \\
 H_c &= 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} A_{\mathbf{k}s}^* \tag{2.1.65}
 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la ecuación (2.1.61). La energía de la ecuación (2.1.65) tiene una forma muy simple en termino de las amplitudes  $A_{\mathbf{k}s}$ , para cuantificar el campo se deben introducir las variables canónicas  $p_{\mathbf{k}s}$  y  $q_{\mathbf{k}s}$ . Se define

$$A_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2\omega_k (\varepsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\mathbf{k}s} + i p_{\mathbf{k}s}], \tag{2.1.66}$$

$$A_{\mathbf{k}s}^* = \frac{1}{2\omega_k (\varepsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\mathbf{k}s} - i p_{\mathbf{k}s}], \tag{2.1.67}$$

de tal manera que en la ecuación (2.1.65) obtenemos

$$H_c = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}s} (p_{\mathbf{k}s}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}^2) \tag{2.1.68}$$

La cuantización del campo procede exigiendo que las variables canónicas se conviertan en operadores que satisfagan las relaciones de conmutación,

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}] \tag{2.1.69}$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \tag{2.1.70}$$

En cuanto al campo de un modo, los operadores creación y aniquilación pueden definirse como

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}], \quad (2.1.71)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}], \quad (2.1.72)$$

que satisfacen

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] \quad (2.1.73)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \quad (2.1.74)$$

La energía del campo se convierte en el operador Hamiltoniano de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} &= \frac{1}{2\hbar\omega_k} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}] [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}] \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} &= \frac{1}{2\hbar\omega_k} (\hat{p}_{\mathbf{k}s}^2 + \omega_k^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^2) + \frac{i}{2\hbar} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}] \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} &= \frac{\hat{H}}{\sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k} + \left(\frac{i}{2\hbar}\right) (i\hbar) \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} &= \frac{\hat{H}}{\sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

entonces el operador Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} \hat{H}_c &= \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right) \\ \hat{H}_c &= \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k \left( \hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.75)$$

donde  $\hat{n}_{\mathbf{k}s} = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s}$ , es el operador numérico en el modo  $\mathbf{k}s$ .

Cada uno de estos modos, al ser independientes de todos los demás, tiene un conjunto asociado de estados propios de número  $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ . Para el modo  $j$ -ésimo, sean  $\hat{a}_{\mathbf{k}_j s_j} \equiv \hat{a}_j$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{k}_j s_j}^\dagger \equiv \hat{a}_j^\dagger$  y  $\hat{n}_{\mathbf{k}_j s_j}$ . El

Hamiltoniano para el campo es entonces

$$\hat{H}_c = \sum_j \hbar \omega_j \left( \hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.76)$$

y un estado numérico de fotones multimodos es solo un producto de los estados numéricos de todos los modos que escribimos como  $|n_1\rangle |n_2\rangle \dots \equiv |n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_j\}\rangle$  Este es un autoestado de  $\hat{H}_c$  tal que,  $\hat{H}_c |\{n_j\}\rangle = E |\{n_j\}\rangle$ , donde el valor propio  $E$  es:

$$E = \sum_j \hbar \omega_j \left( n_j + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.77)$$

Tras la cuantización del campo, las amplitudes  $A$  se convierten en operadores que, a partir de las ecuaciones (2.1.68) y (2.1.71), tienen la forma

$$\hat{A}_{\mathbf{k}s} = \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}$$

y así el potencial vectorial cuantificado tiene la forma

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}s} \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (2.1.78)$$

El operador del campo eléctrico y campo magnético son entonces

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \left( \frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (2.1.79)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}s} \left( \frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (k \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (2.1.80)$$

## 2.2 El modelo de Jaynes-Cummings

En esta sección se muestra el comportamiento de un átomo de dos niveles de energía interactuando con un campo de un único modo de vibración el cual es conocido como el modelo de Jaynes-Cummings y fue propuesto en 1963 por sus autores y que hoy día sigue cobrando vigencia y aporte para el avance de las ciencias específicamente en el área de la óptica cuántica (Jaynes y Cummings, 1963).

### 2.2.1 Interacción átomo campo

La interacción de un átomo con el campo de radiación, se produce cuando un fotón interactúa con un átomo neutro, donde el fotón entrega su energía al electrón y este se traslada al siguiente nivel de energía correspondiente, y cuando un electrón pierde un nivel de energía se dice que este emite un fotón.

Para empezar, supongamos que el Hamiltoniano de un electrón unido a un átomo en ausencia de campos externos, en la representación de la configuración, viene dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2 + V(r) \quad (2.2.1)$$

Donde  $V(r)$  es la habitual interacción de Coulomb que une la interacción al núcleo y  $r = |\mathbf{r}|$ . En la representación del espacio de configuración  $\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla$ ,  $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$  y las funciones de onda están dadas por  $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ . Suponemos que la energía de estados propios  $|k\rangle$  de  $\hat{H}_0$ , satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}_0 \psi_k^{(0)}(\mathbf{r}) = E_k \psi_k^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (2.2.2)$$

donde  $\langle \mathbf{r} | k \rangle = \psi_k^{(0)}(\mathbf{r})$ , se conocen. En presencia de campos externos, el Hamiltoniano se modifica a

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r) \quad (2.2.3)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  son los potenciales vectoriales y escalares respectivamente del campo externo y donde  $-e$  es la carga del electrón,  $e$  se toma como positivo. Los campos en si están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

y son invariantes bajo las transformaciones de calibre

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{r}, t) &= \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

la ecuación de schrödinger dependiente del tiempo es

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.2.6)$$

para eventualmente simplificar la forma de la interacción átomo-campo, definimos un operador unitario  $\hat{R}$  tal que  $\Psi'(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{R}\Psi(\mathbf{r}, t)$ . Tenemos

$$\hat{H}'\Psi'(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Psi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.2.7)$$

donde

$$\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^\dagger + i\hbar \frac{\partial\hat{R}}{\partial t} \hat{R}^\dagger. \quad (2.2.8)$$



Ahora elegimos  $\hat{R} = \exp(-ie\chi(\mathbf{r},t)/\hbar)$  de modo que (usando  $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$ )

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}']^2 - e\Phi' + V(r) \quad (2.2.9)$$

donde  $\mathbf{A}'$  y  $\Phi'$  están dados por la ecuación (2.2.5). En este punto, hacemos una elección definida de calibre de Coulomb (o radiación), para el cual  $\Phi = 0$  y  $\mathbf{A}$  satisface la condición de transversalidad  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . El vector potencial  $\mathbf{A}$ , para ninguna fuente cercana al átomo, satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.10)$$

Esta elección de calibre no es relativamente invariante, en contraste con el calibre de Lorentz, pero el dominio de la óptica cuántica es en su mayor parte no relativista, por lo que no se introducirá ninguna inconsistencia. El medidor de Coulomb tiene la ventaja de que el campo de radiación esta completamente descrito por el potencial vectorial, como es obvio de la ecuación (2.2.3), que en este indicador dice

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + V(r) \\ \hat{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + \frac{e\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{P}}}{m} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 + V(r). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

La ecuación (2.2.9) ahora dice

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e(\mathbf{A} + \square\square)]^2 + e\frac{\partial\chi}{\partial t} + V(r) \quad (2.2.12)$$

la solución de la ecuación de onda (2.2.10) tiene la forma,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{c.c.}$ , donde  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  es el vector de onda de la radiación. Para  $|\mathbf{r}|$  de dimensiones atómicas típicas y  $\lambda$  de longitudes de onda ópticas típicas,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  de modo que sobre la extensión de un átomo, el potencial vectorial es espacialmente uniforme,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$ , esta es la llamada aproximación de dipolo. Ahora elegimos la función de calibre  $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$ . Con esta elección

$$\begin{aligned}\nabla\chi(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{A}(t) \\ \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t),\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

y por lo tanto

$$\hat{H}' = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t).\tag{2.2.14}$$

esta ecuación contiene solo un término de interacción (dentro de la aproximación dipolar) en oposición a los términos en la ecuación (2.2.11). La cantidad  $-e\mathbf{r}$  es el momento dipolar:

$\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ . En general, para una representación no especificada, el momento dipolar es un operador  $\hat{\mathbf{d}}$ . Lo denotaremos como tal en lo que sigue. Así escribimos

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)\tag{2.2.15}$$

donde  $\hat{H}_0$  viene dado por la ecuación (2.2.1).

## 2.2.2 Modelo de Jaynes-Cummings mecánico-cuántico

En nuestra discusión de perturbación previa de un átomo que interactúa con un campo electromagnético cuantificado, asumimos que el campo es un campo libre unimodal (onda plana). Un átomo libre interactúa con un número infinito de modos y, por lo tanto, la dinámica no está bien descrita asumiendo solo un campo de modo único. Por otro lado, recientemente se ha hecho posible fabricar entornos en los que la densidad de modos es significativamente diferente a la del espacio libre (Scully y Zubairy, 1997).

Consideremos un átomo, con niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  interactuando con un campo de cavidad unimodal

de la forma

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{e} \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (2.2.16)$$

donde  $\mathbf{e}$  es un vector de polarización orientado arbitrariamente.

El Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0$  ahora debe ser,  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{campo}}$ , donde el Hamiltoniano total del sistema viene dado por,  $\hat{H} = \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{interacción}}$ , donde  $\hat{H}_{\text{interacción}} = \hat{H}^{(I)}$ .

