# RESOLUCIÓN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO MODELOS GEOMÉTRICOS DE ÁREAS 

DIANA BARRETO CASAS
LIDIS SERRANO CORENA

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
SINCELEJO
2003

# RESOLUCIÓN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO MODELOS GEOMÉTRICOS DE ÁREAS 

DIANA BARRETO CASAS
LIDIS SERRANO CORENA

Propuesta pedagógica para optar el título de licenciada en matemática.

MARCOS BETÍN SEVERICHE Director

## UNIVERSIDAD DE SUCRE <br> FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS <br> SINCELEJO <br> 2003

A ..... lamemoriademímadreMaríadelRosarioCasas,quien
yace ..... en
elmisteriodel
PadreCelestia1.
A mi
padre y
hermanos
quienes
esperan
de mí
una gran
profesio
nal

## Diana Barreto

| A | Dios |
| :--- | ---: |
| que me |  |
| sostiene |  |

A
mí
hija
Roxana
mí
compañer
a en
quién
hay
muchas
actitude
s lógica
matemáti
cas.
A mis
amigos y
profesor
es con
especial
regocijo

## Lidis <br> Serrano.

## AGRADECIMIENTOS

Las autoras del presente trabajo, de manera especial, expresan sus agradecimientos:

A la Universidad de Sucre por contribuir fervientemente a la formación de los presentes educadores matemáticos del pais.

A la Escuela Normal Superior de Corozal por avalar la ejecución y evaluación de esta propuesta pedagógica.

A los Estudiantes de octavo grado 2, jornada matinal en la Escuela Normal por ser los protagonistas del proceso.

Al profesor Marcos Betín, profesor de Unisucre, por sus constantes revisiones u observaciones con carácter formativo.

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN ..... 10

1. PROBLEMA ..... 13
1.1. DESCRIPCIÓN ..... 13
1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACION ..... 19
1.3. OBJETIVOS ..... 19
General ..... 19
Especificos. ..... 19
2. JUSTIFICACIÓN ..... 21
3. MARCO TEÓRICO ..... 23
3.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO ..... 23
3.2. ANTECEDENTES ..... 38
3.3. BASES TEÓRICAS ..... 42
3.4. MARCO CONCEPTUAL ..... 44
3.5. BASES LEGALES ..... 54
4. METODOLOGÍA ..... 56
4.1. TIPO DE ESTUDIO ..... 56
4.2. POBLACION Y MUESTRA ..... 57
4.3. INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN ..... 57
4.4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN ..... 58
5. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE ..... 60
5.1. FUNDAMENTACIÓN ..... 60
5.2. ETAPAS DE LA PROPUESTA ..... 60
5.3. RESULTADOS DE LOS TALLERES APLICADOS ..... 61
6. CONCLUSIONES ..... 77
7. RECOMENDACIONES ..... 80
BIBLIOGRAFİA ..... 82
ANEXOS ..... 84

## INTRODUCCIÓN

Entre los aspectos de que se ocupa la didáctica de las matemáticas está el interés por conocer los procesos que siguen los estudiantes, así como las dificultades que se les presentan en sus razonamientos a la hora de resolver situaciones problema que requieran tratamientos algebraicos.

En Colombia, el grupo PRETEXTO de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ha liderado investigaciones en la línea transición de la aritmética álgebra, alrededor de temáticas relacionadas con la ley de los signos, las connotaciones del signo igual, la resolución de ecuaciones lineales y la interpretación de la letra en diferentes contextos algebraicos, entre otras.

Tales investigaciones sobre la problemática del álgebra escolar, y muchas otras, han permitido identificar problemas puntuales en su enseñanza y aprendizaje, y aportado elementos conceptuales que han coadyuvado a iniciar procesos de reflexión pedagógica, y plantear nuevas formas de trabajo de aula, más acordes con propuestas curriculares como las planteadas en los lineamientos para el desarrollo del área, tendientes a que los estudiantes desarrollen procesos de pensamiento y doten de sentido y significado a los conceptos objeto de estudio.

