



Trabajo de Grado para Obtener el Grado de Licenciado en
Física

Avance del Perihelio de los Planetas del Sistema Solar
Aplicando la Teoría General de la Relatividad

Jorge Andrés Osorio Rivas

Universidad de Sucre
Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Física

2022

Avance del Perihelio de los Planetas del Sistema Solar
Aplicando la Teoría General de la Relatividad

Jorge Andrés Osorio Rivas

Trabajo de Grado Presentado como Requisito Parcial para
Obtener un Título de:
Licenciado en Física

Directora:

Carmen Mercedes Miranda Herazo

Universidad de Sucre

Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Física

2022

"Durante 15 años Alexander Vasilyev ha estado calculando la forma de la Tierra utilizando los datos recopilados en Spitsbergen, donde se creó un modelo preciso de la Tierra. Los cálculos del científico formaron las bases de como los satélites, y los sistemas de GPS están funcionando. El Archipiélago de Spitsbergen sigue siendo esencial para la navegación marítima mundial. Agradecemos a los primeros en pisar las islas desiertas de Spitsbergen. A los que se sacrificaron por la ciencia y el progreso, a los que hicieron descubrimientos, que ampliaron sus horizontes. A todos los científicos que trabajan y siguen trabajando en el Ártico, Alexander Vasilyev fue olvidado por la comunidad mundial pero los Rusos lo recuerdan ya que sus señales de piedras aún están entre los glaciares de Spitsbergen"...

Editorial MIR

Agradecimiento

Cuando veo que una fase importante de mi vida va a terminar, siento un sentimiento de nostalgia y desesperación al darme cuenta de que muchas personas con las que compartía mejores enfoques para pensar y ser, no se cruzarán a partir de ahora en mi camino con la frecuencia con que lo hacían cada día, cuando iba a la sala de estudios con un comportamiento tan esperanzador para aprender mejores enfoques para ver el mundo, personas que según mi discernimiento tienen un valor excepcional en el ojo público.

No obstante, tengo por delante una fase más increíble de mi vida, que me llena de alegría y, sorprendente mente, de sentimientos más profundos. Han pasado numerosos años desde que empecé como estudiante y quién podría intentar imaginar que en algún momento podría concentrarse en la ciencia física, pero a pesar de los problemas que se han introducido en el camino, estoy aquí. Estos magníficos años han servido para observar el tremendo cambio que ha provocado este ciclo, en mi condición de experto, pero además en realidad, el yo de hace mucho tiempo no me recordaría, podría echarme un vistazo con asombro y orgullo, a la luz de los tiempos prometedores y menos prometedores, pero debería avanzar hacia el final, oponerse, conducir hacia adelante, todo saldrá bien. En cualquier caso, actualmente directo, aquí están mis agradecimientos: Necesito agradecer sinceramente a cada una de las personas que han contribuido significativamente en lo que voy a lograr en este momento, ha sido bastante lejos y es inevitable recordar cómo todo comenzó con confianzas, vulnerabilidades, logros y además con pequeñas decepciones. Entre estas personas quizás quiera agradecer directamente a dos profesores que han influido en mi presentación y giro experto. En todo caso es el Maestro Carlos Cabras y la Maestra Claudia Negrete, quienes por su enfoque de mostrar el tema del poder y la atracción, establecieron en mí un extraordinario amor por esta maravillosa área de la ciencia y por la cual elegí poner a cero en consideración el perfeccionamiento de este trabajo. Por otra parte, agradezco igualmente a mi jefa de propuesta y educadora experta en Ciencias Actuales Carmen Mercedes Miranda Herazo, alguien a quien he llegado a respetar y considerar por el exceso de información que ha llegado a obtener a lo largo de su vida experta en torno a esta maravillosa área de la ciencia, hasta tal punto, de verle como el educador modelo al que me propongo alcanzar y conquistar de ahora en adelante, alguien que ha dado un enorme trozo de su tiempo y esfuerzo, para que hoy esté donde estoy. Muchas gracias por confiar en mí como suplente, por enseñarme y espolearme adecuadamente en la relatividad y por su empeño en cuidar de mis intereses.

Por otra parte, es inevitable no percibir las grandes energías que he obtenido de mis compañeros, al mostrarme un poquito de su forma de vida, enfoque de ser y pensar, las risas que me hacen saltar gracias a su enfoque encantador y curioso de exponerse, nunca muestran signos de cambio e, ni olvidan e esos pequeños granos de satisfacción que me transmiten e manera constante conmigo a pesar de pasearse por diversos caminos. Agradezco a la universidad, por permitirme ser esencial para este extraordinario grupo de unisucresños, el lugar de graduación que me invitó en sus brazos sin prácticamente ninguna separación y agradezco a aquellos educadores que me han brindado una ayuda increíble en lo que respecta a las inquietudes académicas de las observaciones, las circunstancias individuales, etc.

Por fin, doy las gracias a mi familia y a mis queridos compañeros que me han dado una ayuda cercana y monetaria para no rendirme nunca y seguir luchando, para seguir adelante incluso en las dificultades que he buscado a lo largo de mi profesión de suplente. Muchas gracias a vosotros por confiar en mí.

Resumen

Desde los albores de la historia, el hombre, atónito, ha echado un vistazo al cielo tratando de comprender y dar sentido a las peculiaridades que surgen a su alrededor y, sin poder encontrar un soporte para ellas, acaba asociándolas con la hechicería, la noción extraña e incluso la religión, algo que se prolongó durante mucho tiempo. Posteriormente, y tras incalculables periodos de percepción, las bases lógicas de la observación de las estrellas comenzaron a asentarse, llegando a un pensamiento sustancialmente más definido y sensato sobre el universo. Aquí, los compromisos asumidos por las matemáticas fueron de increíble pertinencia, siendo la premisa a partir de la cual Einstein comenzó a fomentar su hipótesis de la relatividad. El cometido de este dossier, es mostrar la mejora de la ecuación de campo de Einstein y dar sentido a una parte de sus disposiciones precisas. Por esta razón, el trabajo se separará en siete capítulos. La primera, tendrá como objetivo exponer la información y las ideas sobre las ecuaciones de campo de Einstein para un universo simétrico y estático, importante para tener la opción de fomentar las secciones adjuntas, que asumirían la parte principal del trabajo sobre el Avance del perihelio de los planetas del Sistema Solar aplicando la Teoría General de la Relatividad. Entre estas ideas pasadas, destaca el significado de los tensores que describen la curva en los conjuntos semi-riemannianos: el tensor de la curva de Riemann, el tensor de la forma de Ricci y el arco escalar, cada uno de ellos crucial en la investigación de la hipótesis de la relatividad de Einstein. Se utiliza como base fundamental de exploración moderadamente tardía, los exámenes sólidos completados sobre una cuestión similar donde se obtiene una nueva disposición estática circularmente simétrica para una abertura oscura rodeada de médula, utilizando el tensor de energía de las situaciones de Einstein. Las ecuaciones de Einstein de la Teoría de la Relatividad General y su solución al vacío para un agujero negro de tipo Schwarzschild se utilizan como premisa realmente hipotética para rastrear el desarrollo de los planetas ya comparando con las ecuaciones de Newton la forma como se calcula el perihelio del sistema solar donde utilizamos que la $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GMm}{r}$ en relación con su círculo único y para $precesión = 6\pi \frac{GM}{c^2(1-e^2)a}$ que ayuda calcular el perihelio del nuestro sistema solar.

Palabras claves: Teoría de la Relatividad General, perihelio de los planetas, abertura oscura, el tensor de la curva de Riemann, tensor de la forma de Ricci

Abstract

Since the dawn of history, man, astonished, has taken a look at the sky trying to understand and make sense of the peculiarities that arise around him and, unable to find a support for them, ends up associating them with sorcery, strange notion and even religion, something that lasted for a long time. Subsequently, and after incalculable periods of perception, the logical foundations of stargazing began to settle down, arriving at a substantially more definite and sensible thinking about the universe. Here, the commitments assumed by mathematics were of incredible relevance, being the premise from which Einstein began to promote his relativity hypothesis. The task of this dossier is to show the improvement of Einstein's field equation and to make sense of some of its precise provisions. For this reason, the work will be separated into seven chapters. The first one, will aim to expose the information and ideas about Einstein's field equations for a symmetric and static universe, important to have the option to further the attached sections, which would assume the main part of the work on the Advance of the perihelion of the planets of the Solar System applying the General Theory of Relativity. Among these past ideas, the significance of the tensors describing the curve in semi-Riemannian sets stands out: the Riemannian curve tensor, the Ricci shape tensor and the scalar arc, each of them crucial in the investigation of Einstein's relativity hypothesis. Solid examinations completed on a similar issue where a new circularly symmetric static circularly symmetric arrangement for a dark aperture surrounded by pith is obtained utilizing the energy tensor of Einstein's situations is utilized as the fundamental basis of moderately late exploration. The Einstein equations of the Theory of General Relativity and their vacuum solution for a Schwarzschild-type black hole are used as a really hypothetical premise to trace the development of the planets already by comparing with Newton's equations the way the perihelion of the solar system is calculated where we use that the $E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - \frac{GMm}{r}$ in relation to its unique circle and for $precesión = 6\pi \frac{GM}{c^2(1-e^2)} a$ helps to calculate the perihelion of our solar system.