De la ecuación (2.2.15) se tiene que el Hamiltoniano de interacción es

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(I)} &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \\ \hat{H}^{(I)} &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \left[ \mathbf{e} \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \right] \\ \hat{H}^{(I)} &= \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e} \left[ - \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] \\ \hat{H}^{(I)} &= \hat{d}g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

donde

$$g = - \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (2.2.18)$$

y donde  $\hat{d} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}$ .

En este punto conviene introducir los denominados operadores de transición atómica

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|, \quad (2.2.19)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| = \hat{\sigma}_+^\dagger \quad (2.2.20)$$

y el operador de inversión

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \quad (2.2.21)$$

Estos operadores obedecen al álgebra de Spin de Pauli

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \\
[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= |e\rangle \langle g| g \langle e| - |g\rangle \langle e| e \langle g| \\
[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \\
[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_3
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] = 2\hat{\sigma}_\pm, \tag{2.2.23}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] &= \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_3 \\
[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] &= (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) |e\rangle \langle g| - |e\rangle \langle g| (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) \\
[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] &= |e\rangle \langle e| e \langle g| - |g\rangle \langle g| e \langle g| - |e\rangle \langle g| e \langle e| + |e\rangle \langle g| g \langle g| \\
[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] &= |e\rangle \langle g| + |e\rangle \langle g| \\
[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] &= 2\hat{\sigma}_+
\end{aligned}$$

de forma similar para  $[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_-] = 2\hat{\sigma}_-$ .

Solo los elementos fuera de la diagonal del operador dipolar son distintos de cero, ya que por consideración de paridad  $\langle e| \hat{d} |e\rangle = 0 = \langle g| \hat{d} |g\rangle$ , de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
\hat{d} &= d |g\rangle \langle e| + d^* |e\rangle \langle g| \\
\hat{d} &= d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+ \\
\hat{d} &= d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Donde hemos establecido  $\langle e| \hat{d} |g\rangle = d$  y hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que  $d$  es real. Así el Hamiltoniano de interacción es

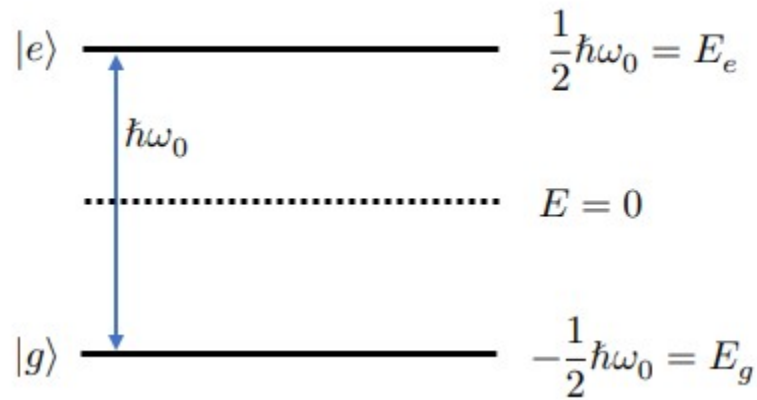


Figura 2.2.1: Diagrama de nivel de energía atómica donde el nivel  $E = 0$  se toma a medio camino entre los niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ . Tomada de Gerry C. Knight P, (pag. 92) 2005.

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(I)} &= \hat{d}g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\
 \hat{H}^{(I)} &= d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\
 \hat{H}^{(I)} &= dg (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \frac{\hbar}{\hbar} \\
 \hat{H}^{(I)} &= \frac{dg}{\hbar} \hbar (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\
 \hat{H}^{(I)} &= \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)
 \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

donde  $\lambda = dg/\hbar$ .

Para hallar la energía del átomo, definimos el nivel de energía como cero a medio camino entre los estados  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  como se muestra en la figura (2.2.1), entonces el Hamiltoniano atómico libre puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_A &= \frac{1}{2} (E_e - E_g) \hat{\sigma}_3 \\
\hat{H}_A &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \hbar \omega_0 - \left( -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \right) \right) \hat{\sigma}_3 \\
\hat{H}_A &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \hbar \omega_0 + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \right) \hat{\sigma}_3 \\
\hat{H}_A &= \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

donde  $E_e = -E_g = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$ . El Hamiltoniano de campo libre fue resuelto anteriormente al inicio del capítulo, considerando eliminar el término de energía de punto cero o estado cero,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_c &= \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \\
\hat{H}_c &= \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega \\
\hat{H}_c &= \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Así el Hamiltoniano total viene dado por la siguiente expresión,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{2.2.28}$$

También conocido como modelo de *Rabi*, teniendo en cuenta la consideración como en el caso de campo libre, como ya se mostró anteriormente, los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  evolucionan como:

$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}$  y  $\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}$ . Se puede demostrar de manera similar para el caso atómico libre,  $\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t}$ . Así es posible ver que las dependencias de tiempo aproximadas, de los productos del operador en la ecuación (2.2.28) son los siguientes:

$$(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$$

Primer término

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} = \hat{\sigma}_+(0) e^{i\omega_0 t} \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} = \hat{\sigma}_+(0) \hat{a}(0) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} \sim e^{i(\omega_0 - \omega)t}$$

Segundo término

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_+(0) e^{i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_+(0) \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega_0 t} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \sim e^{i(\omega + \omega_0)t}$$

Tercer término

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} = \hat{\sigma}_-(0) e^{-i\omega_0 t} \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} = \hat{\sigma}_-(0) \hat{a}(0) e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} \sim e^{-i(\omega + \omega_0)t}$$

Cuarto término

$$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_-(0) e^{-i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}_-(0) \hat{a}^\dagger(0) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t}$$

Donde  $\sim$  indica que son proporcionales. Para  $\omega_0 \approx \omega$ , el segundo y tercer término varían mucho más rápidamente que el primer y último término. Además, el segundo y tercer término no conservan energía a diferencia del primer y último término. El segundo término corresponde a la

emisión de un fotón cuando el átomo pasa del suelo al estado excitado, mientras que el tercer término corresponde a la absorción de un fotón cuando el átomo pasa del estado excitado al estado fundamental.

Para eliminar los términos que no conservan energía (segundo y tercero), es conveniente usar aproximación de onda rotante (RWA), ya que esta aproximación permite conservar los términos de leves variaciones y despreciar los que oscilan rápidamente como en el caso del (segundo y tercer) término, de modo que nuestro Hamiltoniano en esta aproximación es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (2.2.29)$$

La interacción descrita por este Hamiltoniano se le conoce como el modelo Jaynes-Cummings.

## 2.3 Obtención de dinámicas efectivas: El método de Daniel F.V James y Jonathan Jerke

En óptica cuántica, el método de James y Jerke (James y Jerke, 2007), es bastante utilizado como una herramienta muy eficiente al momento de resolver problemas interesantes en esta área, así como es en el caso de este trabajo.

El estado de un sistema cuántico en la representación de la interacción evoluciona según,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$$

donde  $\hat{U}$  es el operador unitario que obedece la ecuación,

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}(t)}{\partial t} = \hat{H}_I\hat{U}(t) \quad (2.3.1)$$



donde  $\hat{H}_I$  es el Hamiltoniano de interacción. En el contexto de la dinámica “burda” dinámica de tiempo promedio o granulada es formalmente definido el promedio de un operador  $\hat{O}$

$$\overline{\hat{O}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') O(t') dt'$$

donde la función  $f(t)$  es real, por lo que los términos de alta frecuencia desaparecen del promedio. Utilizando la integración por partes es posible demostrar que,

$$\frac{\partial \overline{\hat{O}(t)}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \frac{\partial O(t')}{\partial t} dt' = \overline{\frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}} \quad (2.3.2)$$

El Hamiltoniano efectivo puede definirse directamente como:

$$i\hbar \frac{\partial \overline{\hat{U}(t)}}{\partial t} = \hat{H}_{eff} \overline{\hat{U}(t)}$$

Ahora tomamos el promedio de la ecuación (2.3.1),

$$i\hbar \frac{\partial \overline{\hat{U}(t)}}{\partial t} = \hat{H}_I \overline{\hat{U}(t)}$$

Utilizando el criterio de la ecuación (2.3.2),

$$\hat{H}_{eff} \overline{\hat{U}(t)} = \overline{\hat{H}_I \hat{U}(t)}$$

Que inmediatamente conduce a la ecuación,

$$\hat{H}_{eff} = \left( \overline{\hat{H}_I \hat{U}(t)} \right) \left( \overline{\hat{U}(t)} \right)^{-1} \quad (2.3.3)$$

Aunque el operador  $\hat{U}(t)$  es unitario; en general, el operador  $\overline{\hat{U}(t)}$  suele no ser. El origen de esta evolución no unitaria es que el espacio de Hilbert estaba dividido en dos partes, en bajas y altas

frecuencias. El tiempo medio es equivalente a realizar un trazo parcial en la parte del espacio de Hilbert altas frecuencias y realizar una traza parcial en una parte de Hilbert esta asociado con una evolución no unitaria; por tanto, la ecuación (2.3.3) tiene la desventaja de no ser hermitica.