Con estas mismas pretensiones, se plantea este proyecto pedagógico, que intenta rescatar modelos geométricos, para resolver problemas algebraicos, que se relacionan con la resolución de ecuaciones de segundo grado, buscando con ello, contribuir al desarrollo del pensamiento espacial, variacional y lógico-matemático de los estudiantes, y a la vez, revalorar contribuciones de hombres como: Euclides, Mahammad Ben Musa Al- Khowarizmi, Tabit Ben Qurra y muchos que con sus trabajos han aportado elementos para la construcción del cuerpo teórico del álgebra.

La propuesta de tipo constructivista, privilegia el tratamiento de situaciones problemas contextuales y significativas, que pueden ser abordados geométricamente a través de modelos de áreas que conllevan a ecuaciones de segundo grado. La idea es que el estudiante pueda otorgarle significado y sentido a las ecuaciones de segundo grado a partir del uso de modelos geométricos, de manera que la ecuación de segundo grado aparezca como una generalización de los casos tratados, y pueda, a partir del estudio de éstos modelos geométricos reconocer las limitaciones que tienen, para entonces mostrar el poder de una herramienta algebraica como la ecuación general .

La propuesta se estructura inicialmente planteando las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con modelos geométricos que involucran ecuaciones de segundo grado.

En segunda instancia se presenta un marco teórico en donde se presenta una reseña histórica de las ecuaciones de segundo grado, teorias relacionadas con el tema de investigación y los conceptos básicos requeridos para el aprendizaje de la ecuación cuadrática.

En tercer lugar, se presenta la propuesta de aula, que consta de doce actividades que busca otorgar sentido y significado a la ecuación de segundo grado

En cuarto lugar se describen los resultados obtenidos de las actividades desarrolladas.

Finalmente se presentan las conclusiones, recomendaciones, la bibliografía utilizada y los anexos.

## 1. PROBLEMA

Carencia de sentido y significado otorgado por los estudiantes a la ecuación cuadrática

### 1.1. DESCRIPCIÓN

Un análisis a la forma como se han adelantado las mediaciones en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, permite visualizar que, en especial en el tema de las ecuaciones, se ha enfatizado , quizás de manera inconsciente, en el tratamiento de lo simbólico, en la cancelación y transposición de términos, lo que guarda mucha relación con los vocablos de donde procede la denominación de esta rama de las matemáticas: Al-Jebr y AI - Mugabala ${ }^{1}$.

Su presentación en el aula ha sido, como señala Freudenthal, de carácter formal deductivo, por lo que quizás muchos estudiantes la visionan como un conjunto de fórmulas y reglas para ejecutar. Esta presentación descontextualizada ha conllevado a que muchos alumnos no le atribuyan sentido a expresiones que combinan números y letras en forma indistinta.

[^0]El álgebra antes de ser vista como una potente herramienta a través de la cual es posible representar y generalizar fenómenos del mundo, se ha constituido en "dolor de cabezas" para gran cantidad de estudiantes, y a ser vista, cuando mucho, como una aritmética generalizada.

Los estudios sobre álgebra escolar en los que se destacan Both (1.987), Kücheman (1.981), Kieran - Filloy (1.989), Kieran (1.990), Tall (1.990), Hers

Covies (1.992), coinciden en señalar como problemas puntuales los que se refiere a:

- El cambio de convenciones respecto al referente geométrico.
- La interpretación de las letras.
- El reconocimiento y uso de las estructuras.

Considerando el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS, el proyecto de investigación y evaluación curricular más importante de esta década en la enseñanza de la matemática y las ciencias, a nivel de educación básica en el mundo, se pueden apreciar dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico, geométrico y variacional de los estudiantes. En la prueba de geometría, por ejemplo, se obtuvieron los siguientes resultados generales:

- Dentro del área temática geometría, el rendimiento estudiantil en los temas caracterizados como particularmente criticos es homogéneamente deficiente, mientras que en los temas caracterizados como relativamente buenos, dicho rendimiento exhibe una alta dispersión en torno del rendimiento promedio de cada tema.
- En uso de conocimientos se identifica en los estudiantes colombianos una habilidad para inferir posibles respuestas (no necesariamente correctas), a partir de la información contenida en los enunciados de las preguntas, sin recurrir a recordar y utilizar
conocimientos geométricos especificos, a la vez que se reconoce un deficiente conocimiento y manejo de contenidos específicos. ${ }^{2}$