Keywords: General Relativity Theory, perihelion of the planets, dark aperture, Riemannian curve tensor, Ricci shape tensor.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría General de la Relatividad (TGR)	3
2.1. Principios Fundamentales	3
2.2. Geodésica	4
2.2.1. Definición 1	4
3. Métrica – Espacio Métrico	7
3.1. Definición 2:	7
3.2. Definición 3:	7
3.3. Definición 4:	8
4. Ecuación de Campo de Einstein (ECE)	9
4.1. Soluciones a la ECE	10
5. Solución De Schwarzschild	12
5.1. Métrica de Schwarzschild	12
6. El Perihelio De Mercurio	18
6.1. Formulación Newtoniana	18
7. Precesión Del Perihelio De Los Planetas Del Sistema Solar	28
7.1. Ecuaciones	29
7.1.1. Mercurio	31
7.1.2. Venus	32
7.1.3. Tierra	33
7.1.4. Marte	34
7.1.5. Júpiter	35
7.1.6. Saturno	36
7.1.7. Urano	37
7.1.8. Neptuno	38

Introducción

La Tierra y diferentes cuerpos del sistema planetario cercano dan la vuelta al Sol en una trayectoria que no es redonda pero si elíptica, por lo que su distancia al Sol, es variable y eso pretende que haya un punto en la dirección en la que están más cerca del Sol, y la Tierra y diferentes colecciones del grupo planetario se mueven alrededor del Sol. Los círculos de ciertos planetas son esencialmente un círculo ideal, pero otros no lo son. Algunos círculos tienen forma ovalada o dan la impresión de estar “extendidos hacia fuera”. Los investigadores se refieren a estas formas ovaladas como “círculos”. Suponiendo que el círculo de un planeta sea una elíptica, el Sol se encuentra en el punto focal de esa elíptica. Sin embargo, en el caso de que el círculo sea un ovalo, el Sol se encuentra en un punto llamado “centro” del ovalo, que no es equivalente al centro [Torres, L.D.]. Como el Sol no es el punto focal de un círculo curvo, a medida que los planetas giran alrededor del Sol; se acercan y se alejan de él. El punto en el que un planeta está más cerca del Sol se conoce como perihelio. El Universo realizado contiene unos cien mil millones de mundos, cada uno de los cuales contiene un gran número de estrellas. En uno de estos mundos, que llamamos Vía Láctea, hay una estrella de tamaño y esplendor medio, que llamamos Sol. A su alrededor giran ocho planetas y otros cuerpos celestes, formando una enorme familia, el Sistema Solar. A uno de estos planetas lo llamamos Tierra, donde un largo período de tiempo antes, apareció la vida, así como el desarrollo de esa vida para inducir entidades orgánicas progresivamente complejas [Rindler, W.]. Nuestro planeta Tierra, nuestro Sol, nuestra Galaxia, todo lo que comprende nuestro rápido clima es sin embargo una pequeña división en la monstruosidad del Cosmos. La ecuación de Einstein (1915) para la rareza en el avance del perihelio de los planetas fue obtenida por primera vez en bastante tiempo, para encontrar la ecuación y así tener una hipótesis de la gravedad creada por un oscuro físico alemán, para los modelos numéricos que el caso para retratar con precisión el desarrollo del Universo, la energía atractiva es sólo un signo de la forma del espacio-tiempo de cuatro capas en la materia enorme, y esta materia así dirige las cualidades que representan la curva del tiempo de la habitación en sí. Dada la idea atractiva de la atracción, en un universo que se espera que contenga sólo materia estándar; debido al impacto de la extensión del Universo en la medición del modelo estático redondamente simétrico, mostrando que provoca resultados comparables a los obtenidos por la estrategia para presentar la energía tenue como una parte material en el tensor de energía-fuerza. El trabajo realizado en la disposición de Schwarzschild, que cambia los marcos como se espera del campo entregado por el Sol, se toma como base principal de la investigación. Además, enmarca el modelo de apertura oscura menos complejo. Esta disposición es una de las más increíbles que se conocen, ya que fue la primera disposición definitiva de las condiciones del campo. Hay una aproximación más a la adquisición de la métrica de Schwarzschild, y esta comprende la aproximación de la componente lineal mediante contemplaciones en las que dibujamos correlaciones con las regulaciones de Kepler para el movimiento planetario [Schwarzschild, K. C.]. Tal vez r es una dirección errática outspread cambiado de acuerdo con darnos la región de la superficie euclidiana en compa-

ración con un 2-círculo). Con este cambio de escala, podemos definir la 2-superficie para cualquier valor de r y t por la medida circular convencional de “alcance y longitud”: A diferencia de la estimación utilizada por Einstein para el cálculo de la precesión de Mercurio, el arreglo de Schwarzschild es un arreglo definido, y eso implica que tiende a ser utilizado en el examen de los movimientos planetarios donde el cuerpo focal podría ser un cuerpo gigantesco más pequeño que crea un campo gravitacional sustancialmente más extremo que el del Sol actual. Suponiendo que imaginemos un artículo focal tan grueso, cuya masa se concentra dentro de su campo gravitatorio, podemos adquirir desviaciones muchos mayores de los círculos newtonianos. En el caso de que la proporción de precesión sea aproximadamente equivalente a la proporción orbital, tendremos un círculo con una energía marginalmente menor, la dirección parecerá como si la fuerza precisa fuera factible para hacer que los círculos industriados de tiempo se sumerjan hacia el cuerpo focal en algún rango aleatorio. Una vez más, consideraremos un local de habitación alrededor de una masa puntual estática, para la cual podemos esperar que la medida tenga una maravillosa uniformidad redonda y esté libre de tiempo. Además, para mejorar la deducción que se hará, recurriremos a la utilización de unidades geométricas con las que la velocidad constante de la luz c se fija en un valor equivalente a la solidaridad, es decir $c = 1$. En efecto, incluso sin conocer las condiciones de campo de la Relatividad General, es factible dar una determinación “heurística” (más creativa que especializada) no absolutamente exhaustiva de la métrica de Schwarzschild conociendo de antemano la calidad de la variedad de la gravedad con la inversa del cuadrado de la distancia, la información pasada sobre la tercera regulación de Kepler para la elíptica, y los tramos no válidos para las direcciones iridiscentes [Piñeyro, P. J.].

Capítulo 1

Teoría General de la Relatividad (TGR)

En 1905 Albert Einstein publica su conocida "Teoría Especial de la Relatividad" donde esclarecía la interconexión entre el espacio y el tiempo y deducía las consecuencias físicas que se derivaban de ello. Sin embargo, no fue hasta 1907 (dos años después) que el matemático alemán Hermann Minkowski demostró que las ideas de Einstein podían ser expresadas geoméricamente solo si se consideraba que el espacio físico poseía cuatro dimensiones: una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales. En 1916 publica la Teoría General de la Relatividad la cual es uno de los logros más imponentes de la física del siglo XX, ésta explica lo que percibimos como fuerza de gravedad. De hecho, esta fuerza surge de la curvatura del espacio y del tiempo [Gil, L. B.] .

Ya que Einstein propuso que los objetos como el Sol y la Tierra variaban la geometría del espacio, en presencia de materia y energía, el espacio se puede deformar y estirar, formando cordilleras, montañas y valles que causan que los cuerpos se muevan por estas rutas curvas. Así que aunque la Tierra parezca moverse alrededor del Sol a causa de la gravedad, en realidad, tal fuerza no existe [Blau, M.]. Es simplemente la geometría del espacio-tiempo alrededor del Sol la que dice cómo debe moverse la Tierra. La idea matemática fue posteriormente utilizada por Einstein, quien a través de su amigo y compañero de la Universidad Marcell Grossmann, ya conocía sobre la existencia de la geometría de Riemann. Considerando geometría de Riemann en espacios de cuatro dimensiones, Einstein derivó, en 1915, las leyes que rigen la gravitación y que generalizan la ley de Newton para campos gravitatorios intensos. La TGR tiene consecuencias de largo alcance, no sólo explica el movimiento de los planetas, sino que también puede describir la historia y la expansión del Universo, la física de los agujeros negros, la curvatura de la luz de las estrellas y las galaxias distantes [Aguirre, E.].

1.1. Principios Fundamentales

La relatividad general está basada en un conjunto de principios fundamentales:

- **El principio general de la relatividad:** Las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores (inerciales o no).
- **El principio general de covariancia:** Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
- El movimiento inercial se realiza a través de trayectorias geodésicas.

- **El principio de invariancia local de Lorentz:** Las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales.
- **Curvatura del espacio-tiempo:** Esto permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales en un espacio-tiempo curvado.
- La curvatura del espacio-tiempo está creada por la interacción entre la masa y la energía con el espacio-tiempo. La curvatura del espacio-tiempo puede calcularse a partir de la densidad de la materia y energía al igual que de las ecuaciones de campo de Einstein.

El principio de equivalencia que había guiado el desarrollo inicial de la teoría es una consecuencia del principio general de la relatividad y del principio del movimiento inercial sobre trayectorias geodésicas. Gauss demostró que no hay razón para que, lo que significa que si un físico pone un patrón, y un cartógrafo permanece a una cierta distancia y se mide su longitud por triangulación basada en la geometría euclidiana, entonces no está garantizado que sea dada la misma respuesta si el físico porta el patrón consigo y mide su longitud directamente

1.2. Geodésica

Estamos acostumbrados a que cuando queremos ir de un sitio a otro por el camino más cercano, la trayectoria a seguir sea la recta que une esos dos lugares. Pues bien, una vez más, el sentido común nos juega una mala pasada. Lo anterior no es del todo cierto, y se debe a que depende de en qué espacio nos encontremos. En el espacio Euclídeo esta afirmación sí que sería cierta, pero en general, en un espacio cualquiera, lo común es que no lo sea. Esto nos lleva a introducir un nuevo concepto:

1.2.1. Definición 1

Llamamos geodésica a la curva de mínima longitud que une dos puntos, la distancia entre ellos se denomina geodésica de ese espacio.

Como hemos indicado, en el espacio Euclídeo las geodésicas son líneas rectas, pero en general no se cumplirá en una variedad. ¿Que condición debe satisfacerse para que una curva sea una geodésica? Este será nuestro propósito en este apartado [Briozzo, C. B.].

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i) dt \quad (1.1)$$

Donde,

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (1.2)$$

x^i Coordenadas de los puntos, t Parámetro simple.