Entonces, la evolución Hamiltoniana efectiva la unidad esta dada por,

$$\hat{H}'_{eff} = \frac{1}{2} (\hat{H}_{eff} + \hat{H}_{eff}^\dagger) \quad (2.3.4)$$

Usando la expansión estándar para  $\hat{U}(t)$  tenemos:

$$\hat{U}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \hat{H}_I(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_I(t'') + \dots,$$

y conservando los términos hasta segundo orden de  $\hat{H}_I$  en el producto (2.3.3),

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \overline{(\hat{H}_I + \hat{H}_I \hat{U}_1 + \dots)} \times \overline{(1 + \hat{U}_1^\dagger + \dots)} \\ \hat{H}_{eff} &= \overline{\hat{H}_I} + \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1^\dagger} + \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} + \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1 \hat{U}_1^\dagger} + \dots, \end{aligned}$$

donde  $\hat{U}_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'$ , asumiendo el hecho de que  $\hat{H}_I^\dagger = \hat{H}_I$ ,  $\hat{U}_1^\dagger = -\hat{U}_1$ , tenemos

$$\hat{H}_{eff} = \overline{\hat{H}_I} - \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} + \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} - \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1 \hat{U}_1}, \quad (2.3.5)$$

es así que

$$\hat{H}_{eff}^\dagger = \overline{\hat{H}_I} + \overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} - \overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} - \overline{\hat{U}_1 \hat{U}_1 \hat{H}_I} \quad (2.3.6)$$

entonces con las ecuaciones (2.3.5), (2.3.6) en (2.3.4) obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{eff} &= \frac{1}{2} \left( \overline{\hat{H}_I} - \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} + \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} - \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1 \hat{U}_1} + \overline{\hat{H}_I} + \overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} - \overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} - \overline{\hat{U}_1 \hat{U}_1 \hat{H}_I} \right) \\ \hat{H}'_{eff} &= \overline{\hat{H}_I} + \frac{1}{2} \left( \left[ \overline{\hat{H}_I}, \overline{\hat{U}_1} \right] - \left[ \overline{\hat{H}_I}, \overline{\hat{U}_1} \right] \right) + \frac{1}{2} \left( -\overline{\hat{H}_I \hat{U}_1 \hat{U}_1} - \overline{\hat{U}_1 \hat{U}_1 \hat{H}_I} \right) \\ \hat{H}'_{eff} &= \overline{\hat{H}_I} + \hat{H}_{eff}^{(2)} + \frac{1}{2} \left( -\overline{\hat{H}_I \hat{U}_1 \hat{U}_1} - \overline{\hat{U}_1 \hat{U}_1 \hat{H}_I} \right) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

donde,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \overline{[\hat{H}_I, \hat{U}_1]} - [\hat{H}_I, \overline{\hat{U}_1}] \right)$$

Si ahora consideramos un Hamiltoniano con dependencia temporal armónica cuya estructura es la siguiente:

$$\hat{H}_I(t) = \sum_{n=1}^N \left( h_n e^{-i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t} \right) \quad (2.3.8)$$

donde cada  $h_n$  es un operador, se asume que  $\omega_n > 0$  y que  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ . Dado que el interés es en procesos que ocurren a bajas frecuencias, se considera que

$$\begin{aligned} \overline{e^{\pm i\omega_n t}} &= 0 \\ \overline{e^{\pm i(\omega_n + \omega_m)t}} &= 0 \\ \overline{e^{\pm i(\omega_n - \omega_m)t}} &= e^{\pm i(\omega_n - \omega_m)t} \end{aligned}$$

asumiendo que tenemos  $\overline{\hat{H}_I(t)} = 0$  por lo tanto,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \overline{[\hat{H}_I, \hat{U}_1]} = \frac{1}{2} \left( \overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} - \overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} \right) \quad (2.3.9)$$

con,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I \hat{U}_1 &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( h_n e^{-i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t} \right) \int_0^t \left( h_m e^{-i\omega_m t'} + h_m^\dagger e^{i\omega_m t'} \right) dt' \\ \hat{H}_I \hat{U}_1 &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( h_n e^{-i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t} \right) \left[ \frac{h_m}{i\omega_m} (1 - e^{-i\omega_m t}) + \frac{h_m^\dagger}{i\omega_m} (e^{i\omega_m t} - 1) \right] \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\overline{\hat{H}_I \hat{U}_1} = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_m} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_m} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \right)$$

del mismo modo

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 \hat{H}_I &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \int_0^t (h_n e^{-i\omega_n t'} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t'}) dt' (h_m e^{-i\omega_m t} + h_m^\dagger e^{i\omega_m t}) \\ \hat{U}_1 \hat{H}_I &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left[ \frac{h_n}{i\omega_n} (1 - e^{-i\omega_n t}) + \frac{h_n^\dagger}{i\omega_n} (e^{i\omega_n t} - 1) \right] (h_m e^{-i\omega_m t} + h_m^\dagger e^{i\omega_m t})\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\overline{\hat{U}_1 \hat{H}_I} = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_n} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_n} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \right)$$

ahora tenemos que,

$$\begin{aligned}\overline{[\hat{H}_I, \hat{U}_1]} &= \left( \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_m} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_m} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_n} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_n} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \right) \right) \\ \overline{[\hat{H}_I, \hat{U}_1]} &= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) [h_n^\dagger h_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - h_n h_m^\dagger e^{-i(\omega_n - \omega_m)t}] \\ \overline{[\hat{H}_I, \hat{U}_1]} &= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left( \frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) [h_n^\dagger h_m - h_m h_n^\dagger] e^{i(\omega_n - \omega_m)t}\end{aligned}$$

usamos el hecho de que los índices son silenciosos “mudos” y cambiamos los índices en el último término para finalmente conseguir,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar \bar{\omega}_{mn}} [h_n^\dagger, h_m] e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \quad (2.3.10)$$

donde

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{mn}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right)$$

La representación anterior dada en la ecuación (2.3.10) es conocido como Hamiltoniano efectivo de segundo orden.

Con todo lo visto en este capítulo y específicamente en la sección anterior (2.3), se da continuidad al siguiente capítulo, donde se pretende aplicar las dinámicas efectivas de James y Jerke, como herramienta clave para construcción de las interacciones selectivas bimodales propuestas en este trabajo.

## Capítulo 3

# Interacciones selectivas bimodales del campo de radiación

Este capítulo se fundamenta en una de las posibles extensiones del JCM, donde se muestra una configuración atómica de cuatro niveles de energía sometido a una cavidad bimodal, para dos configuraciones de niveles atómicos que se mostraran más adelante. Teniendo en cuenta que es necesario plantear un método que permita la construcción de dichas interacciones a nivel general, el cual se muestra para una cavidad unimodal. La construcción de las interacciones selectivas presentadas en este capítulo, asemejaran procesos donde dos fotones al incidir por un medio no lineal se aniquilan, resultando en la creación de un nuevo fotón, y el proceso recíproco al antes mencionado.

### 3.1 Método general para la construcción de interacciones selectivas tipo Jaynes-Cummings

Consideremos el siguiente Hamiltoniano efectivo para obtener una interacción selectiva con un único modo,

$$\hat{H} = (\chi_g \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_g) \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_e \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_e) \hat{\sigma}_{ee} + \xi \left[ (\hat{a}^\dagger)^k \hat{\sigma}_{ge} + \hat{a}^k \hat{\sigma}_{eg} \right] \quad (3.1.1)$$

donde  $\hat{\sigma}_{rs} = |r\rangle \langle s|$ , con  $r$  y  $s$  rotando los estados atómicos involucrados, que son un estado fundamental  $g$ , un estado excitado  $e$  y  $\hat{a}$  representa un operador de aniquilación y  $\hat{a}^\dagger$  representa un operador de creación de un modo de cavidad. Este Hamiltoniano se puede expandir en bloques por los estados del sistema átomo-campo  $|g, n+k\rangle$  y  $|e, n\rangle$  como:

$$\hat{H} = \sum_n \begin{bmatrix} \chi_g (n+k) + \kappa_g & \sqrt{(n+1) \dots (n+k)} \xi \\ \sqrt{(n+1) \dots (n+k)} \xi & \chi_e n + \kappa_e \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

Los términos diagonales en la forma matricial del Hamiltoniano de la ecuación (3.1.2) definen la diferencia de energía  $\phi = (n+k) \chi_g - n \chi_e + \kappa_g - \kappa_e$ , entre los niveles  $|g, n+k\rangle$  y  $|e, n\rangle$ . Note que, esta diferencia de energía o disonancia depende del número ( $n$ ) de fotones en el modo de cavidad. Por lo tanto, la esencia de la interacción selectiva proviene del hecho de que para un número ( $m$ ) específico de fotones en el bloque definido por el subespacio  $|g, m+k\rangle$  y  $|e, m\rangle$ ,  $\phi = 0$  determina la frecuencia resonante efectiva de la transición  $|g, m+k\rangle \leftrightarrow |e, m\rangle$  mientras que el resto de los bloques, aquellos con  $n \neq m$  permanecen en régimen dispersivo. De forma más sistemática, el Hamiltoniano de la ecuación (3.1.1), se le aplica la transformación unitaria

$$U = e^{\{-i[(\chi_g \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_g) \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_e \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_e) \hat{\sigma}_{ee}]t\}}$$

y usamos la relación

$$(\hat{a}^\dagger)^k = \sum_n \sqrt{(n+1) \dots (n+k)} |n+k\rangle \langle n|,$$

para obtener una forma simplificada

$$\hat{H}_U = \sum_n \xi_n (|n+k\rangle \langle n| \hat{\sigma}_{ge} e^{i\phi_n t} + H.c.), \quad (3.1.3)$$

donde  $H.c$  es el hermitico conjugado y  $\xi_n = \sqrt{(n+1) \dots (n+k)} \xi$  y de nuevo,

$$\phi_n = (n+k) \chi_g - n \chi_e + \kappa_g - \kappa_e.$$

Podemos expandir la suma en la ecuación (3.1.3) y escribirla como:

$$\begin{aligned} \hat{H}_U = & (\xi_0 |k\rangle \langle 0| e^{i\phi_0 t} \dots + \xi_{m-1} |m+k-1\rangle \langle m-1| e^{i\phi_{m-1} t} + \xi_m |m+k\rangle \langle m| e^{i\phi_m t} \dots \\ & + \xi_{m+1} |m+k+1\rangle \langle m+1| e^{i\phi_{m+1} t} + \dots) \hat{\sigma}_{ge} + H.c., \end{aligned}$$

y dado que estamos enfocados en el  $m$ -ésimo término, factorizamos  $e^{i\phi_m t}$ , para obtener

$$\begin{aligned} \hat{H}_U = & (\xi_0 |k\rangle \langle 0| e^{i(\phi_0 - \phi_m)t} \dots + \xi_{m-1} |m+k-1\rangle \langle m-1| e^{i(\phi_{m-1} - \phi_m)t} + \xi_m |m+k\rangle \langle m| \\ & + \xi_{m+1} |m+k+1\rangle \langle m+1| e^{i(\phi_{m+1} - \phi_m)t} + \dots) \hat{\sigma}_{ge} e^{i\phi_m t} + H.c. \end{aligned}$$