De igual manera, en álgebra, donde se evalúan principalmente el solución de ecuaciones, expresiones algebraicas, preguntas que enfatizan procesos de generalización, identificación leyes de formación en sucesiones de números o figuras, este estudio se destaca que:

- El rendimiento de los colombianos en Álgebra es cuantitativamente inferior al rendimiento de los estudiantes internacionales, en un desfase similar al que se presenta en el examen global, pero presenta algunas diferencias cualitativas cuando se observan los rendimientos por temas al interior del área.
- En el área temática Álgebra, se caracteriza al tema Patrones, relaciones y funciones como un tema relativamente bueno, en tanto que, al tema Ecuaciones y fórmulas y al desempeño Solución de problemas como particularmente críticos.
- Los estudiantes de séptimo y octavo no han apropiado un procedimiento o algoritmo para la solución de ecuaciones lineales con más de una variable, ni tampoco para encontrar el valor numérico de una expresión algebraica.
- Los estudiantes de séptimo y octavo grado resuelven problemas en forma eficiente si el modelo de presentación de éste sugiere la solución, pero su rendimiento es deficiente si la resolución del problema implica tanto la expresión de la información en un modelo algebraico como un método de solución de éste. ${ }^{3}$

Por otro lado, se evidencia el problema de la no-construcción de sentido del álgebra escolar, en particular, cuando los estudiantes ingresan a las universidades colombianas (ICFES, 2000). La dificultad estriba notablemente en la comprensión de situaciones problemas asociadas a problemas algebraicos.

La temática de ecuaciones constituye toda una problemática en nuestros estudiantes, cuando se enfrentan a las pruebas ICFES (por ejemplo, se pueden

[^1]analizar los resultados de los últimos años), en particular el caso de despejar la incógnita implícita en una expresión algebraica.

Por su parte, la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar que se imparte en la Escuela Normal Superior de Corozal Sucre, de acuerdo a la coevaluaciones ${ }^{4}$ realizadas en el interior del Núcleo de Ciencias y Tecnología (2000-2002) ha venido transformándose paulatinamente desde la construcción del PEI normalista, y la venida del proceso de Acreditación como institución formadora de maestros para el ciclo de preescolar y primaria, proponiéndose como objetivos:
> Desplazamiento del trasmisionismo.
> Desplazamiento de la actividad protagónica del profesor por la participación activa del estudiante.
> Validación de estrategias metodológicas y didácticas para la facilitación de algunos objetos de conocimiento.
> Participación del estudiante en el proceso de evaluación del aprendizaje escolar.
> Desarrollo pormenorizado de investigaciones de aula.

A pesar del pretendido cambio metodológico, se conservan señales de procesos de enseñanza que poco favorecen la construcción de significado y sentido de las temáticas tratadas, por ejemplo, se observa que muchos de los contenidos

[^2]temáticos en álgebra siguen privilegiando el enfoque algorítmico, la memorización de procedimientos, y el abordaje de situaciones que guardan poca relación con el contexto de los estudiantes, alejados de sus intereses, y muchas veces carentes de significado, lo cual ha conllevado a que muchos estudiantes presenten dificultades en temáticas del álgebra escolar. Particularmente se ha podido observar que la gran mayoria de los estudiantes de octavo normalista, año 2002, han presentado deficiencias para alcanzar indicadores de logro, del núcleo temático expresiones algebraicas, factorización, solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

Las dificultades en torno a la enseñanza y aprendizaje de los núcleos temáticos del álgebra escolar reseñados, quizás se deban al énfasis que se ha hecho, como ya se dijo, en el manejo algorítmico - simbólico de términos o expresiones (polinomios, productos notables, factorización), y al tratamiento dado en particular a las ecuaciones cuadráticas o de grado dos, que ha privilegiado lo deductivo formal, orientado desde la perspectiva algoritmica (factorización algebraica, solución general de la ecuación cuadrática), haciendo poco uso de modelos o sistemas representacionales que den muestra de las relaciones objeto geométrico - expresiones algebraicas, y que permitan otorgar sentido y significado a los términos de dichas expresiones.