Para encontrar la geodésica se hace necesario evaluar función utilizando la ecuación de Euler, como sigue,

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

Condición de Euler para que la integral sea un máximo o un mínimo, también llamado valor estacionario.

$$S = \int \sqrt{g^{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (1.4)$$

Longitud de una curva en v_n

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \sqrt{g^{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (1.5)$$

$$\dot{s} = F \quad (1.6)$$

$$s = \int \dot{s} dt \quad (1.7)$$

Realizando un cambio de variable en i a k , tenemos que $\frac{\partial F}{\partial x^i}$

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{g^{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (1.8)$$

Realizando nuevamente un cambio de variable en i a k ahora con $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2\sqrt{g^{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} 2g_{ik} \dot{x}^i = \frac{1}{\dot{s}} g_{ik} \dot{x}^i \quad (1.9)$$

Hallamos $\frac{d}{dt}$ y se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \right) = -\frac{1}{\dot{s}^2} \ddot{s} g_{ik} \dot{x}^i + \frac{1}{\dot{s}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{\dot{s}} g_{ik} \ddot{x}^i \quad (1.10)$$

Reemplazando las ecuaciones (2,8) y(2,10) en (2,3) para hallar la integral mínima y me obtenemos

$$\frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \left(-\frac{1}{\dot{s}^2} \ddot{s} g_{ik} \dot{x}^i + \frac{1}{\dot{s}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{\dot{s}} g_{ik} \ddot{x}^i \right) = 0$$

$$\frac{1}{\dot{s}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{\dot{s}} \ddot{s} g_{ik} \dot{x}^i - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j - g_{ik} \ddot{x}^i \right)$$

Que se puede escribir

$$g_{ik} \ddot{x}^i - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g_{ik} \dot{x}^i + \dot{x}^i \dot{x}^j \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} \right) = 0$$

Obteniendo el símbolo de Christoffel de primera clase

$$g_{ik} \ddot{x}^i - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g_{ik} \dot{x}^i + [k, ij] \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Multiplicando por g^{kr} $g_{ik} = \delta_r^i$ tenemos que

$$g^{kr} g_{ik} \ddot{x}^i - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g^{kr} g_{ik} \dot{x}^i + g^{kr} [k, ij] \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (1.11)$$

Después de evaluar tenemos la siguiente expresión

$$\ddot{x}^r - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^r + \Gamma_{ij}^r \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (1.12)$$

Cambiando los parámetros de $s = t$ y de $\dot{s} = 1, \ddot{s} = 0$ obtenemos la ecuación diferencial de la geodésica

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (1.13)$$

Capítulo 2

Métrica – Espacio Métrico

El tensor métrico g_{ab} nos proporciona un producto escalar interno de nido en donde se escribe el producto escalar de dos vectores λ y μ como:

$$\lambda \cdot \mu = \lambda^i e_i \cdot \mu^j e_j = g_{ij} \lambda^i \mu^j = \lambda_i e^i \cdot \mu_j e^j = g^{ij} \lambda_i \mu_j = \lambda_i \mu^i = \lambda^i \mu_i$$

Para cada punto $P \in M$, con M variedad diferenciable. Normalmente pedimos que un producto escalar sea definido positivo, es decir, $g_{ab} \lambda^a \lambda^b \geq 0, \forall \lambda^a$ y con una $g_{ab} \lambda^a \lambda^b = 0$ si y solo si $\lambda^a = 0$ sin embargo solo vamos a exigir que el tensor métrico sea no singular, existiendo así la matriz inversa $[g^{ab}]$.

En el marco de la relatividad general no vamos a tener una métrica definida positiva pues tendremos un tensor métrico indefinido. Por tanto, nos encontramos ante una descripción semiriemanniana del espacio. Bajo estas condiciones, podemos generalizar ciertas propiedades del espacio Euclideo incluyendo valores absolutos.

2.1. Definición 2:

llamamos longitud de un vector λ^a a:

$$|g_{ab} \lambda^a \lambda^b|^{\frac{1}{2}} = |g^{ab} \lambda_a \lambda_b|^{\frac{1}{2}} = |\lambda_a \lambda^a|^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

Diremos que dicho vector es unitario si su longitud es uno. Como el tensor métrico es indefinido, existen vectores no nulos de longitud cero.

2.2. Definición 3:

El ángulo θ entre dos vectores λ^a y μ^a no nulos se define como:

$$\cos \theta = \frac{\lambda \cdot \mu}{|\lambda| |\mu|}$$

En nuestro caso, el ángulo está dado por

$$\cos \theta = \frac{g_{ab} \lambda^a \mu^b}{|g_{cd} \lambda^c \lambda^d|^{\frac{1}{2}} |g_{ef} \mu^e \mu^f|^{\frac{1}{2}}}$$

2.3. Definición 4:

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero y sea γ una curva diferenciable en M variedad diferenciable dada por $x^a = x^a(t)$, con $t \in [a, b]$. Si notamos $\dot{x}^a = (dx^a)/dt$, la longitud de γ será:

$$L = \int_a^b \sqrt{|g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b|} dt$$

Podemos hallar la distancia entre dos puntos cercanos en una curva como la longitud de dicha curva entre esos puntos. Llamaremos a esta distancia elemento de línea, que en su versión infinitesimal tiene la expresión siguiente:

$$ds^2 = |g_{ab} dx^a dx^b|$$

El espacio sobre el que se construye el espacio-tiempo de la *TGR* es una variedad semi-riemanniana de cuatro dimensiones cuyo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, con $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ está definido como $(+ - - -)$, *i.e.*, en cada punto P tendremos un tensor métrico diagonal con un elemento positivo y el resto negativos [Casanova, V].

Cualquier vector no nulo está descrito como

$$\begin{cases} \text{tipotemporal si} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu > 0 \\ \text{nulosi} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu = 0 \\ \text{tipoespacial si} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu < 0 \end{cases}$$

Capítulo 3

Ecuación de Campo de Einstein (ECE)

Se sabe por el Principio de Equivalencia que la gravedad es un signo de la forma de la habitación, es decir, una propiedad matemática del tiempo de la habitación, entonces de nuevo nos damos cuenta de que el manantial de este flujo y reflujo es la materia de la que tenemos una representación tensorial, el supuesto tensor de energía; como sabemos definitivamente, la posibilidad de la hipótesis de Einstein de la energía atractiva depende de la geometrización de la potencia gravitacional, en 1909–13 Einstein comprendió que el tensor métrico que retrata la curva de habitación, está a todas luces conectado con la cantidad de materia en el local al que se refiere, ya que los campos gravitacionales son entregados por la cuestión, la materia que se capta con respecto a la relatividad general. Las condiciones de campo de Einstein relacionan la presencia de materia con el flujo y reflujo del tiempo ambiente. Más exactamente cuanto mayor sea la concentración de materia, representada por el tensor de energía-impulso, tantos mayores serán las componentes del tensor de curvatura de Ricci . Para cada punto en el espacio-tiempo, la ecuación de campo de Einstein retrata cómo el espacio-tiempo es doblado por la cuestión y tiene el tipo de una equidad cercana entre un tensor de forma para el punto y un tensor que representa el transporte de la cuestión alrededor del punto, que es la razón por la que el principio de covarianza nos permite saber que la condición debe ser sustancial en todos los contornos de referencia, y por lo tanto, debe tener una estructura tensorial [Charles W Misner, K. S.]. En particular, la condición de Einstein debe tener la estructura:

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que describe la curvatura del espacio, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y k es la constante de proporcionalidad .

El problema que surge para poder identificar el tensor $G_{\mu\nu}$ en la cual tiene que cumplir ciertas características tanto en la física como en las matemáticas:

1. Que $G_{\mu\nu}$ tiene que ser simétrico en los dos índices, ya que $T_{\mu\nu}$ también lo es.
2. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico. Por lo tanto, tiene que ser una función solamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas.
3. Para el espacio plano, tenemos que $G_{\mu\nu} = 0$.
4. La ley de conservación de energía $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ implica que también $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$.

5. Si se puede identificar la componente g_{00} de la métrica con el potencial gravitacional newtoniano $\Phi = -(G_{Nm})/r$, para obtener la teoría dinámica y para la ecuación de Poisson, $G_{\mu\nu}$ debe contener segundas derivadas de la métrica. La manera más natural, por lo tanto, es a través de las contracciones del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\gamma$. obtener una ecuación diferencial de segundo orden (y no más) en los potenciales gravitatorios, $G_{\mu\nu}$ tiene que ser lineal en el tensor de Riemann

Las condiciones 1 – 6 determina el tensor $G_{\mu\nu}$ unívocamente; se puede demostrar que la expresión más general para un tensor simétrico, construido de la métrica y sus derivadas y lineal en $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es de la forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda(x) \quad (3.2)$$

Donde α es una constante, R es el escalar de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ que es el tensor métrico y $\Lambda(x)$ es una función escalar con dimensiones ML^{-3} . Ya exigimos que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ y esto implica que $\alpha = -1/2$ y que Λ es una constante, mientras que $G_{\mu\nu} = 0$ para el espacio plano implica que $\Lambda = 0$. Por lo tanto, el único tensor que satisface todas las condiciones necesarias es el tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.3)$$

Ya que una comparación con las fórmulas newtonianas clásicas fija la constante de proporcionalidad donde $k = 8\pi G_N$, donde G_N es la constante de Newton, de modo que las ecuaciones de Einstein vienen dadas por:

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Sin embargo, incluso sujeto a condiciones iniciales, el sistema no tiene solución única, siendo siempre posible llevar a cabo transformaciones de coordenadas [Foster, J. a.].

3.1. Soluciones a la ECE

Los arreglos de la ECE numéricamente, son las condiciones de campo de Einstein son excepcionalmente confundido sobre la base de que comprenden un arreglo de 10 condiciones en medio no lineal subordinados, girando entonces a las estrategias matemáticas, encontrando sustancialmente más arreglos alucinantes que son mucho de la cosa para abordar al igual que las ondas gravitacionales; en esta última sección nos concentraremos en algunos de ellos, comenzando con el arreglo más fundamental [Einstein, A. (2008.)].

- Como la Métrica de Einstein-Rosen se basa en la investigación de las ondas gravitacionales, el tipo de medición con el que se va a trabajar debe establecerse en primer lugar, para esta situación se utilizará una métrica de equilibrio en forma de tubo y muy bien puede mostrarse a través de un cambio de la métrica de Weyl en direcciones estándar. El primer espacio-tiempo de Einstein-Rosen tiene un lugar con un enorme grupo de espacios-tiempo en los que la medición depende de la coordenada temporal y de las direcciones espaciales. Estos espacios-tiempo se suelen denominar la especulación de los espacios-tiempo de Einstein-Rosen y se representan mediante la componente de línea.