Note que para  $\phi_m = 0$ , el  $m$ -ésimo término de la expansión no oscila, mientras que el resto oscila con la fase  $|\phi_{m \pm l} - \phi_m|$  donde  $(l \in [1, \infty))$ . Por lo tanto, cuando la transición dentro del subespacio elegido  $\{|g, m+k\rangle, |e, m\rangle\}$  esta sintonizado para resonancia, es decir cuando  $\phi_m = 0$  las otras transiciones son dispersivas, bajo la condición



$$\begin{aligned}
|\phi_{m\pm l} - \phi_m| &= |(m \pm l + k) \chi_g - (m \pm l) \chi_e - (m + k) \chi_g + m \chi_e| \\
|\phi_{m\pm l} - \phi_m| &= l |\chi_g - \chi_e| \gg |\xi_{m\pm l}|
\end{aligned}$$

donde  $l \in [1, \infty)$  para  $\xi_{m+l}$  y  $l \in [1, m]$  para  $\xi_{m-l}$ . Entonces, es posible eliminar estos términos altamente oscilantes del Hamiltoniano mediante el enfoque de onda rotante y la interacción átomo-campo esta bien descrita por el Hamiltoniano selectivo no-lineal de Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{NSJC} = \xi_m |m+k\rangle \langle m| \hat{\sigma}_{ge} + H.c. \quad (3.1.4)$$

En resumen, para extraer la interacción (NSJC) ecuación (3.1.4), tenemos que asumir la restricción de parámetros donde, para un determinado número de estado dado  $n = m$ , las siguientes condiciones están satisfechas:

$$\phi_m = 0 \quad (3.1.5)$$

y

$$l |\chi_g - \chi_e| \gg |\xi_{m\pm l}|. \quad (3.1.6)$$

Finalmente para obtener interacciones selectivas multimodales es necesario construir un Hamiltoniano efectivo con la siguiente estructura

$$\hat{H} = \left( \chi_g \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \kappa_g \right) \hat{\sigma}_{gg} + \left( \chi_e \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \kappa_e \right) \hat{\sigma}_{ee} + \xi \left[ \prod_j \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_{ge} + \prod_j \hat{a}_j \hat{\sigma}_{eg} \right] \quad (3.1.7)$$

Tal interacción quedará sujeta a la configuración de niveles adecuada y de forma similar a lo expuesto anteriormente, sobre cada modo deberán satisfacerse las condiciones (3.1.5) y (3.1.6).

## 3.2 Construcción de interacciones selectivas de cavidad bimodales

Siguiendo el protocolo expuesto en la sección anterior, a continuación presentamos la construcción de interacciones selectivas de cavidad bimodales; es decir, se consideraran dos modos de vibración del campo. Primero abordaremos el caso para una configuración atómica semejante a una configuración tipo lambda pero con un estado auxiliar extra denominado  $|k\rangle$  y para el segundo caso usamos una configuración atómica del tipo escalera. Cada una de estas configuraciones particulares dará origen a una interacción selectiva muy particular.

### 3.2.1 Interacciones selectivas bimodales Caso I

Consideremos una configuración atómica de cuatro niveles de energía conforme ilustra la figura (3.2.1), donde los niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  representan los estados fundamental y excitado del sistema, mientras los niveles  $|i\rangle$  y  $|k\rangle$  representan estados auxiliares. Las frecuencias de transición en el átomo son  $\omega_g, \omega_e, \omega_i$  y  $\omega_k$ , respectivamente. El átomo es obligado a interactuar con los modos de cavidad de frecuencias  $\omega_a$ , descrita por el operador de aniquilación (creación)  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ), que impulsa la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  de forma dispersiva con frecuencia de Rabi  $\lambda_1$ , para la frecuencia  $\omega_b$  descrita por los operadores  $\hat{b}$  ( $\hat{b}^\dagger$ ), que impulsa las transiciones  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  y  $|e\rangle \leftrightarrow |k\rangle$  con frecuencias de Rabi  $\lambda_2, \lambda_3$ , respectivamente. Simultáneamente con esta interacción, está presente un campo láser de frecuencia  $\omega_L$ , que también impulsa dispersivamente la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ , con fuerza de acoplamiento  $\Omega$ .

El Hamiltoniano que describe el proceso esta dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (3.2.1)$$

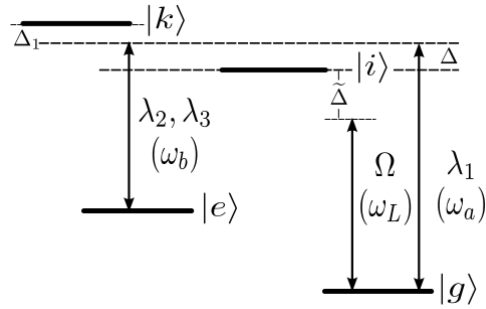


Figura 3.2.1: Configuración atómica para la obtención del Hamiltoniano selectivo bimodal Caso I. Fuente: Autoría Propia

donde

$$\hat{H}_0 = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_k |k\rangle \langle k|$$

y

$$\hat{V} = \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\omega_L t} + \text{H.c.}$$

donde los operadores de transición atómica están dados por  $\hat{\sigma}_{rs} = |r\rangle \langle s|$ , (con  $r$  y  $s$  rotando los estados atómicos  $g, e, i$  y  $k$ ).

Es conveniente realizar una rotación al Hamiltoniano  $\hat{H}$ , por medio de la transformación unitaria  $\hat{H}_I = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - \hat{H}_0$ , donde  $\hat{U} = e^{-iH_0 t}$  y así obtener la representación de interacción que asemeja a un Hamiltoniano con dependencia temporal armónica tal como se muestra,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\Delta t} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} e^{-i\Delta t} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} e^{i\Delta_1 t} \\ & + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{i\tilde{\Delta} t} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

donde las desintonías son dadas por,  $\Delta = \omega_a - \omega_i = \omega_b - \omega_i + \omega_e$ ,  $\Delta_1 = \omega_k - \omega_b - \omega_e$  y  $\tilde{\Delta} = \omega_i - \omega_L$ .

En el régimen dispersivo  $\sqrt{n_a + 1} \lambda_1, \sqrt{n_b + 1} \lambda_2 \ll \Delta, \sqrt{n_b + 1} \lambda_3 \ll \Delta_1$  y

$\Omega \ll \tilde{\Delta} (j = 1, 2, 3)$ , no hay intercambio de energía entre el sistema atómico y la cavidad,

entonces el Hamiltoniano efectivo que se calcula en el apéndice de esta tesis (Apéndice A), es dado por la expresión perturbativa de segundo orden,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} \equiv \hat{H}_{eff} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar\bar{\omega}_{mn}} [h_n^\dagger, h_m] e^{i(\omega_n - \omega_m)t}.$$

Así que en el régimen dispersivo, el Hamiltoniano de interacción toma la siguiente forma,

$$\hat{H}_{eff} = (\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_1) \hat{\sigma}_{gg} + \chi_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{ee} + \xi (\hat{\sigma}_{ge} \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma}_{eg} \hat{a} \hat{b}^\dagger) \quad (3.2.3)$$

donde  $\chi_1 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta}$ ,  $\chi_2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta} - \frac{\lambda_3^2}{\Delta_1}$ ,  $\kappa_1 = -\frac{\Omega^2}{\Delta}$ , y  $\xi = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ . Con la interacción efectiva (3.2.3), se logra la estructura requerida del Hamiltoniano en la forma de la ecuación (3.1.1).