[^3]Para corrobar algunas de estas afirmaciones, veamos los resultados de la prueba escrita, (anexo 1), que se practicó a 30 estudiantes de los grados octavo, noveno, décimo y undécimo de la Escuela Normal de Corozal:

- Ítem 1. El $75 \%$ de los estudiantes dicen que el álgebra es una rama de la matemática que maneja los números como si fueran letras.
- Ítem 2. El $56 \%$ consideran que una ecuación es una igualdad de términos donde hay que buscar un número desconocido.
- Ítem 3. El $40 \%$ considera que las ecuaciones de segundo grado son polinomios cuyo máximo exponente es dos...que las han resuelto por factorización.
- Cuando se les preguntó sobre qué significado tiene la expresión $x^{2}+5 x=6$, el $40 \%$ dijeron que era una ecuación de segundo, es decir, había que buscar un numero que elevado al cuadrado y sumado con su quíntuplo, diera como resultado, 6. Ningún estudiante relaciona ecuaciones cuadráticas con modelos geométricos.
- En el ítem 5. Se presentó una demostración de la resolución cartesiana (1628) para que describieran el proceso. Sólo el 6.6 \% de los estudiantes, identificó el proceso heurístico. El resto no contestó.

De acuerdo con esta prueba, como ya dijimos, los estudiantes consideran que el álgebra se reduce a trabajo con letras y números, se mira como un lenguaje poco entendible, que hay pasarla así sea de memoria. No todos identifican las ecuaciones cuadráticas, y mucho menos son capaces de relacionarlas con modelos geométricos.

De acuerdo con todo lo anterior, se plantea este proyecto pedagógico centrado en el manejo del álgebra geométrica a fin de favorecer el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado (en una variable) a través de la utilización de modelos geométricos para que los estudiantes visualicen, interpreten y doten de significado y sentido dichas ecuaciones. Proyecto pedagógico que se plantea entre otros, el siguiente interrogante:

### 1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACION

¿Contribuyen los modelos geométricos de áreas al aprendizaje significativo de las ecuaciones de segundo grado en el sistema de los enteros?

### 1.3. OBJETIVOS

## General.

Favorecer el aprendizaje significativo de la ecuación cuadrática y el desarrollo de procesos de pensamiento ${ }^{5}$ propios del álgebra escolar mediante la utilización de modelos geométricos asociadas con ecuaciones de segundo grado, en estudiantes de octavo grado de la Escuela Normal Superior de Corozal (Sucre).

## Específicos

$\Delta$ Valorar el desarrollo histórico de modelos geométricos en la resolución de la ecuación cuadrática, desde los babilonios, griegos, egipcios, árabes, hasta algunos autores contemporáneos como René Descartes para su aplicación en la propuesta.

[^4]$\Delta$ Implementar actividades de aprendizaje, basadas en el álgebra geométrica para la resolución de ecuaciones de segundo grado, que posibiliten establecer relaciones lenguaje geométrico - lenguaje algebraico.

## 2. JUSTIFICACIÓN

Contribuir a que el estudiante alcance aprendizajes duraderos, es decir, manejar conocimientos que pueda usar, es tarea ardua que requiere convicción, esfuerzo y mucha creatividad por parte del orientador. La promoción de este tipo de aprendizajes debe estar ligado a atender situaciones contextuales (de la realidad del niño o joven) que han de permitir activar su propia capacidad cognoscitiva y utilizar ese conocimiento en otras disciplinas.

A través de la manipulación de recursos materiales y didácticos, acompañados de estrategias de interacción con el grupo, el estudiante conjuga su actividad manipulativa con la comunicación, se contribuye a que se interese, se motive y pueda acceder a los procesos mentales de mayor abstracción (posturas epistémicas de Piaget y Vygotski). Por esto, que se opta por la utilización de modelos geométricos para la resolución de ecuaciones de segundo grado, para permitirle al estudiante visualizar o modelar, interpretar, reexpresar lo algebraico, en lenguaje geométrico-espacial y comunicar lo construido.