- Para una brevedad de masa estática circularmente simétrica corresponde el vacío alrededor de una circulación de masa estática circularmente simétrica es la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kruskal-Szekeres. Se aplica a una estrella y provoca la expectativa de un horizonte del momento más allá del cual no se puede notar. Predice la presencia concebible de una abertura oscura de masa M dada de la que no se puede extraer energía, en la sensación de una abertura oscura de masa M dada; separada, en la sensación de estilo antiguo del término como por ejemplo, no mecánico-cuántico.
- Masa de rotación simétrica a su vez donde el espacio no relleno alrededor de una circulación de masa curva simétrica a su vez es la métrica de Kerr. La métrica de Kerr. Se aplica a una estrella en rotación y permite prever la presencia concebible de una abertura oscura giratoria. De la presencia concebible de una abertura oscura alterante de masa M y fuerza raquílica K dadas, de la que se puede extraer la energía rotacional.
- Universo isotrópico y homogéneo, está cargado con un espesor consistente y una tensión irrelevante, ya que es la métrica de Robertson-Walker. Donde se aplica a todo el Universo y provoca distintos modelos de desarrollo que prevén un Universo creciente

Para este trabajo estamos trabajando la métrica de Schwarzschild porque nosotros estamos asumiendo el espacio esférico, simétrico y estático, para este fin se propone encontrar una transformación de coordenadas [Faber, R. L.].

Capítulo 4

Solución De Schwarzschild

Schwarzschild pretendía encontrar los coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ resolviendo las ecuaciones de campo, pero debido a su alta complejidad en cuanto al orden de no linealidad, se limitó a encontrarlos para un campo estático y simétricamente esférico en el espacio-tiempo vacío alrededor de un objeto esférico y masivo como puede ser una estrella. Einstein mismo creyó inicialmente que sus ecuaciones eran tan complicadas que nunca se encontraría una solución exacta. Sin embargo, pocos meses después de la publicación de la relatividad general, en 1916, Karl Schwarzschild (1873 – 1916) halló la solución exacta de un objeto estático con simetría esférica y en los últimos 90 años decenas, si no cientos de soluciones exactas han sido encontradas. En este capítulo discutiremos esta solución de Schwarzschild y su significado físico [Foster, J. a. (2006).]. Para ello se asume que:

- El campo es estático,
- El campo es simétrico esféricamente,
- El espacio-tiempo está vacío, excepto por una masa puntual en el origen,
- El espacio-tiempo es asintóticamente plano.

4.1. Métrica de Schwarzschild

En este capítulo se realiza primero un trabajo de obtención de la solución original de Schwarzschild, ya que se analiza lo relacionado al problema de la obtención de nuevas soluciones estáticas esféricamente simétricas, a través del tensor de energía - momento de las ECE, y considerando la energía oscura como un campo cosmológico de quintaesencia; ya que se perturba consecuentemente la métrica de Schwarzschild al incluir el factor de escala en los términos espaciales de la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein. A darle la solución expedita para la derivación de la métrica de Schwarzschild ya que en ausencia de energía y materia, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ es cero y (la parte sin traza de) las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4.1}$$

Ya que estas ecuaciones del vacío admiten soluciones no triviales que a primera vista puede ser extraño en el espacio de Minkowski. La métrica que satisface las ecuaciones

del vacío (5.1) tiene como nombre Ricci-plana [Gil, L. B.]. Ya que estas soluciones de Ricci-planas en general no son planas pero son soluciones del vacío en la constante cosmológica; la solución de Schwarzschild es la solución no-trivial más sencilla, debido a su gran cantidad de simetría ya que no puede haber términos cruzados de tipo $g_{ti} dt d^i$ que la presencia de estos términos rompería la invariancia de $t \rightarrow -t$ y de esto existen por lo tanto, unas coordenadas angulares θ y φ tales que las secciones espaciales $t = t_0$ se puedan escribir como:

$$ds^2 = -f(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.2)$$

donde r es la coordenada radial. En principio el factor delante de la parte angular puede ser una función arbitraria $h^2(r)$, pero con un cambio de coordenadas $\tilde{r} = h(r)$ siempre se puede escribir la métrica en la forma (5.1), siendo que las ecuaciones de Einstein son demasiado difíciles de resolver directamente, pero por la simetría de la solución de Schwarzschild podemos escribir una propuesta de la forma:

$$ds^2 = e^{2A(r)} c^2 dt^2 - e^{2B(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.3)$$

Ya que la propuesta refleja la simetría esférica y el hecho de que la solución es estática en la ausencia de términos cruzados y el hecho de que A y B son funciones de r únicamente. Entonces ahora es sustituir esta propuesta en las ecuaciones del vacío (5.1) para determinar A y B .

Entonces $A(r) = U = e^{2\nu}$ y $B(r) = V = e^{2\lambda}$ para mostrar los valores del coeficiente del tensor métrico de $g_{\mu\nu}$ los productos escalares me quedaría de la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{00} = e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Entonces para $g^{\mu\nu}$ queda de la forma

$$g^{\mu\nu} = g^{00} = \frac{1}{e^{2\nu}} = e^{-2\nu}, g^{11} = \frac{1}{e^{2\lambda}} = e^{-2\lambda}, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{-r^2 \sin^2 \theta}$$

Por lo que el tensor métrico viene dado de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Para algunos casos tendremos la necesidad de saber en tensor métrico de la forma dual:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, el elemento de línea según los argumentos anteriores tendremos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Sustituyendo:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

Para acotar la escritura de este elemento de línea se toma la siguiente igualdad:

$$(d\Omega)^2 = r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

De donde nos queda:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (dr)^2 + (d\Omega)^2$$

Ahora por los símbolos de Christoffel no-triviales vienen dados por:

Procedemos ahora a calcular los símbolos de Christoffel el con la fórmula:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = \Gamma_{ji}^k$$

Como $g^{ij} = 0 \forall i$, es claro que los símbolos de Christoffel solo van a existir cuando $l = k$, luego podemos eliminar el sumatorio y hacer $l = k$.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

Además como $g_{ij} = 0 \forall i$, también podemos distinguir tres casos:

1. Además como $g_{ij} = 0 \forall i$, también podemos distinguir tres casos
2. Si $i = k$ o $i = k = j$

$$\Gamma_{kj}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^j} = \Gamma_{jk}^k \quad (4.6)$$

3. Si $i = j$, con i

$$\Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \right) = -\frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (4.7)$$

Por lo tanto, los únicos símbolos de Christoffel el no nulos, teniendo en cuenta que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\rho} \right)$$

Pero si $\rho = 0$ me queda de la forma:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\nu} \left(\frac{\partial(0)}{\partial t} + \frac{\partial e^{2\nu}}{\partial r} - \frac{(0)}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\nu} \frac{\partial e^{2\nu}}{\partial r}$$

$\frac{\partial e^{2\nu}}{\partial r}$ Utilizando la regla de la cadena entonces $U = 2\nu$ me queda que

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 2\nu' \left(\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) \frac{\partial e^{2\nu}}{\partial r} = \frac{\partial e^\nu}{\partial r} = \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial e^{2\nu}}{\partial \nu} = 2\nu' e^{2\nu}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} e^{-2\nu} \frac{\partial e^{2\nu}}{\partial r} = \nu' \frac{e^{2\nu}}{e^{2\nu}}$$

Se cancela $\frac{e^{2\nu}}{e^{2\nu}}$ y me queda de la forma

$$\Gamma_{01}^0 = \nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}$$

Bueno esto son los resto del símbolos de Christoffel que no son cero (0) donde se calcula de la misma forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= r' = \Gamma_{10}^0, \Gamma_{00}^1 = r' e^{2(r-\lambda)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{11}^1 = \lambda' \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{e^{2\lambda}} = -r e^{-2\lambda} \\ \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \varphi}{e^{2n}} = -r e^{2\lambda} \sin^2 \varphi \\ \Gamma_{31}^2 &= -\sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Bueno recordemos que $A = r$ y $B = \lambda$, entonces queda que:

$$\begin{cases} \Gamma_{tt}^r = e^{2(A-B)} c^2 A' & \Gamma_{r\theta}^\theta = r^{-1} & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta \\ \Gamma_{tr}^r = A' & \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1} & \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-2B} \\ \Gamma_{rr}^r = B' & \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = -r e^{-2B} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (4.8)$$

De modo que las componentes del tensor y el escalar de Ricci que no son cero son

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{2(A-B)} c^2 \left[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1} A' \right] \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1} B' \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B} [r A' - r B' + 1] - 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \\ R &= -2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1} (A' - B') + r^{-2} \right] + 2r^{-2} \end{aligned}$$

Bueno se muestra que la derivada esta con respecto a r , entonces las componentes del tensor de Ricci a cero, para poder resolver las ecuaciones de Einstein, que nos lleva a un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no-lineales para dos incógnitas acopladas, ahora multiplicando R_{tt} por $e^{2(A-B)c^2}$ y sumándolo con R_{rr} se obtiene que

$$0 = e^{2(A-B)} c^2 R_{tt} + R_{rr} = -2r^{-1} (A' + B') \quad (4.9)$$

De modo que,

$$B' = -A' \quad (4.10)$$

Como también se puede decir que es lo mismo $B(r) = -A(r) + c_0$ ya que la de integración c_0 no tiene un significado físico y puede absorber una redefinición por coordenadas temporal de $t = e^{(c_0)} t$ donde se puede poner que $c_0 = 0$ dando la solución general de la ecuación (5,9) que es

$$A(r) = -B(r) .. \quad (4.11)$$

Con esta condición de la ecuación para R_{rr} sustituimos para encontrar que,

$$B' = -A' \quad (4.12)$$

Como también se puede decir que es lo mismo $B(r) = -A(r) + c_0$, ya que la de integración c_0 no tiene un significado físico y puede absorber una redefinición por coordenadas temporal de $t = e^{(c_0)} t$ donde se puede poner que $c_0 = 0$ dando la solución general de la ecuación (5,9) que es

$$A(r) = -B(r) .. \quad (4.13)$$

Con esta condición de la ecuación para R_{rr} sustituimos para encontrar que,

$$R_{rr} = A'' + 2(A')^2 + 2r^{-1}A' = 0 \quad (4.14)$$

Si se hace el cambio de variable de $A' = \alpha$ entonces se reduce a la ecuación (5.13) y nos queda

$$\alpha' + 2\alpha^2 + 2r^{-1}\alpha = 0 \quad (4.15)$$

Se denota esta ecuación que es una ecuación diferencial de tipo Bernoulli porque tiene la forma de $y' + p(x)y = q(x)y^n$, ahora resolviendo la ecuación (5.15) reescribo la ecuación diferencial como una de Bernoulli

$$\alpha' + \frac{2}{r}\alpha = -2\alpha^2$$

La solución general se obtiene sustituyendo $v = y^{(1-n)}$ y resolviendo que $\frac{1}{1-n}v' + p(x)v = q(x)$ y como es reducible a través del cambio de variable da una ecuación diferencial lineal de primer orden e integrando dicha ecuación se tiene

$$e^{2A(r)} = 1 - \frac{C}{r} \quad (4.16)$$

donde $-C$ es una constante de integración con dimensión de longitud L .