Ahora el siguiente paso es eliminar los términos diagonales contemplados en  $\hat{H}_{eff}$ , por medio de una segunda rotación, a través de la transformación unitaria  $\hat{H}'_I = \hat{U}'^\dagger \hat{H}_{eff} \hat{U}' - \hat{H}'_0$ , con

$$\hat{H}'_0 = [\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_1] \hat{\sigma}_{gg} + \chi_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{ee} \text{ y}$$

$$\hat{U}' = e^{-i([\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_1] \hat{\sigma}_{gg} + \chi_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{ee})t}$$

tal que: se llega a la estructura simplificada

$$\hat{H}'_I = \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} \hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b\rangle \langle n_a, n_b + 1| e^{it\phi_{n_a, n_b}} + \text{H.c.} \quad (3.2.4)$$

donde

$$\phi_{n_a, n_b} = \chi_1 (n_a + 1) - \chi_2 (n_b + 1) + \kappa_1$$

### 3.2.1.1 Condición para la Selectividad

Como fue explicado en la sección 3.1, para obtener la interacción selectiva en el subespacio  $\{|m_a, m_b + 1\rangle, |m_a + 1, m_b\rangle\}$  deben ser satisfechas las condiciones (3.1.5) y (3.1.6). En el caso

bimodal, tales condiciones son equivalentes a:

Asumiendo las condiciones de parámetros

$$\phi_{m_a, m_b} = 0, \quad (3.2.5)$$

y

$$|\chi_1 - \chi_2| \gg \xi \sqrt{n_b + 2} \sqrt{n_a + 2}. \quad (3.2.6)$$

Con estas condiciones, la dinámica descrita por el Hamiltoniano (3.2.1), puede ser perfectamente descrita por el Hamiltoniano bimodal selectivo caso I.

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \xi_{eff} |m_a + 1, m_b\rangle \langle m_a, m_b + 1| \hat{\sigma}_{ge} + \text{H.c.}, \quad (3.2.7)$$

donde  $\xi_{eff} = \xi \sqrt{(n_b + 1)(n_a + 1)}$ . Para una interacción como esta, las transiciones entre niveles adyacentes fuera del subespacio  $\{|m_a + 1, m_b\rangle, |m_a, m_b + 1\rangle\}$  del campo de cavidad son despreciables como veremos a continuación, confinando la interacción átomo-campo para este subespacio seleccionado del campo de radiación.

De la condición (3.2.5) podemos ver que  $\Omega$  debe ser igual a

$$\sqrt{\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} \left[ \lambda_1^2 (m_a + 1) - \lambda_2^2 (m_b + 1) + \frac{\Delta \lambda_3^2}{\Delta_1} (m_b + 1) \right]} = \Omega. \quad (3.2.8)$$

Si asumimos la condición de parámetros  $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 = \lambda$ , entonces de la condición (3.2.6) obtenemos que

$$\Delta \gg \Delta_1 \sqrt{n_b + 2} \sqrt{n_a + 2}, \quad (3.2.9)$$

de modo que usando la condición (3.2.9) en (3.2.8) obtenemos una expresión mas compacta para  $\Omega$ , esto es

$$\sqrt{\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta_1} (m_b + 1) \lambda} \approx \Omega.$$

### 3.2.1.2 Evolución de los estados

Una dinámica descrita por el Hamiltoniano (3.2.7), implica que un estado del espacio total átomo-campo, como por ejemplo  $|n_a, n_b\rangle \otimes |g\rangle$ , evolucione en el tiempo según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle$$

donde  $\hat{U} = \text{Exp}\left(-i\frac{\hat{\mathcal{H}}_I t}{\hbar}\right)$ , y como resultado se obtiene

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & |n_a, n_b\rangle \otimes |g\rangle - \delta_{m_a+1, n_a} \delta_{m_b, n_b} |m_a + 1, m_b\rangle \otimes |g\rangle \\ & + \delta_{m_a+1, n_a} \delta_{m_b, n_b} [\cos(\xi_{eff} t) |m_a + 1, m_b\rangle \otimes |g\rangle - i \sin(\xi_{eff} t) |m_a, m_b + 1\rangle \otimes |e\rangle]. \end{aligned}$$

De manera que, si  $n_a \neq m_a + 1$  y  $n_b \neq m_b$ , entonces el estado no cambia en el tiempo, esto es

$$|\psi(t)\rangle = |n_a, n_b\rangle \otimes |g\rangle.$$

Es decir, la dinámica descrita por el Hamiltoniano selectivo (3.2.7) no induce transiciones fuera del subespacio de radiación  $|m_a + 1, m_b\rangle \leftrightarrow |m_a, m_b + 1\rangle$ .

En cambio si el estado inicial es  $|m_a + 1, m_b\rangle \otimes |e\rangle$ , este evoluciona según la siguiente expresión

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\xi_{eff} t) |m_a + 1, m_b\rangle \otimes |g\rangle - i \sin(\xi_{eff} t) |m_a, m_b + 1\rangle \otimes |e\rangle,$$

demostrando que efectivamente el hamiltoniano diseñado induce transiciones entre los estados  $|m_a + 1, m_b\rangle$  y  $|m_a, m_b + 1\rangle$  con las respectivas probabilidades

$$\mathcal{P}_{m_a+1, m_b, e} = \cos^2(\xi_{eff} t)$$

y

$$\mathcal{P}_{m_a, m_b+1, g} = \sin^2(\xi_{eff} t).$$

### 3.2.1.3 Validación de la interacción

Para examinar la validez de la interacción diseñada elegimos los subespacios  $\{|5\rangle, |6\rangle\}$  en el modo de frecuencia  $\omega_a$  y  $\{|2\rangle, |3\rangle\}$  en modo de frecuencia  $\omega_b$ . Asumiendo el estado inicial  $|5, 3\rangle \otimes |e\rangle$ , se grafican las probabilidades  $\mathcal{P}_5$  y  $\mathcal{P}_6$  referentes al modo con frecuencia  $\omega_a$  y ( $\mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$ ) referentes al modo con frecuencia ( $\omega_b$ ). También son asumidos los parámetros típicos en una cavidad en el régimen de la electrodinámica cuántica

$\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 = \lambda \sim 10^5 s^{-1}$ ,  $\Delta_1 = 10\lambda$ ,  $\Delta = 20\Delta_1$ ,  $\tilde{\Delta} = 10\Omega$  y  $\Omega = \lambda\sqrt{(m_b + 1)}$ . Estos parámetros son muy adecuados para la derivación Hamiltoniana selectiva (3.2.7), como lo confirma la buena concordancia entre las curvas sólidas provenientes del Hamiltoniano en la representación de interacción (3.2.2), y hasta las curvas discontinuas calculadas a partir del Hamiltoniano diseñado (3.2.7) cuyas probabilidades están dadas por  $\mathcal{P}_6 = \cos^2 \xi_{eff} t$  y  $\mathcal{P}_5 = \sin^2 \xi_{eff} t$  del modo  $\omega_a$  ( $\mathcal{P}_2 = \cos^2 \xi_{eff} t$  y  $\mathcal{P}_3 = \sin^2 \xi_{eff} t$  del modo  $\omega_b$ ), ver figura (3.2.2). Las probabilidades en referencia al modo  $\omega_a$  se describen en primer plano, mientras que las probabilidades en referencia al modo  $\omega_b$  están graficadas en el recuadro. También se representan las poblaciones de los estados adyacentes iniciales  $|4, 2\rangle \otimes |e\rangle$  y  $|6, 4\rangle \otimes |e\rangle$  bajo el Hamiltoniano (3.2.2) y los mismos parámetros utilizados anteriormente. Como podemos ver en las curvas más claras que oscilan cerca de la unidad, con menor (mayor) amplitud asociada con el estado  $|4, 2\rangle \otimes |e\rangle$  ( $|6, 4\rangle \otimes |e\rangle$ ), lo que demuestra que la dinámica regida por el Hamiltoniano (3.2.2) apenas alimenta a los estados fuera del subespacio seleccionado, lo que confirma efectivamente la validez de la interacción selectiva.

## 3.2.2 Interacciones selectivas bimodales Caso II

Consideremos un átomo de cuatro niveles en una configuración conforme ilustra la figura (3.2.3), donde los niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  representan los estados fundamental y excitado del sistema, mientras los niveles  $|i\rangle$  y  $|k\rangle$  representan estados auxiliares, con frecuencias de transición  $\omega_g, \omega_e, \omega_i, \omega_k$ . El

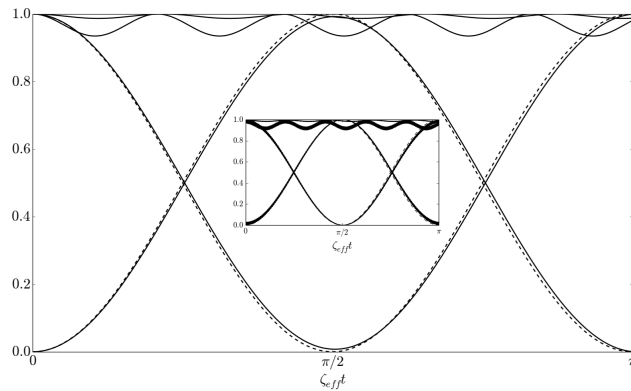


Figura 3.2.2: Simulación del Hamiltoniano Selectivo bimodal Caso I. Fuente: Autoria Propia

átomo es obligado a interactuar con los modos de cavidad de frecuencias  $\omega_a$ , descrita por el operador de aniquilación (creación)  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ), que impulsa la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  de forma dispersiva con frecuencia de Rabi  $\lambda_1$ , para la frecuencia  $\omega_b$  descrita por los operadores  $\hat{b}$  ( $\hat{b}^\dagger$ ), que impulsa las transiciones  $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  y  $|e\rangle \leftrightarrow |k\rangle$  con frecuencias de Rabi  $\lambda_2, \lambda_3$ . Simultáneamente con esta interacción, está presente un campo láser de frecuencia  $\omega_L$ , que también impulsa dispersivamente la transición  $|e\rangle \leftrightarrow |k\rangle$ , con fuerza de acoplamiento  $\Omega_1$ .