La utilización de modelos visuales para la resolución de actividades asociadas con ecuaciones de segundo grado constituyen en una herramienta alternativa que estimula en los estudiantes el desarrollo de la pensamiento visual-espacial, así
como de su capacidad de razonamiento lógico matemático y que debería introducirse antes de orientar cualquier procedimiento algoritmico algebraico como la fórmula general de segundo grado $\left(x=\frac{-b \pm \sqrt{b^{2}-4 a c}}{2 a}\right)$ o los conocidos casos de factorización.

Los modelos geométricos posibilitan visualizar y modelar expresiones algebraicas para así trabajar en pro de la construcción de significado y dotar de sentido una situación-problema. También, el diseño de situaciones problema asociadas con ecuaciones de segundo grado, permite enlazar el conocimiento cotidiano con el saber matemático haciendo las veces de puentes cognitivos para producir un conocimiento más contextual, adaptado a los intereses y necesidades cognitivas de los estudiantes.

De igual manera, la interacción del estudiante con el grupo, permite la construcción social de nuevos aprendizajes Este trabajo se puede llevar a cabo puesto que se tiene la disposición pedagógica de los proponentes, los argumentos teóricos y las herramientas necesarias para su ejecución. Además, utiliza materiales de mínima cuantía.

De igual manera da solución al problema planteado puesto que se apoya en el constructivismo matemático, en la utilización de alternativas didácticas motivantes para el aprendizaje interactivo de los estudiantes.

## 3. MARCO TEÓRICO

Desde el punto de vista teórico, este proyecto pedagógico busca articular aspectos históricos relacionados con la ecuación de segundo grado- referidos a modelos geométricos para su tratamiento - con fundamentos conceptuales (epistemología constructivista) que permitan al estudiante construir dicho concepto de forma activa y posibilite asignarle significado y sentido en el proceso de construcción.

### 3.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Existen documentos que demuestran la actividad matemática de babilonios y egipcios respecto al trabajo con ecuaciones lineales, y su interés por la solución de ecuaciones cuadráticas en que demuestran un ingenio respetable. Los problemas considerados por los babilonios vienen casi siempre enunciados en términos geométricos considerando el semiperimetro $x+y$ y el área $x . y$ de un rectángulo; sus métodos de solución eran algebraicos, reduciendo un problema a una forma conocida.
"Históricamente hablando sería más adecuado hablar de ecuaciones rectangulares que de ecuaciones cuadráticas, ya que fueron problemas sobre rectángulos los que dieron origen a tales ecuaciones. En el cuadrado sólo existe una cantidad desconocida $x$. Si se conoce el lado x , podemos hallar el área, x.x, y
se conoce el área, se puede hallar el lado. En el rectángulo existen dos cantidades que deben ser halladas, la longitud y la anchura, o el frente y el flanco, como los llamaban los babilonios. Si los conocemos a ambos podemos hallar el área, y si conocemos el área y uno de los lados, podemos hallar el otro lado. Estos son problemas elementales que conducen a ecuaciones lineales. Pero entonces se presentan problemas más elevados y complicados entre los que podemos distinguir:

1. Junto con el área, se da la suma o diferencia de los lados.
2. Junto con la diagonal, se da la suma o diferencia de los lados.
3. Junto con un lado se da la suma o diferencia de la diagonal y el otro lado.

Los siguientes tipos de problemas, de acuerdo con el extracto, eran resueltos por los babilonios.

Dados el área y la suma de los lados.
Dados el área y la diferencia de los lados.
Dados la diagonal y la diferencia de los lados.
Dados la diagonal y la suma de los lados.
Dados un lado y la suma de la diagonal con el otro lado.
Dados la diagonal y la diferencia entre la diagonal y el otro lado ${ }^{6 "}$.

[^5]"Neugebauer, uno de los investigadores de la matemática babilonia, anota que los problemas tipo I y tipo II son los más comunes....El principal tipo de problemas cuadráticos de los que se han presentado centenares de ejemplos, un tipo que yo llamo " forma normal": se debe encontrar dos números sí:
a. Se da su producto
b. Se da su suma o su diferencia"7.
"Es obvio el propósito de la infinidad de ejemplos para enseñar la transformación de problemas cuadráticos más complicados a esta " forma normal".