Para soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein y con poca (o sin) curvatura la componente g_{tt} la métrica es proporcional al potencial gravitatorio newtoniano $\phi = \frac{-G_n m}{r}$ ya comparado con g_{tt} se puede identificar el potencial newtoniano $\phi = \frac{-C}{r}$, donde $C = 2c^{-2}G_n m$ siendo que $2c^{-2}$ es el factor proporcionalidad, por lo tanto, la ecuación (5.14) queda ahora de la forma

$$e^{2A(r)} = 1 - \frac{2}{c^2} \frac{G_n m}{r} \quad (4.17)$$

De la ecuación (5.16) no es muy difícil de averiguar que satisface la ecuación (5.13) y por lo tanto, la solución de Schwarzschild viene dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \quad (4.18)$$

r_s es el radio de Schwarzschild y $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ es el elemento de línea de las dos esferas \mathfrak{S}^2 , donde el radio de Schwarzschild es el radio crítico (también llamado por Laplace radio gravitacional) para la velocidad de escape, calculado con métodos puramente newtonianos, coincide exactamente con el radio de Schwarzschild, el radio desde donde la luz ya no puede salir hacia el exterior [Goldstein, H. P.]. La Masa de Schwarzschild corresponde a la siguiente igualdad, para simplificar algunos cálculos y de escritura.

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

Capítulo 5

El Perihelio De Mercurio

5.1. Formulación Newtoniana

Para empezar, tenemos que la teoría Newton de donde la energía del sistema ha de ser la suma de la cinética y la potencial, por lo que tenemos de la forma [Hartle, J. B.]:

$$E = K + U \quad (5.1)$$

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GMm}{r} \quad (5.2)$$

Tomando de la ecuación de un campo potencial gravitatorio Newtoniano de que $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + \frac{L}{mr(t)}\hat{\theta}(t)$ y remplazando en la ecuación (5.2) queda que,

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + \frac{L^2}{m^2r^2(t)}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (5.3)$$

Realizando unos arreglos respectivos se obtiene que el potencial gravitatorio Newtoniano (PN) quede de la forma:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \frac{L^2}{2mr^2(t)} - \frac{GMm}{r} \quad (5.4)$$

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2(t)} - \frac{GMm}{r} \quad (5.5)$$

Donde se puede derivar con respecto al tiempo, ya que el cambio con respecto al tiempo es lo que nos interesa, entonces el primer término de la derecha corresponde a la energía cinética, el segundo término corresponde al potencial centrífugo y por último y más importante son los dos últimos términos a lo cual recibe el nombre de Potencial Efectivo denotado por U_{eff} . Obteniendo

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)\right) + \frac{d}{dt}U_{eff}(r) \quad (5.6)$$

Al derivar, se tiene que

$$0 = m\ddot{r}(t)\dot{r}(t) + \frac{\partial U_{eff}(r)}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial}{\partial r}U_{eff}(r)$$

Reemplazando el valor de U_{eff} y derivando con respecto a r se obtiene:

$$m\ddot{r}(t) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (5.7)$$

Esta ecuación nos da la posición del cuerpo, pero al querer saber las órbitas necesitamos expresarla en términos de r y θ , es por eso por lo que según el siguiente cambio de variable se logrará [Janssen, B.].

$$r = \frac{1}{u(\theta)} \quad (5.8)$$

Introduciendo los cambios de la variable a la primera derivada de r con respecto al t y trabajando con la ecuación $\dot{\theta}(t) = \frac{L}{mr^2(t)}$ y haciendo unos pequeños cálculos nos da esta ecuación

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (5.9)$$

y derivando por segunda vez y teniendo en cuenta la ecuación (6.9) obtenemos que:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (5.10)$$

y ahora tomando la ecuación (6.10) y se reemplaza en la ecuación (6.7) y haciendo algunos procesos lógicos o arreglos matemáticos, finalmente con la ecuación de Binet, que es la queda forma de:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (5.11)$$

De estas ecuaciones la que describe las órbitas planetaria, entonces para solucionar esta ecuación procedemos por los casos de solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, entonces como solución de esta ecuación diferencial la suma siguiente:

$$u = u_p + u_g \quad (5.12)$$

Para la solución general u_g igualamos la ecuación a cero, como:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (5.13)$$

Esta ecuación acepta una solución donde al derivar e introducir la ecuación (6.13) el valor de c se toma como el valor de 1 y la constante φ como es parámetro de fase la optamos por el valor de cero, entonces el valor de A como constante se iguala para el valor de la solución particular se toma simplemente de la forma:

$$u_p = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (5.14)$$

Y reemplazando a la ecuación (6.12) y realizando la factorización necesaria llegamos a:

$$u = \frac{GMm^2}{L^2} (1 - e \cos \theta) \quad (5.15)$$

Recordemos el cambio de la variable que se hizo, de $u = 1/r$, podemos entonces describir la ecuación anterior de la forma:

$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e \cos \theta)} \quad (5.16)$$

Se puede decir que esta ecuación representa una elipse.

Ya sabiendo el punto más importante con el proceso analítico que se seguirá a continuación Einstein propuso tres test para comprobar su relatividad general: el avance del perihelio de Mercurio, la de flexión de la luz por un objeto masivo y la dilatación gravitacional del tiempo, conocidos hoy como los tres test clásicos. Como ya hemos mencionado en la sección anterior, la métrica que describe un espacio tiempo de tal objeto es la métrica de Schwarzschild [Kenyon, O.].

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.17)$$

Donde la constante $M = G_N m$, con la dimensión L , es una medida para la masa m del objeto. En el régimen de campo débiles se hizo uso que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$$

Pero

$$h_{00} = -2\varphi$$

Donde φ es el potencial gravitacional pero el $\varphi = \frac{2GM}{c^2}$ entonces

$$-(1 + 2\varphi) = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

Porque

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Como r se vuelve mas grande que R_s se aproxima a 1 y nos queda la métrica de espacio plano que η_{00} entonces $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ y como se aproxima, se dé domina o cumple una propiedad de asintóticamente plana y para los agujeros negros cumplen dos singularidades una cuando r tiende a R_s o cuando es igual a R_s y a esto se le llama singularidad coordenada pero es la que define básicamente evento de agujeros negros en r igual al radio de Schwarzschild que es $2GM$ [Lifshitz, L. L.].

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Con los símbolos de Christoffel, símbolos no-triviales

$$\Gamma_{01}^0 = \partial_{r\alpha}; \Gamma_{00}^1 = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_{r\beta}; \Gamma_{11}^1 = \partial_{r\beta}; \Gamma_{22}^1 = -r e^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \Gamma_{23}^3 = \cot \theta$$

Y esto nos lleva a que en $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi)$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{GM}{r(r-2GM)}; \Gamma_{00}^1 = -\frac{GM}{r^3}(r-2GM); \Gamma_{11}^1 = -\frac{GM}{r(r-2GM)}; \Gamma_{22}^1 = -(r-2GM)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -(r-2GM); \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \Gamma_{23}^3 = \cot \theta$$

Y considerando que ya sabemos que $e^{2\alpha} = 1 - \frac{2GM}{r}$ entonces derivo en ambos lados obtengo que

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{2GM}{r} \Rightarrow 2e^{2\alpha} \partial_{r^\alpha} = \frac{2GM}{r^2}$$

Cánselo y como paso dividiendo me queda

$$\partial_{r^\alpha} = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}$$

Comprendiendo todo, cojo la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} =$$

Donde aquí sería

$$\frac{dt}{d\tau} = \dot{t}$$

Entonces la componente 1 sería \ddot{r} como la segunda derivada con respecto a τ

$$\ddot{r} + \Gamma_{00}^1 \dot{t}^2 + \Gamma_{11}^1 \dot{r}^2 + \Gamma_{22}^1 \dot{\theta}^2 + \Gamma_{33}^1 \dot{\varphi}^2 \tag{5.18}$$

Para expresar los resultados, lo que tengo para (6.18) es

$$1. \ddot{r} + \frac{GM}{r^3}(r-2GM) \dot{t}^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)} \dot{r}^2 - (r-2GM)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

De manera similar también será para las otras ecuaciones que son

$$2. \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$3. \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0$$

Expresando otra ecuación que no servirá cuando se coloca $\mu = 0$, en este caso tengo que

$$\ddot{t} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

Se encuentra la cuarta ecuación que es la más simple todavía y queda que

$$4. \quad \ddot{t} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \dot{t}\dot{r} = 0$$

Ahora trabajo con las ecuaciones 3 y 4, bueno si multiplico toda la relación de la ecuación 4 por el factor de Schwarzschild $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ me queda que

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \ddot{t} + \frac{2GM}{r^2} \dot{t}\dot{r} = 0$$

La ecuación anterior es lo mismo que si colocas la

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} \right] = 0$$

Entonces esta cantidad es igual a una constante y sería de forma

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E$$

Con la ecuación 3 si lo multiplicamos por $r^2 \sin^2 \theta$ nos queda que:

$$r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2r \sin^2 \theta \dot{r} \dot{\phi} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (5.19)$$

Básicamente en el primer término de la ecuación (6.19) de que esta ecuación debería ser

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0$$

Por lo tanto, se puede decir que $r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L$ (6.20) por lo que en general también se obtienen los vectores de Killing que son por ejemplo $k^\mu = (0, 0, 0, 1)$ Cuando se contraen que $k_\mu u^\mu = L$ entonces que $k^\mu = g_{33} k^3$ por simetría sería que $k_3 u^3 = l$ y $r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L$ y que corresponda a la constante E [Marin, C. (s.f.)].