Donde el Hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

donde

$$\hat{H}_0 = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_k |k\rangle \langle k|$$

y

$$\hat{V} = \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ei} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} + \Omega_1 \hat{\sigma}_{ke} e^{-i\omega_L t} + \text{H.c.}$$

donde los operadores de transición atómica están dados por  $\hat{\sigma}_{rs} = |r\rangle \langle s|$ , (con  $r$  y  $s$  rotando los estados atómicos  $g, e, i$  y  $k$ ).



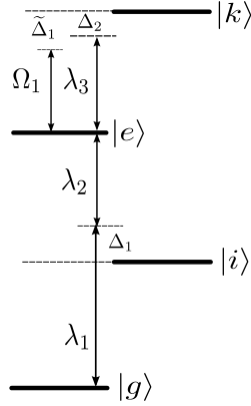


Figura 3.2.3: Configuración atómica para la obtención del Hamiltoniano selectivo bimodal Caso II. Fuente: Autoría Propia

Es conveniente realizar una rotación como en el caso anterior, para obtener la representación de interacción,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\Delta_1 t} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ei} e^{i\Delta_1 t} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} e^{i\Delta_2 t} \\ & + \Omega_1 \hat{\sigma}_{ke} e^{i\tilde{\Delta}_1 t} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

donde las desintonías son dadas por,  $\Delta_1 = \omega_a - \omega_i = \omega_e - \omega_b - \omega_i$ ,  $\tilde{\Delta}_1 = \omega_k - \omega_e - \omega_L$  y  $\Delta_2 = \omega_k - \omega_b - \omega_e$ .

En el régimen dispersivo  $\sqrt{n+1}\lambda_1, \sqrt{n+1}\lambda_2 \ll \Delta_1, \sqrt{n+1}\lambda_3 \ll \Delta_2$  y  $\Omega_1 \ll \tilde{\Delta}_1$ , no hay intercambio de energía entre el sistema atómico y la cavidad, entonces el Hamiltoniano efectivo que se calcula en el apéndice de esta tesis (Apéndice B), es dado por la expresión perturbativa de segundo orden,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} \equiv \hat{H}_{eff} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar \bar{\nu}_{mn}} [h_n^\dagger, h_m] e^{i(v_n - v_m)t},$$

Así que en el régimen dispersivo, nuestro Hamiltoniano de interacción toma la siguiente forma,

$$\hat{H}_{eff} = \chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee} + \xi (\hat{\sigma}_{ge} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_{eg} \hat{a} \hat{b}) \quad (3.2.11)$$

donde  $\chi_1 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta_1}$ ,  $\chi_2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1}$ ,  $\chi_3 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1} - \frac{\lambda_3^2}{\Delta_2}$ ,  $\kappa_1 = -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_1}$  y  $\xi = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta_1}$ . Con la interacción efectiva (3.2.11), obtuvimos la estructura requerida del Hamiltoniano en la forma de la ecuación (3.1.1).

Como en el caso anterior, el siguiente paso es eliminar los términos diagonales contemplados en  $\hat{H}_{eff}$ , por medio de una segunda rotación, a través de la transformación unitaria

$$\hat{H}'_I = \hat{U}'^\dagger \hat{H}_{eff} \hat{U}' - \hat{H}'_0, \text{ con } \hat{H}'_0 = \chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee} \text{ y}$$

$$\hat{U}' = e^{-i(\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee})t}$$

tal que: llegamos a la estructura simplificada

$$\hat{H}'_I = \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} \hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b + 1\rangle \langle n_a, n_b| e^{it\phi_{n_a, n_b}} + \text{H.c.} \quad (3.2.12)$$

donde

$$\phi_{n_a, n_b} = \chi_1 (n_a + 1) - \chi_3 n_b - \chi_2 - \kappa_1$$

### 3.2.2.1 Condición para la Selectividad

Como fue explicado en la sección 3.1, para obtener la interacción selectiva en el subespacio  $\{|m_a + 1, m_b + 1\rangle, |m_a, m_b\rangle\}$  debe ser satisfechas las condiciones (3.1.5) y (3.1.6). En este caso, tales condiciones son equivalentes a:

$$\phi_{m_a, m_b} = 0 \quad (3.2.13)$$

y

$$|\chi_1 - \chi_3| \gg \xi \sqrt{n_b + 2} \sqrt{n_a + 2} \quad (3.2.14)$$

Con estas condiciones, la dinámica descrita por el Hamiltoniano (3.2.1), puede ser perfectamente descrita por el Hamiltoniano bimodal selectivo Caso II.

$$\hat{\mathcal{H}}_{II} = \xi_{eff} |m_a + 1, m_b + 1\rangle \langle m_a, m_b| \hat{\sigma}_{ge} + \text{H.c.} \quad (3.2.15)$$

donde  $\xi_{eff} = \xi \sqrt{(n_b + 1)(n_a + 1)}$ . Para una interacción como esta las transiciones entre niveles adyacentes fuera del subespacio  $\{|m_a + 1, m_b + 1\rangle, |m_a, m_b\rangle\}$  del campo de cavidad son despreciables, confinando la interacción átomo-campo para este subespacio seleccionado.

De la condición (3.2.13), podemos ver que  $\Omega_1$  es igual a

$$\sqrt{\tilde{\Delta}_1 \left( \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1} (m_b + 1) + \frac{\lambda_3^2}{\Delta_2} m_b - \frac{\lambda_1^2}{\Delta_1} (m_a + 1) \right)} = \Omega_1 \quad (3.2.16)$$

Si asumimos la condición de parámetros  $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 = \lambda$ , entonces de la condición (3.2.14) obtenemos que

$$\Delta_1 \gg \Delta_2 \sqrt{n_b + 2} \sqrt{n_a + 2} \quad (3.2.17)$$

de modo que usando la condición (3.2.17) en (3.2.16) obtenemos una expresión mas compacta para  $\Omega_1$ , esto es

$$\Omega_1 \approx \sqrt{\frac{\tilde{\Delta}_1}{\Delta_2} m_b \lambda}$$

### 3.2.2.2 Evolución de los estados

Una dinámica descrita por el Hamiltoniano (3.2.15), implica que un estado del espacio total átomo-campo, como por ejemplo  $|n_a, n_b\rangle \otimes |e\rangle$ , evolucione en el tiempo según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle$$

donde  $\hat{U} = \text{Exp} \left( -i \frac{\hat{\mathcal{H}}_{II} t}{\hbar} \right)$ , y como resultado se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = |n_a, n_b\rangle \otimes |e\rangle - \delta_{m_a, n_a} \delta_{m_b, n_b} |m_a, m_b\rangle \otimes |e\rangle \\ + \delta_{m_a, n_a} \delta_{m_b, n_b} \left[ \cos(\xi_{eff} t) |m_a, m_b\rangle \otimes |e\rangle - i \sin(\xi_{eff} t) |m_a + 1, m_b + 1\rangle \otimes |g\rangle \right].$$

De manera que, si  $n_a \neq m_a$  y  $n_b \neq m_b$ , entonces el estado no cambia en el tiempo, esto es

$$|\psi(t)\rangle = |n_a, n_b\rangle \otimes |e\rangle.$$

Es decir, la dinámica descrita por el Hamiltoniano selectivo (3.2.15) no induce transiciones fuera del subespacio de radiación  $|m_a + 1, m_b + 1\rangle \leftrightarrow |m_a, m_b\rangle$ . En cambio si el estado inicial es  $|m_a, m_b\rangle \otimes |e\rangle$ , este evoluciona según la siguiente expresión

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\xi_{eff} t) |m_a, m_b\rangle \otimes |e\rangle - i \sin(\xi_{eff} t) |m_a + 1, m_b + 1\rangle \otimes |g\rangle,$$

demostrando que efectivamente el hamiltoniano diseñado induce transiciones entre los estados  $|m_a + 1, m_b + 1\rangle$  y  $|m_a, m_b\rangle$  con las respectivas probabilidades

$$\mathcal{P}_{m_a, m_b, e} = \cos^2(\xi_{eff} t)$$

y

$$\mathcal{P}_{m_a+1, m_b+1, g} = \sin^2(\xi_{eff} t).$$

### 3.2.2.3 Validación de la interacción

Nuevamente elegimos los subespacios  $\{|5\rangle, |6\rangle\}$  en el modo de frecuencia  $\omega_a$  y  $\{|2\rangle, |3\rangle\}$  en el modo de frecuencia  $\omega_b$ . Asumiendo el estado inicial  $|5, 2\rangle \otimes |e\rangle$ , se grafican las probabilidades  $\mathcal{P}_5$  y  $\mathcal{P}_6$  refiriéndose al modo de frecuencia  $\omega_a$  y ( $\mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$ ) refiriéndose al modo con frecuencia ( $\omega_b$ ).