El siguiente extracto trata de la solución de un problema de la "forma normal". El extracto es parte de un problema más extenso del período temprano (1.700 a.d.n.e, aproximadamente). En èl se resuelve el siguiente problema: La suma de los lados de un rectángulo es 29 , su producto 210 , halle las longitudes de los lados ${ }^{8 "}$.

Saque un medio de 29 (esto da 14;30)
$14 ; 30 \times 14 ; 30=3,30 ; 15$
3,$30 ; 15-3,30=0 ; 15$
la raiz cuadrada es $0 ; 15$ es $0 ; 30$
$14 ; 30+0 ; 30=15$ largo
$14 ; 30-0 ; 30=14$ ancho

[^6]una solución de este problema en términos contemporáneos es la que planteamos aquí de manera algebraica y geométrica.
$$
x+y=29 \quad x \cdot y=210
$$

3. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-x y=210.25-210=0.25$

4. $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-x y}=\sqrt{0.25}=0.5$
5. $\frac{x+y}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-x y}=14.5+0.5=15$ largo

6. $\frac{x+y}{2}-\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-x y}=14.5-0.5=14$ ancho $\frac{y}{[x+y] \mid 2}--$

Un ejemplo donde se da el área y la diferencia de los lados es el siguiente:

El área de un terreno rectangular es 672 m 2 y la diferencia de los lados es 11. ¿Cuánto mide el largo el ancho de ese terreno?

Una solución de este problema en términos contemporáneos es la que planteamos aqui de manera algebraica y geométrica:

$$
x \cdot y=672 \quad x-y=11
$$



1. $\frac{x-y}{2}=\frac{11}{2}=5.5$

2. $\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}=(5.5)^{2}=30.25$

3. $\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}+x \cdot y=30.25+672=702.25$

4. $\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}+x \cdot y}=\sqrt{702.25}=26.5$

5. $y=\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}+x \cdot y}-\frac{x-y}{2}$ $y=26.5-5.5=21$

6. $x=\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}+x \cdot y}+\frac{x-y}{2}$
$x=26.5+5.5=32$


Consideramos que este tratamiento se constituye en una importante herramienta didáctica que puede ser trabajada con los estudiantes para otorgar sentido y significado a la ecuación de segundo grado. Pues como puede observarse, a pesar de que los Babilónicos no generalizan el procedimiento, plasmándolo en una ecuación como la que hoy día conocemos, en la forma de atacar este tipo de problemas se "esconde" dicha ecuación.

Para corroborarlo, hagamos:
$x . y=a$
a: área
$x+y=\mathrm{b}$
b: semi perímetro
$y$ resolvamos para $x$ o para $y$.

Por su parte los griegos resolvieron ecuaciones cuadráticas por medio de procedimientos de aplicación de áreas como aparece en los elementos de Euclides. Así, la ecuación lineal a . x = b . c (Figura 1) por ejemplo, pasó a considerarse como una igualdad de las áreas.


Figura 1.

La propiedad distributiva: $a(b+c+d)=a b+a c+a d$ resultó indudablemente más didáctica para un escolar griego que para un estudiante actual, puesto que el primero podia dibujar fácilmente las áreas de los rectángulos como aparecen en la figura 2 :

Figura 2.


Análogamente las identidades $(a+b)^{2}=a^{2}+2 a \cdot b+b^{2}$ y $\quad\left(a^{2}-b^{2}\right)=(a+b)(a-b)$, pueden representarse por medio de áreas así:


Figura 3.

Euclides plantea problemas relacionados con las áreas de algunas figuras, por ejemplo, plantear una ecuación cuadrática y, resolver éste por medio de una
construcción geométrica en la cual se construye un cuadrado igual en área a una figura dada (cuadratura). La longitud del lado de ese cuadrado es la solución de la ecuación cuadrática planteada ${ }^{9}$.