Como resultados obtengo 2 ecuaciones que son (6.21) y (6.22)

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E \quad (5.20)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L \quad (5.21)$$

Ya que la ecuación (6.21) es el momento angular por unidades de masa. Bueno ahora trabajare con las ecuaciones 1 y 2 invocando a la misma métrica que la igualo a $-d\tau^2$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = -d\tau^2$$

Pensando que existe dos normalizaciones posible que son de interés, las componentes la podemos asociar cuando se pasa dividiendo por $d\tau$ con las componente de cuadri-velocidad por la razón que $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\tau^2$ si se pasa $d\tau$ al lado izquierdo decimos que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ y es lo mismo que $u^\mu u_\mu = -1$, en la ecuación anterior y si estamos hablando de algo de tiempo entonces $-d\tau^2 = 0$ y para el caso de la masa seria $m > 0$ nos daría que $u^\mu u_\mu = 0$ y si la $m = 0$ entonces nos fijamos en la ecuación pasada y si reescribimos la métrica de Schwarzschild pero en vez de tener $-d\tau^2$ lo pasamos a dividir y nos queda que

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = -1 \quad (5.22)$$

Ahora analizamos la ecuación (6.22) implica que tenemos una simetría azimutal y como es una a simetría esférica podemos actuar en el eje z donde queramos y que nos permite situar es que $\theta = \frac{\pi}{2}$ por simetría; al actuar $\theta = \frac{\pi}{2}$ primero en la ecuación (6.21) y (6.22) nos queda que:

$$r^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \dot{\varphi} = l \quad (5.23)$$

Pero como el $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ entonces

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \dot{\varphi}^2 = -1 \quad (5.24)$$

Ahora de la ecuación (6.20) y (6.21) la reemplazamos en la ecuación (6.24) donde $\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{L^2}{r^2}\right)$ y $\dot{t}^2 = E^2$ y nos queda que

$$E^2 - \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = 0 \quad (5.25)$$

Ahora la ecuación (6.25) lo dividimos todo por 2 para asociar con el caso de Newton y nos queda que

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = \frac{E^2}{2}$$

Ahora multiplico por los paréntesis y nos queda

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} - \frac{GM}{r} = \frac{E^2 - 1}{2} \quad (5.26)$$

Ahora si nombro la cantidad $\frac{E^2 - 1}{2}$ constante E y recordando con el caso de Newtoniano y comparando con la Energía seria que

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = K, \quad \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} - \frac{GM}{r} = U, \quad \frac{E^2 - 1}{2} = E$$

Entonces tenemos que $E = K + U$; y también en el caso lagrangiano seria que

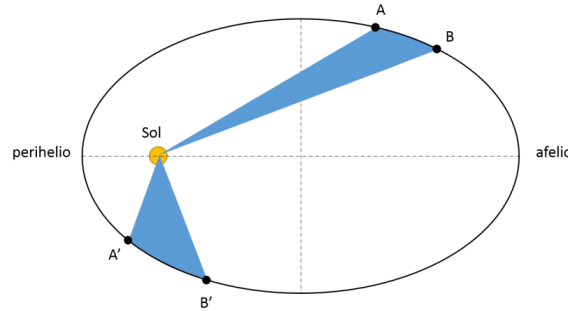
$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Pero

$$U = -\frac{GM\mu}{r}$$

Por coordenadas esféricas la ecuación para r me queda de la forma

$$\mu\ddot{r} = \dot{\varphi}^2 - \frac{dU}{dr} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} + U \right) \Rightarrow U_{eff}$$



Gráfica 1: Segunda ley de Kepler

ya con la ecuación mostrada de la energía potencial efectiva U_{eff} y con lo que me dice la gráfica 1 es un tirón gravitacional el efecto de fuerza dada por la conservación del momento angular, que tiene que ver con la ecuación de Lagrange para las coordenadas de φ que lleva a la segunda ley de Kepler que las elipse que se forma los planetas en el sistema solar en áreas iguales se barran los tiempos iguales, ya con esto tenemos que la Energía total es igual a la energía potencia más con la energía cinética con las ecuaciones de Newton y en el caso relativista [Rodríguez, A. L.].

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

Y si comparamos y pasamos dividiendo a μ y obtengo que

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{E}{\mu}$$

Ahora tenemos dos casos el de Newtoniano y el caso relativista; el caso Newtoniano es:

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} \tag{5.27}$$

El caso relativista es

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{GML^2}{r^3} - \frac{GM}{r} = E \tag{5.28}$$

Como comparación vemos que las ecuaciones son bastantes similares y si dividimos por μ en ambas ecuaciones o si llamamos $\frac{L}{M}$ se tendrá exactamente iguales solo por un término de la ecuación relativista que $\frac{GML^2}{r^3}$ no otorga exactamente lo mismo en el caso Newtoniano, la energía potencial efectiva U_{eff} es

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

En este caso que conforme r cambia también cambia el potencial efectivo, como r esta mas cerca de cero 0 y para $E < 0$ son órbitas ligadas y como \dot{r}^2 es positivo el potencial efectivo $U_{eff} \leq E$ entonces tenemos una circunferencia porque r no cambia y $r = 0$ y cuando es una elipse es cuando una partícula se mueve entre un r máximo y un r mínimo y se conoce como una elipse esto en el caso newtoniano, en el caso relativista derivamos la energía potencial efectiva con respecto a dr y queda que

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} + \frac{3GML^2}{r^4} = 0$$

Entonces, utilizando la formula general para $r_{circular}$ sería que

$$r_{circular} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM}$$

Esto para partículas masivas pero para fotones tiene que el $r_{circular} = 3GM$ y si ponemos unidades seria sobre c^2 entonces que el radio de Schwarzschild es $\frac{2GM}{c^2}$ y quedaría que el $r_{circular}$ de la forma

$$r_{circular} = \frac{3}{2}R_s \quad (5.29)$$

La ecuación (6.29) es la esfera del fotón; en la ecuación relativista partiendo de esta ecuación para obtener los tipo de órbita seria que

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} - \frac{GM}{r} = E \quad (5.30)$$

Ahora cambio la variable por $U = 1/r$ de que $U = U(\varphi)$

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{dU}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

Pero por otro lado sabemos que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -L \frac{dU}{d\varphi}$$

Entonces ahora sustituyo en la ecuación (6.30) y queda que

$$\frac{L^2}{2} \left(\frac{dU}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2 U^2}{2} - GMU - GML^2 U^3 = 0$$

Ahora multiplico todo por $\frac{1}{L^2}$ y derivo con respecto a φ y derivo por $\frac{dU}{d\varphi}$ y me queda que

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U = 3GMU^2 + \frac{GM}{L^2} \quad (5.31)$$

En el caso Newtoniano es una solución exacta pero en el caso relativista es una solución per-turbativa y se realiza como primer paso que $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$, entonces la

$$\frac{d^2 U_1}{d\varphi^2} + U_1 = \frac{GM}{L^2} \Rightarrow U_1 = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))$$

Ahora inserto la relación a U_1 en (6.31)

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = \frac{GM}{L^2} + \frac{6(GM)^3}{L^4} e \cos \varphi + \frac{3(GM)^3}{L^4} e^2 \cos^2 \varphi$$

Ahora con una entidad trigonométrica $\cos^2 x = 1/2(1 + \cos 2x)$ tenemos que

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = \frac{GM}{L^2} + \frac{3(GM)^3}{L^4} + \frac{6(GM)^3}{L^4} e \cos \varphi + \frac{3(GM)^3}{2L^4} e^2 (1 + \cos 2\varphi) \quad (5.32)$$

Bueno para el caso del planeta de Mercurio y de los demás planetas la excentricidad es muy baja, bueno la parte dos de la ecuación pasada que no interesa se trabaja mejor la primera parte de la ecuación (6.32) que es

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = \frac{GM}{L^2} + \frac{3(GM)^3}{L^4} + \frac{6(GM)^3}{L^4} e \cos \varphi$$

Bueno lo que nos tendríamos que enfocar es solucionar diciendo la ecuación $\frac{GM}{L^2} + \frac{3(GM)^3}{L^4}$ la podemos englobar en la parte U_1 y tendríamos que solucionar la parte de la ecuación $\frac{6(GM)^3}{L^4} e \cos \varphi$ entonces queda que

$$\frac{d^2 U_2}{d\varphi^2} + U_2 = \frac{6(GM)^3}{L^4} e \cos \varphi$$

Esta ecuación diferencial no homogénea de variación de parámetros haciendo os cálculos da como resultado que

$$U = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \cos \varphi + \frac{3(GM)^2}{L^2} e \varphi \sin \varphi \right]$$

Lo que tengo que

$$\delta = \frac{3(GM)^2}{L^2} \varphi$$

Ahora por una identidad trigonométrica se puede hacer un renombrado de variable diciendo que

$$\cos \varphi + \delta \sin \varphi = \sqrt{1 + \delta^2} \cos(\varphi - \alpha)$$