Los parámetros también se asumen

$\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 = \lambda \sim 10^5 s^{-1}$ ,  $\Delta_2 = 10\lambda$ ,  $\Delta_1 = 20\Delta_2$ ,  $\tilde{\Delta}_1 = 10\Omega_1$  y  $\Omega_1 = \lambda m_b$ . Estos parámetros son muy adecuados para la derivación del Hamiltoniano selectivo (3.2.15), según lo confirmado por buena concordancia entre curvas sólidas provenientes del Hamiltoniano de partida en la representación de interacción (3.2.10), y curvas punteadas calculadas a partir del Hamiltoniano diseñado (3.2.15) cuyas probabilidades están dadas por  $\mathcal{P}_5 = \cos^2 \xi_{eff} t$  y  $\mathcal{P}_6 = \sin^2 \xi_{eff} t$  del modo  $\omega_a$  ( $\mathcal{P}_2 = \cos^2 \xi_{eff} t$  y  $\mathcal{P}_3 = \sin^2 \xi_{eff} t$  del modo  $\omega_b$ ), ver figura (3.2.4). Se grafican las probabilidades en referencia al modo  $\omega_a$  en primer plano, mientras que las probabilidades con referencia al modo  $\omega_b$  se presentan en el recuadro. También se presentan las poblaciones de los estados adyacentes iniciales  $|4, 1\rangle \otimes |e\rangle$  y  $|6, 3\rangle \otimes |e\rangle$  bajo el Hamiltoniano (3.2.10) y los mismos parámetros utilizados anteriormente. Como podemos ver a partir de las curvas más claras que oscilan cerca de la unidad, con una amplitud asociada menor (mayor) al estado  $|4, 1\rangle \otimes |e\rangle$  ( $|6, 3\rangle \otimes |e\rangle$ ), mostrando que la dinámica regida por el Hamiltoniano (3.2.10) casi no alimenta estados fuera del subespacio seleccionado, confirmando efectivamente la validez de la ingeniería de interacción.

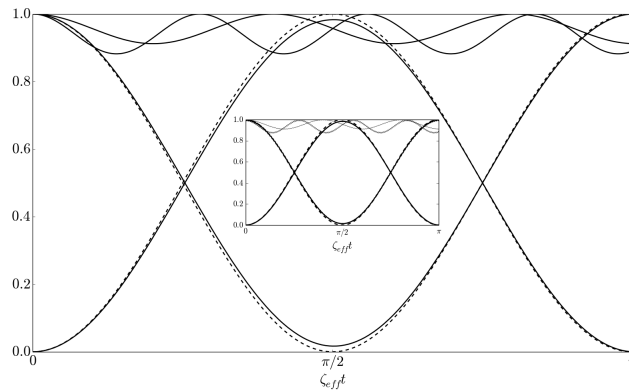


Figura 3.2.4: Simulación Hamiltoniano selectivo bimodal Caso II. Fuente Autoria Propia

# Capítulo 4

## Conclusión

Después de presentar un método general para obtener interacciones selectivas multimodales, se procedió a derivar las transiciones selectivas bimodales. Para cada caso, partimos de una configuración de nivel atómico específico y transiciones que, como se destacó anteriormente, determinan la fuerza de la interacción atómica-campo selectiva diseñada. El procedimiento que hemos adoptado para derivar las interacciones selectivas, descritas en nuestro método general, junto con las configuraciones de nivel atómico que hemos elegido, condujo a la misma frecuencia Rabi efectiva. Por lo tanto, sospechamos que las elecciones alternativas de procedimientos y configuraciones de estados atómicos pueden conducir a una interacción selectiva más fuerte. Después de presentar nuestras interacciones selectivas, pasamos al problema de analizar su validez, comparando las dinámicas diseñadas con las calculadas a partir del Hamiltoniano completo (de inicio). Verificamos, en cada caso, que la dinámica hamiltoniana completa se ajusta bastante bien a las oscilaciones sinusoidales de Rabi mostradas por la interacción efectiva. En consecuencia, también confirmamos que la dinámica descrita por el Hamiltoniano completo apenas alimenta los estados fuera del subespacios seleccionados.

# Apéndice

## Apéndice A: Calculo de las interacciones selectivas bimodales

### Caso I

Para la construcción de estas interacciones fue necesario el uso de cálculos matemáticos. El Hamiltoniano de partida del sistema es el siguiente,

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_k |k\rangle \langle k| \\ & + \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\omega_L t} + \text{H.c.}\end{aligned}$$

el cual fue necesario realizar una rotación para eliminar términos y obtener la representación de interacción del sistema

$$\hat{H}_I = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - \hat{H}_0,$$

donde  $\hat{U} = e^{-iH_0 t}$ , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{H}_I = & e^{i(\omega_k |k\rangle \langle k| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a})t} \left[ \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} \right. \\ & \left. + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\omega_L t} \right] e^{-i(\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_k |k\rangle \langle k|)t} + \text{H.c.} \\ \hat{H}_I = & \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\Delta t} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} e^{-i\Delta t} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} e^{i\Delta_1 t} + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{i\tilde{\Delta} t} + \text{H.c.}\end{aligned}$$

donde las desintonías son dadas por:  $\Delta = \omega_a - \omega_i = \omega_b - \omega_i + \omega_e$ ,  $\Delta_1 = \omega_k - \omega_b - \omega_e$  y  $\tilde{\Delta} = \omega_i - \omega_L$ .

## Calculo del Hamiltoniano efectivo

En el régimen dispersivo, es posible modificar algunas extensiones del modelo de Jaynes-Cummings, como se muestra a continuación.

Para la construcción del Hamiltoniano efectivo, se inicia de la representación de la interacción presentada en la ecuación (3.2.2) y mostrada a continuación

$$\hat{H}_I = \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\Delta t} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} e^{-i\Delta t} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} e^{i\Delta_1 t} + \Omega \hat{\sigma}_{ig} e^{i\tilde{\Delta} t} + \text{H.c.},$$

la cual asemeja un Hamiltoniano de interacción con dependencia temporal armónica de la siguiente estructura,

$$\hat{H}_I(t) = \sum_{n=1}^N (h_n e^{-i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t})$$

donde,

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} \quad , \quad h_1^\dagger = \lambda_1 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi} \quad , \quad \omega_1 = \Delta \\ h_2 &= \Omega \hat{\sigma}_{ig} \quad , \quad h_2^\dagger = \Omega \hat{\sigma}_{gi} \quad , \quad \omega_2 = \tilde{\Delta} \\ h_3 &= \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ie} \quad , \quad h_3^\dagger = \lambda_2 \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{ei} \quad , \quad \omega_3 = \Delta \\ h_4 &= \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} \quad , \quad h_4^\dagger = \lambda_3 \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{ek} \quad , \quad \omega_4 = \Delta_1 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano efectivo se construye mediante la expresión perturbativa de segundo orden,

$$\hat{H}_{eff}^{(2)} \equiv \hat{H}_{eff} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar \omega_{mn}} [h_n^\dagger, h_m] e^{i(\omega_n - \omega_m)t},$$



entonces,

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} &= \frac{\lambda_1^2}{\Delta}(\hat{\sigma}_{gg}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{\sigma}_{ii}\hat{a}\hat{a}^\dagger) + \frac{\Omega^2}{\Delta}(\hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{gg}) \\ &+ \frac{\lambda_2^2}{\Delta}(\hat{\sigma}_{ee}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{\sigma}_{ii}\hat{b}\hat{b}^\dagger) + \frac{\lambda_3^2}{\Delta_1}(\hat{\sigma}_{kk}\hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{\sigma}_{ee}\hat{b}^\dagger\hat{b}) \\ &+ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta}[\hat{\sigma}_{ge}\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{\sigma}_{eg}\hat{a}\hat{b}^\dagger]\end{aligned}$$

se eliminan adiabáticamente los niveles atómicos desdoblados y finalmente el Hamiltoniano efectivo es,

$$\hat{H}_{eff} = [\chi_1\hat{a}^\dagger\hat{a} + \kappa_1]\hat{\sigma}_{gg} + \chi_2\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\sigma}_{ee} + \xi(\hat{\sigma}_{ge}\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{\sigma}_{eg}\hat{a}\hat{b}^\dagger)$$

el cual se mostró anteriormente en la ecuación (3.2.3), donde  $\chi_1 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta}$ ,  $\chi_2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta} - \frac{\lambda_3^2}{\Delta_1}$ ,  $\kappa_1 = -\frac{\Omega^2}{\Delta}$ , y  $\xi = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta}$ .

## Calculo del Hamiltoniano selectivo

Para la construcción de la interacción selectiva, se hace necesario eliminar los términos diagonales en el Hamiltoniano efectivo, mediante la transformación unitaria  $\hat{H}'_I = \hat{U}^\dagger\hat{H}_{eff}\hat{U} - \hat{H}'_0$ , ya que

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}'_0 + \hat{H}'_I,$$

donde,

$$\hat{H}'_0 = [\chi_1\hat{a}^\dagger\hat{a} + \kappa_1]\hat{\sigma}_{gg} + \chi_2\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\sigma}_{ee}$$

Teniendo en cuenta las siguientes consideraciones,

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{1} &= \hat{a}\sum_n^\infty |n\rangle\langle n| = \sum_n^\infty \sqrt{n-1}|n-1\rangle\langle n| \\ \hat{a}^\dagger\hat{1} &= \hat{a}^\dagger\sum_n^\infty |n\rangle\langle n| = \sum_n^\infty \sqrt{n+1}|n+1\rangle\langle n|\end{aligned}$$

para el operador ( $\hat{a}$ ), se hace que  $n \rightarrow n + 1$ , entonces

$$\hat{a} = \sum_n^{\infty} \sqrt{n} |n\rangle \langle n+1|,$$

$$\hat{a}^\dagger = \sum_n^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|$$

de igual forma para los operadores  $\hat{b}$  y  $\hat{b}^\dagger$ , entonces la representación de interacción efectiva es:

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} e^{it[\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_1] \hat{\sigma}_{gg}} \hat{\sigma}_{ge} |n_a+1, n_b\rangle \langle n_a, n_b+1| e^{-it\chi_2 \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{\sigma}_{ee} \\ &\quad + \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} e^{it\chi_2 \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{\sigma}_{ee} \hat{\sigma}_{eg} |n_a, n_b+1\rangle \langle n_a+1, n_b| e^{-it[\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \kappa_1] \hat{\sigma}_{gg}} \\ \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} e^{it[\chi_1(n_a+1) + \kappa_1] \hat{\sigma}_{ge}} |n_a+1, n_b\rangle \langle n_a, n_b+1| e^{-it\chi_2(n_b+1)} \\ &\quad + \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} e^{-it\chi_2(n_b+1)} \hat{\sigma}_{eg} |n_a, n_b+1\rangle \langle n_a+1, n_b| e^{it[\chi_1(n_a+1) + \kappa_1]} \\ \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} [\hat{\sigma}_{eg} |n_a+1, n_b\rangle \langle n_a, n_b+1| e^{it[\chi_1(n_a+1) - \chi_2(n_b+1) + \kappa_1]} + H.c.] \\ \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b+1} \sqrt{n_a+1} \hat{\sigma}_{eg} |n_a+1, n_b\rangle \langle n_a, n_b+1| e^{it\phi_{n_a, n_b}} + H.c. \end{aligned}$$

la condición para la selectividad se da aplicando las condiciones de parámetro mostradas anteriormente en las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6), el Hamiltoniano selectivo es:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \xi_{eff} |m_a+1, m_b\rangle \langle m_a, m_b+1| \hat{\sigma}_{eg} + H.c.$$

el cual se mostró en la ecuación (3.2.7).