A la caída del imperio griego a los romanos, y la disolución del imperio romano a manos de las tribus bárbaras, el legado intelectual de Grecia quedó consignado en manos de los árabes que conquistaron los territorios griegos de Egipto y el Oriente Medio a partir del siglo VII. La lengua griega gozaba de amplio dominio por lo que los árabes tuvieron acceso a muchas de las obras griegas clásicas. Hacia el siglo IX se encontraba una academia de ciencias con centro en la ciudad de Bagdad; las actividades académicas gozaban de prestigio y el aval de los califas que gobernaban el distrito. Uno de los protagonistas más importantes en ese centro fue Mahammad Ben Musa Al- Khowarizmí quien escribió "El compendio de cálculos por el al-jabr y al-mugabala", un tratado sobre álgebra.

El tratado de Al- Khowarizmí se ocupa de la solución de seis tipos de ecuaciones, que en notación contemporánea son: $a x^{2}=b x, a x^{2}=b, a x=b, a x^{2}+b x=c$, $a x^{2}+c=b x, a x^{2}=b x+c$.
"Nótese el intento por evitar cantidades negativas, situando los términos apropiadamente a un lado u otro de la ecuación, los árabes reconocían la

[^7]existencia de dos soluciones a una ecuación cuadrática, las raices irracionales de las ecuaciones algebraicas, sin embargo rechazaban las raíces negativas"10.

El álgebra de Al-Khwarizmi revela en su contenido elementos griegos inconfundibles. A partir de la situación; "Un cuadrado y 10 raíces de la misma cantidad suman 39. Cuál debe ser el lado que incrementado en 10 de sus propias raíces suma 39". La solución dada por Al-Khwarizmi es de tipo geométrico. Se construye un cuadrado $A B$ cuyo lado es la raíz cuadrada $x$; sobre cada uno de los cuatro lados se construye rectángulos, cada uno de los cuales tiene ancho $1 / 4$ de 10 ó $2 \frac{1}{2}$. El cuadrado conjuntamente con los cuatro rectángulos es igual a 39 . Para completar el cuadrado, hay que sumar cuatro veces el cuadrado de lado $21 / 2$, o sea 5. Ahora, el área del cuadrado mayor es 64 y su lado es 8 , de alli se construye que el lado del cuadrado menor es $8-5=3$.

Como se puede observar los árabes no consideran la raíz negativa como solución de la ecuación, ya que para ellos, como para cualquier estudiante de nuestra época ( lo cual algunas veces planteamos como docentes para descartar una de las soluciones de una ecuación), dicha solución "carece de sentido".

[^8]El procedimiento utilizado se visualiza en las siguientes figuras:


Figura 4.


Figura 5.

Encontramos aquí un buen ejemplo para asignar sentido y significado a procedimientos algebraicos cuyo tratamiento en la escuela dista de los mismos, como es, otorgarle sentido a la expresión "completar cuadrados", la cual al ser tratada de manera algebraica no permite observar la riqueza que el procedimiento geométrico nos brinda para relacionar la solución de ecuaciones cuadráticas con modelos de área.

El procedimiento algebraico, que se desprende del desarrollo geométrico utilizado es el siguiente:

La ecuación es $x^{2}+10 x=39$; "completando cuadrados" se tiene

$$
x^{2}+10 x+25=39+25
$$

$$
(x+5)^{2}=64
$$

$$
x+5=\sqrt{64}=8
$$

$$
x=8-5=3
$$

Al-Khowarizmí da una segunda forma más sencilla demostrada geométricamente y similar al tratamiento Euclidiano. Se construyen rectángulos de lados $\frac{10}{2}$ que vale 5 sobre dos de los lados del cuadrado $A B$ y se completa el cuadrado con un cuadrado de área $\left(\frac{10}{2}\right)^{2}=5^{2}$. Es claro que el área del cuadrado que se ha completado es $(x+10 / 2)^{2}$, puesto que $(x+10 / 2)^{2}=8^{2}$, de donde, $x=3$.



Figura 7.