Siendo que

$$\alpha = \tan^{-1} \delta$$

Bueno nuestra U queda que

$$U = \frac{GM}{L^2} [1 + e \cos(\varphi - \delta)]$$

Conforme avance φ , δ cambia y en realidad está corriendo un desfase de lo que normalmente sería una elipse cerrada; recordemos que dijimos que $U = \frac{1}{r}$ nuestra ecuación cambia de la forma

$$r = \frac{L^2}{GM} \frac{1}{1 + e \cos(\varphi - \delta)} \tag{5.33}$$

En realidad conforme cambia φ también cambia δ y a esto se le conoce la precisión del perihelio, en particular lo que tenemos que cuando existe una vuelta de tal forma que

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi$$

Lo que tenemos que la cantidad que avanza $\varphi - \delta$ en lugar de ver serrado completamente se abalanza al punto más cercano y eso será que

$$\Delta = \frac{6\pi (GM)^2}{L^2}$$

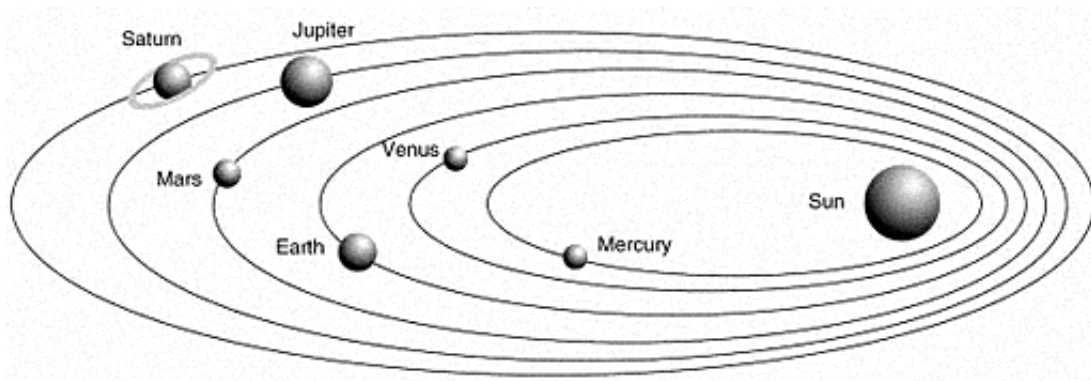
Ya con esto es para una sola vuelta donde L , momento angular, esto se puede simplificar utilizando el semieje A y la excentricidad e de la órbita elíptica relacionados por la fórmula para dar el ángulo de precesión

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 A (1 - e^2)} \tag{5.34}$$

Entonces organizo la ecuación y la precisión del perihelio de un planeta me queda de la forma

$$precesión = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a} \tag{5.35}$$

Donde a es el semieje mayor y e es la excentricidad al cuadrado del planeta



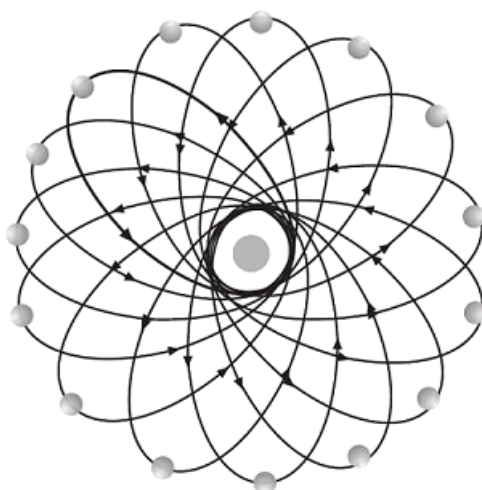
Gráfica 2: Imagen que muestra los planetas con sus correspondientes excentricidades y donde el sol se ubica en el foco de esas elipses.

En esta Gráfica 2 muestra un caso mucho más severo que el que existiría para cualquier planeta en nuestro sistema solar [Taylor, J.] .

Capítulo 6

Precesión Del Perihelio De Los Planetas Del Sistema Solar

La ilustración más trascendental de esta desviación de las realidades observacionales sobre el movimiento de los objetos celeste respecto a las previsiones de la mecánica de Newton, que asentó la relatividad general, se refiere a los movimientos de los planetas en órbitas elípticas alrededor del Sol. La hipótesis newtoniana predice un movimiento extra para el planeta, suponiendo que añadimos a la asociación del Sol en el mundo la fascinación gravitatoria de diferentes artículos (por ejemplo, diferentes planetas del grupo de planetas cercanos) y consideramos igualmente que la tendencia de la elíptica impacta en la impresión de la dirección retratada por el planeta desde la Tierra. Este movimiento extra puede ser retratado diciendo que los perihelios de tales óvalos necesitan jugar una dirección de precesión (figura unida). No obstante, por cierto, la precesión notada de los perihelios de los planetas no se compara estrictamente con la prevista al aplicar la mecánica de Newton. Sobre todo en algunos momentos. La más clara es la del planeta Mercurio, para el que se reconoce tímidamente una precesión persistente que no tiene sentido aplicando la mecánica de Newton. Por otra parte, un uso exhaustivo de la hipótesis de la relatividad general realmente da sentido a esta precisión remanente [Schwarzschild, K. C.].



Gráfica 3: perihelio

A partir de ahora vamos a trabajar con las situaciones para encontrar lo que se ha astillado en este trabajo

6.1. Ecuaciones

Entonces la ecuación (6.5) con los datos queda expresada de la forma siguiente:

$$U_{eff} = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{2(3,302 \times 10^{23} kg) r^2}$$

$$\frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,898 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)}{r}$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} Nm^3 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} Nm^2$$

Entonces convirtiendo la unidad de metro a UA debido a que es un número muy grande el de la ecuación, se tiene entonces:

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^3 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^2$$

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{r^2} NAU^3 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{r} NAU^2$$

Ahora para el caso de la ecuación (6.5) se tiene:

$$U_{eff} = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{2(3,302 \times 10^{23} kg) r^2}$$

$$\frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,898 \times 10^{30} kg) \left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{(3,302 \times 10^{23} kg) \left(299792458 \frac{m}{s}\right)^2 r^3}$$

$$\frac{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,898 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)}{r}$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} Nm^3 - \frac{3,5921 \times 10^{57}}{r^3} Nm^4 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} Nm^2$$

$$U_{eff} = \frac{1,2160 \times 10^{54}}{r^2} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^3 - \frac{3,5921 \times 10^{57}}{r^3} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^4 - \frac{4,3832 \times 10^{43}}{r} N(6,6846 \times 10^{-12} AU)^2$$

$$U_{eff} = \frac{3,6321 \times 10^{20}}{r^2} NAU^3 - \frac{7,1720 \times 10^{12}}{r^3} NAU^4 - \frac{1,9586 \times 10^{21}}{r} NAU^2$$

La ecuación (6.16) queda así:

$$r(\theta) = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)^2 [1 - e \cos(\theta)]}$$

$$r(\theta) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} m$$

$$r(\theta) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} (6,6846 \times 10^{-12} AU)$$

$$r(\theta) = \frac{0,3709}{[1 - 0,20563069 \cos(\theta)]} AU$$

ahora con la ecuación (6.16) en ves de θ lo trabajaremos en φ y me queda así:

$$r(\varphi) = \frac{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2}{\left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right) (1,989 \times 10^{30} kg) (3,302 \times 10^{23} kg)^2 [1 - e \cos(\varphi(H))]}$$

Donde los valores E y H vienen a ser:

$$E = \frac{3m^2G^2M^2}{J^2c^2}$$

$$E = \frac{3(3,302 \times 10^{23} kg)^2 \left(6,6742 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^2 (1,989 \times 10^{30} kg)^2}{\left(8,9613 \times 10^{38} \frac{kgm^2}{s}\right)^2 \left(299792458 \frac{m}{s}\right)^2}$$

$$E = 7,9859 \times 10^{-8}$$

$$H = 1 - E = 1 - 7,9859 \times 10^{-8}$$

$$H = 0,999999920143$$

Entonces escribimos:

$$r(\varphi) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\varphi \times 0,999999920143)]} m$$

$$r(\varphi) = \frac{5,5485 \times 10^{10}}{[1 - 0,20563069 \cos(\varphi \times 0,999999920143)]} \times (6,6846 \times 10^{-12} AU)$$

$$r(\varphi) = \frac{0,3709}{[1 - 0,20563069 \cos(\varphi \times 0,999999920143)]} AU$$

6.1.1. Mercurio

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,20563069^2) (5,7909 \times 10^{10}) m}$$

$$\delta = 5,0199 \times 10^{-7} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 5,0199 \times 10^{-7} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 0,1035''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 orbita}{0,2408 años} \times \left(\frac{100 años}{1 siglo} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 415,3354 \frac{orbitas}{siglo}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 0,1035 \times (415,3354)$$

$$\Delta = \frac{43,0058''}{siglo}$$

6.1.2. Venus

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,00677323^2) (1,0820817 \times 10^{17}) m}$$

$$\delta = 2,5730355 \times 10^{-17} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 2,5730355 \times 10^{-17} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 5,3072667 \times 10^{-12}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 \text{ orbita}}{0,616438 \text{ años}} \times \left(\frac{100 \text{ años}}{1 \text{ siglo}} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 162,22232 \frac{\text{orbitas}}{\text{siglo}}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 5,3072667 \times 10^{-12} \times (162,22232)$$

$$\Delta = \frac{8,60957116932744 \times 10^{-10}''}{\text{siglo}}$$

6.1.3. Tierra

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,01671^2) (149597870700) m}$$

$$\delta = 1,86158031 \times 10^{-7} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 1,86158031 \times 10^{-7} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 0,0383978502''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 \text{ orbita}}{1 \text{ años}} \times \left(\frac{100 \text{ años}}{1 \text{ siglo}} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 100 \frac{\text{orbitas}}{\text{siglo}}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 0,0383978502 \times (100)$$

$$\Delta = \frac{3,83978502''}{\text{siglo}}$$

6.1.4. Marte

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,0934^2) (2,27987 \times 10^{14}) m}$$