## Apéndice B: Calculo de las interacciones selectivas bimodales

### Caso II

Para la construcción de estas interacciones es necesario realizar un procedimiento matemático como el que se realizó anteriormente, partiendo de la representación de partida

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_i |i\rangle \langle i| + \omega_k |k\rangle \langle k| \\ & + \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ei} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} + \Omega_1 \hat{\sigma}_{ke} e^{-i\omega_L t} + \text{H.c.}\end{aligned}$$

## Calculo del Hamiltoniano efectivo

Al igual que en el caso anterior partimos de la representación de interacción mostrada en la ecuación (3.2.10) y mostrada a continuación,

$$\begin{aligned}\hat{H}_I = & \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} e^{-i\Delta_1 t} + \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ei} e^{i\Delta_1 t} + \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} e^{i\Delta_2 t} \\ & + \Omega_1 \hat{\sigma}_{ke} e^{i\tilde{\Delta}_1 t} + \text{H.c.}\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}h_1 &= \lambda_1 \hat{a} \hat{\sigma}_{ig} \quad , \quad h_1^\dagger = \lambda_1 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi} \quad , \quad \omega_1 = \Delta_1 \\ h_2 &= \Omega_1 \hat{\sigma}_{ek} \quad , \quad h_2^\dagger = \Omega_1 \hat{\sigma}_{ke} \quad , \quad \omega_2 = \tilde{\Delta}_1 \\ h_3 &= \lambda_2 \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} \quad , \quad h_3^\dagger = \lambda_2 \hat{b} \hat{\sigma}_{ei} \quad , \quad \omega_3 = \Delta_1 \\ h_4 &= \lambda_3 \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{ek} \quad , \quad h_4^\dagger = \lambda_3 \hat{b} \hat{\sigma}_{ke} \quad , \quad \omega_4 = \Delta_2\end{aligned}$$

Aplicando la expresión perturbativa del caso anterior, se obtiene el Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} = & \frac{\lambda_1^2}{\Delta_1} (\hat{\sigma}_{gg} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{\sigma}_{ii} \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \frac{\Omega_1^2}{\Delta_1} (\hat{\sigma}_{kk} - \hat{\sigma}_{ee}) \\ & + \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1} (\hat{\sigma}_{ee} \hat{b} \hat{b}^\dagger - \hat{\sigma}_{ii} \hat{b}^\dagger \hat{b}) + \frac{\lambda_3^2}{\Delta_2} (\hat{\sigma}_{kk} \hat{b} \hat{b}^\dagger - \hat{\sigma}_{ee} \hat{b}^\dagger \hat{b}) \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta_1} [\hat{\sigma}_{ge} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_{eg} \hat{a} \hat{b}]\end{aligned}$$

se eliminan los niveles atómicos como en el caso anterior quedando el Hamiltoniano efectivo así,

$$\hat{H}_{eff} = \chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee} + \xi (\hat{\sigma}_{ge} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_{eg} \hat{a} \hat{b})$$

como se mostró en la ecuación (3.2.11), donde  $\chi_1 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta_1}$ ,  $\chi_2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1}$ ,  $\chi_3 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta_1} - \frac{\lambda_3^2}{\Delta_2}$ ,  $\kappa_1 = -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_1}$  y  $\xi = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta_1}$ .

### Calculo del Hamiltoniano selectivo

Para el calculo de este, se realiza un procedimiento similar como en el caso anterior, utilizando la misma transformación unitaria, donde en este caso,

$$\hat{H}'_0 = \chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_{gg} + (\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee}$$

la representación de interacción efectiva es,

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} e^{it(\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{gg}} \hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b + 1\rangle \langle n_a, n_b| e^{-it(\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee}} \\ &+ \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} e^{it(\chi_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \chi_2 + \kappa_1) \hat{\sigma}_{ee}} \hat{\sigma}_{eg} |n_a, n_b\rangle \langle n_a + 1, n_b + 1| e^{-it(\chi_1 \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{gg}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I &= \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} e^{it\chi_1(n_a + 1)} \hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b + 1\rangle \langle n_a, n_b| e^{-it(\chi_3 n_b + \chi_2 + \kappa_1)} \\ &+ \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} e^{it(\chi_3 n_b + \chi_2 + \kappa_1)} \hat{\sigma}_{eg} |n_a, n_b\rangle \langle n_a + 1, n_b + 1| e^{-it\chi_1(n_a + 1)} \end{aligned}$$

$$\hat{H}'_I = \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} [\hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b + 1\rangle \langle n_a, n_b| e^{it[\chi_1(n_a + 1) - (\chi_3 n_b + \chi_2) - \kappa_1]} + \text{H.c.}]$$

$$\hat{H}'_I = \xi \sum_{n_a, n_b} \sqrt{n_b + 1} \sqrt{n_a + 1} \hat{\sigma}_{ge} |n_a + 1, n_b + 1\rangle \langle n_a, n_b| e^{it\phi_{n_a, n_b}} + \text{H.c.}$$

dado que la condición para la selectividad se da aplicando los parámetros (3.2.13) y (3.2.14),

entonces el Hamiltoniano selectivo es:

$$\hat{\mathcal{H}}_{II} = \xi_{eff} |m_a + 1, m_b + 1\rangle \langle m_a, m_b| \hat{\sigma}_{ge} + \text{H.c.}$$

el cual se mostró en la ecuación (3.2.15).

## Referencias

- Cong, L., Felicetti, S., Casanova, J., Lamata, L., Solano, E., y Arrazola, I. (2019). *Selective Interactions in the Quantum Rabi Model*, arXiv:1908.07358 [quant-ph].
- De Moraes Neto, G.D., Rosado, W., Prado, F.O., y Moussa, M. H. Y. (2014). Phys. Rev. A, 90, 062322.
- García-Melgarejo, J. C., Lozano-Crisóstomo, N., Esmeralda, A. G., Domínguez-Pachecano, A., y Sanchez-Mondragón, J. J. (2019). *The micromaser in a dissipative cross-cavity*. Em Frontiers in Optics y Laser Science APS/DLS, JW4A.109. Optical Society of America.
- Gerry, C., y Knight, P. (2005). *Introductory Quantum Optics*. New York: Cambridge University Press.
- Hernández, L. (2017). *El modelo de jaynes-cummings para un átomo con tres niveles de energía*. [Tesis de Maestría, Univeaersidad Autónoma de Chiapas].
- Huerta-Alderete, C., y Rodriguez-Lara, B. M. (2016). *Cross - cavity quantum rabi model*. Mathematical and Theoretical, 49(41), 414001.
- James, D. F. V., Jerke, J. (2007). *Effective Hamiltonian theory and its applications in quantum information*, Can. J. Phys. 85, 625.
- Jaynes, E. T. y Cummings, F. W. (1963). *Proc. IEEE*,51(89).
- Prado, F. O., Rosado, W., De Moraes Neto, G. D., y Moussa, M. H. Y. (2014). *Steady Fock states via atomic reservoir*, Europhys. Lett. 107, 13001.
- Raithel, G., Wagner, C., Walther, H., Narducci, L. M., y Scully, M. O. (1994). *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, edited by P. Berman Academic, New York.
- Rosado,W., De Moraes Neto, G. D., Prado, F. O., y Moussa, M. H. Y. (2015). *Upper bounded and sliced Jaynes- and anti-Jaynes- Cummings Hamiltonians and Liouvillians in cavity quantum electrodynamics*, J. Mod. Opt. 62, 1561.
- Santos, M., Solano, E., Matos Filho, R. (2001). *Conditional large fock state preparation and field state reconstruction in cavity qed*. Physical Review Letters, 87(9), 093601.

- Solano, E. (2005). *Selective interactions in trapped ions: state reconstruction and quantum logic*. Physical Review A, 71(1), 013813.
- Scully. M. O., y Zubairy. M. S. (1997). *Quantum optics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Villas-Boas, C. J., y Rossatto, D. Z. (2019). *Phys. Rev. Lett.* 122, 123604. Youn-Feng, X., Xu-Bo, Z., y Guang-Can, G. (2007). *Generation of atomic entangled states with selective resonant interaction in cavity quantum electrodynamics*. Physical Review A, 75(1), 012310.