$$\delta = 1,23191584 \times 10^{-10} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 1,23191584 \times 10^{10} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 2,54100882 \times 10^{-5}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 \text{ orbita}}{0,665753 \text{ años}} \times \left(\frac{100 \text{ años}}{1 \text{ siglo}} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 150,20586 \frac{\text{orbitas}}{\text{siglo}}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 2,54100882 \times 10^{-5} \times (150,20586)$$

$$\Delta = \frac{3,816744150756852 \times 10^{-3}''}{\text{siglo}}$$

6.1.5. Júpiter

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1-e^2)a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1-0,048^2)(7,78358 \times 10^{14}) m}$$

$$\delta = 3,5851578 \times 10^{-11} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 3,5851578 \times 10^{11} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 7,29849244 \times 10^{-5}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 orbita}{11,86 años} \times \left(\frac{100 años}{1 siglo} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 8,4317 \frac{orbitas}{siglo}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 7,29849244 \times 10^{-5} \times (8,4317)$$

$$\Delta = \frac{6,1538698706348 \times 10^{-4}''}{siglo}$$

6.1.6. Saturno

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,05648^2) (1,43344937 \times 10^{19}) m}$$

$$\delta = 1,43344937 \times 10^{-15} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 1,94845849 \times 10^{-15} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 4,01898413 \times 10^{-10}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 orbita}{29 años} \times \left(\frac{100 años}{1 siglo} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 3,44828 \frac{orbitas}{siglo}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 4,01898413 \times 10^{-10} \times (3,44828)$$

$$\Delta = \frac{1,3858582595964 \times 10^{-6}''}{siglo}$$

6.1.7. Urano

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 (1 - e^2) a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - e^2) a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1 - 0,044405586^2) (2,87667908253 \times 10^{20} m)}$$

$$\delta = 9,69731947 \times 10^{-17} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 9,69731947 \times 10^{-17} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 2,00021572 \times 10^{-11}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 orbita}{84 años} \times \left(\frac{100 años}{1 siglo} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 1,190476 \frac{orbitas}{siglo}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 2,00021572 \times 10^{-11} \times (1,190476)$$

$$\Delta = \frac{2,38120880948272 \times 10^{-11}''}{siglo}$$

6.1.8. Neptuno

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad:

$$\frac{6\pi GM}{c^2} = \frac{6\pi \left(6,67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (1,989 \times 10^{30} kg)}{\left(299792458 \frac{m}{s} \right)^2} = 27840,73539 rad.m$$

Entonces se tendrá que,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1-e^2)a}$$

Para cada planeta sólo se requiere el valor de su excentricidad e y la distancia promedio al sol a y Para el caso del planeta mercurio se tiene,

$$\delta = \frac{27840,73539 rad.m}{(1-0,00858587^2)(4,50344366217 \times 10^{20}) m}$$

$$\delta = 6,18262905 \times 10^{-17} rad$$

Hacemos el cambio de radianes a segundos de arco debido a que es muy pequeño el valor obtenido:

$$\delta = 6,18262905 \times 10^{-17} rad \times \left(\frac{180}{\pi rad} \right) \times \left(\frac{3600''}{1} \right)$$

$$\delta = 1,27525878 \times 10^{-11}''$$

Se toma una frecuencia usual de 100 años que corresponde a un siglo para hacer más notorio el cambio del ángulo de precesión, por lo tanto:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \frac{1 \text{ orbita}}{164 \text{ años}} \times \left(\frac{100 \text{ años}}{1 \text{ siglo}} \right)$$

Donde T es el periodo orbital de cada planeta respecto al sol

$$N = 0,60975 \frac{\text{orbitas}}{\text{siglo}}$$

Entonces ahora multiplico $\delta * N$ y se tiene

$$\delta * N = \Delta = 1,27525878 \times 10^{-11} \times (0,60975)$$

$$\Delta = \frac{7,77589041105 \times 10^{-12}''}{\text{siglo}}$$

Conclusión

A partir del método anterior debe ser visible la forma en que es factible obtener el modelo real de la dirección de los planetas alrededor del sol, utilizando sólo las ideas que Newton y la métrica de Schwarzschild para calcular el perihelio de cada planeta del grupo planetario para tener nuestras condiciones y los resultados obtenidos contrastarlos y lo que exploramos en la red como seremos conscientes suponiendo que tenemos o llegar a la concordancia en el resultado para la estimación de la precesión del perihelio del grupo de planetas cercanos, a partir de ahora con las regulaciones que Kepler y Newton articularon en sus tres regulaciones, y utilizando sólo dispositivos numéricos de nivel medio; donde se trabaja igualmente en qué parte resulta más reconocible la diferencia en el punto de precesión de cada planeta por cada 100 años en el grupo de planetas cercanos cuando cada planeta da una vuelta total al sol donde las primeras contemplaciones serían adecuadas para dar un examen total del movimiento planetario asumiendo que nos damos cuenta que el desarrollo de un planeta alrededor del sol no fue impactado por diferentes planetas y cuerpos celeste. De este modo, el círculo de la Tierra (y de la multitud relativa de los diferentes planetas) sería un óvalo ideal en el caso de que no existieran otras potencias distintas del sol que siguieran a la Tierra. Sea como fuere, la presencia de diferentes planetas trae consigo irritaciones en el círculo de un planeta. Estas irritaciones pueden determinarse con increíble precisión mediante procedimientos extraordinarios que comprenden la ciencia llamada mecánica celeste. Las irritaciones se pueden desglosar básicamente por dos impacto. Un impacto es que el círculo circular de un planeta no está cerrado, sino que el pivote significativo del óvalo gira gradualmente alrededor del centro donde se encuentra el sol, un impacto llamado avance del perihelio (figura 2). El otro impacto es una variedad ocasional de la imprevisibilidad del óvalo con respecto a su valor típico, como se demuestra en la figura 2. A causa de la Tierra y de los demás planetas tienen un tiempo de la solicitud de 105 años en la Tierra (alrededor de 21 'de segmento circular cada cien años para el movimiento del perihelio). En definitiva, han creado resultados excepcionales sobre todo en los cambios lentos de los estados climáticos de la Tierra. Estas progresiones han sido demostradas por geofísicos que se han concentrado en las distintas capas del exterior del mundo.

Bibliografía

1. Robert J. Sullivan, Ph.D. (2006). Una Crónica de Física Moderna, vol. III. Universal-publishers.com,.
2. Aguirre, E. (2007). Geometria Diferencial de Curvas y Superficies. Nota de Clases.
3. Blau, M. (2011). Lecture notes on general relativity. Germany: Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern.
4. Briozzo, C. B. ((2012)). Metodos Matematicos de la Física. Notas de Trabajo.
5. Casanova, V. (Sábado de 19 de Abril de 2014). astrofiscayfisica. Obtenido de Astrofísica y Física: <https://www.astrofiscayfisica.com/2014/04/la-relatividad-general.html>
6. Charles W Misner, K. S. (s.f.). Gravitation. Library of Congress Cataloging in Publication Data..
7. Einstein, A. (2008.). Sobre la Teoria de la Relatividad Especial y General,. Alianza Editorial,.
8. Faber, R. L. (1983.). Differential Geometry and Relativity Theory,. Marcel Dekker,.
9. Foster, J. a. (2006). short course in general relativity. NewYork: Springer.
10. Gil, L. B. (2018). Fundamentos de la Teoria de la Relatividad General: predicciones teoricas y verificacion experimental . Sevilla: Facultad de Fisica Universidad de sevilla.
11. Goldstein, H. P. (2002.). Classical Mechanics. Reverté 3ªEdición. pag.:15-24.
12. Hartle, J. B. (2014.). Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity,. Pearson.
13. Janssen, B. (22 de septiembre de 2013). Teoria de la Relatividad General. Granada, España: Universidad de Granada, 4o curso Fisica.
14. Kenyon, O. (1996). General Relativity. Oxford University Press.
15. Kuhn, T. (1978). La revolución Copernicana. Buenos Aires:: Orbis, S. A.
16. Lifshitz, L. L. (1967). the Classical Theory of Fields Course of Theoretical Physics Volumen 2. Moscu: Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.S.S.R.
17. M. Kowalski et al. (2008). "Supernova Cosmology Project Collaboration,". The Astrophysical Journal.

18. Marin, C. (s.f.). "Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild". Avances en Ciencias e Ingenierías.
19. Meroño Bayo, M. A. (curso 2015-2016.). Apuntes de clase de la asignatura Geometría de Riemann,.
20. Misner, C. W. (1973.). Wheeler. Gravitation. W.H. Freeman and Company.
21. Pierre Astier et al. (2006). "The supernova legacy survey: Measurement of $\omega(m)$,. Astronomy and Astrophysics 447.
22. Piñeyro, P. J. (s.f.). Espacios metricos. Murcia: OCW-Universidad de Murcia.
23. Resnick, R. (1977). Introduccion a la teoria especial de la relatividad . Mexico: Editorial Limusa.
24. Rigoberto, G. C. (2015). Geometri no Euclidiana.
25. Chillan: Universidad del Bío-Bío, Facultad de Educación y Humanidades, Pedagogía en Educación Matemática.
26. Rindler, W. (2006). Relativity: Especial, General, and Cosmological. . University of Oxford.: University of Oxford.
27. Rodríguez, A. L. (2017). Obtención de una nueva solución estática esféricamente simétrica para las. Santa Clara, Cuba: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Facultad de Matemática, Física y Computación.
28. Sarmiento, J. M. (2005). Principios de relatividad general. Universidad Nacional de Colombia.
29. Schwarzschild, K. C. (22 de Diciembre de 1915,). "The Collected Papers of Albert Einstein",. Recuperado el 17 de 01 de 2022, de <http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf>
30. Taylor, J. . (1982). A New Test of General Relativity: Gravitational Radiation and the Binary Pulsar PSR1913+16. The Astrophysical Journal, 253,.
31. Tommaso Giannantonio et al. (Sept., 2012). "The significance of the integrated sachs-wolfe effect. Cosmology and Extragalactic Astrophysics.
32. Torre, L. d. (Diciembre 2006). Elemento de la Relatividad. Medellin: Universidad de antioquia.
33. V.V.Kiselev. (s.f.). "Quintessence and black hole,".