Figura 6.
Se destaca entre los algebristas que se preocuparon por otorgar sentido a las expresiones como la ecuación de segundo grado, Tabit Ben Qurra ${ }^{11}$, quien se hace, nos hace, consciente de la carencia de sentido que tiene pretender igualar un área o un segmento de recta con un número; por ello introduce una unidad de medida (c) para traducir lo anterior en la ecuación geométrica $x^{2}+2 . n . x=m$ con $x^{2}+m . c \cdot x=n c^{2}$.

[^9]Su constitución pretendió homogenizar los términos involucrados en la ecuación representándolos todos como áreas. La interpretación geométrica de Tabit conlleva a solución geométrica; en la expresión polinómica $x^{2}+3 x+2$, tomada como suma de áreas así:


Se propone con la figura formar con las secciones de áreas un rectángulo. Las dimensiones de los rectángulos formados son: $x+1 y x+2$, por consiguiente $x^{2}+3 \cdot x+2=(x+1)(x+2)$, que llevan a las raices de la ecuación $x^{2}+3 \cdot x+2=0$.

Hacia el año de 1.628 René Descartes describió un procedimiento detallado para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no en el sentido algebraico de los antiguos babilonios si no geométricamente, algo así como lo hacian los griegos de la antigüedad. Por ejemplo, para resolver la ecuación $z^{2}=a \cdot z+b^{2}$, Descartes procede de la siguiente manera: trácese un segmento $L M$ de Longitud $b$, y levántese en $L$ un segmento NL perpendicular a LM y de longitud $\mathrm{a} / 2$. Con centro en N dibújese la circunferencia de radio $\mathrm{a} / 2$ y trácese la recta MN , que corta a la circunferencia en
$O$ y en $P$; entonces $Z=O M$ es el segmento buscado. (Descartes ignora la raiz $P M$ de la ecuación por que es "falsa", es decir, es negativa) ${ }^{12}$, Ver figura siguiente:

"Descartes acusaba a la geometría de apoyarse excesivamente en diagramas y figuras que llegan a fatigar de manera innecesaria la imaginación, y a la vez acusaba al álgebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierte la mente. El objetivo de su método era doble: 1) el de liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, el uso de figuras, y 2 ) darle significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica ${ }^{13}$

Howard Eves, en su libro An Introductión to the History of Mathematics, da solución a la ecuación $x^{2}+b \cdot x+c=0$ mediante el método de Thomas Carlyle

[^10](1795-1881) considerando los puntos de intersección de una circunferencia con el eje x ; traza el círculo que tiene un diámetro con puntos extremos $(0,1)$ y $(-b, c)$. Si hay dos soluciones reales la circunferencia interpretará al eje $x$ en dos puntos. Las abscisas de estos dos puntos son las soluciones. Si solamente hay una solución real (raíz doble), la circunferencia será tangente al eje x y la solución doble será la abscisa en el punto de tangencia. Si no hay soluciones reales la circunferencia no intersecara al eje x.


Figura 10. Método de Thomas Carlyle (1795-1881)
Para verificar el método de Carlyle basta escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos antes mencionados, a saber $x^{2}+y^{2}+b x-(1+c) y+c=0$. Si determinamos la intersección de ésta con el eje x , es decir, hacemos $\mathrm{y}=0$, encontramos que la abscisa de la intersección con el eje $\times$ son precisamente las raíces de la ecuación: $x^{2}+b \cdot x+c=0 .{ }^{14}$

[^11]El geómetra alemán Harl Georg Chistian Von Stadt (1798-1867) hizo notorias contribuciones al campo de las matemáticas elementales. En el texto Eves, Howard An Introductión to the Founclations and fundamental concepts of mathematics, de $H$. Eves describe el método para resolver ecuaciones cuadráticas, geométricamente:
" Dada la ecuación cuadrática $x^{2}-2 x+h=0$. Sobre un plano cartesiano rectangular de referencia, ubicamos los punto $\left(\frac{h}{g}, 0\right)$ y $\left(\frac{4}{g}, 2\right)$. Dado que el segmento que une estos puntos corta el círculo de centro $(0,1)$ en puntos $R$ y $S$. Proyectando $R$ y $S$ desde el punto $(0,2)$ sobre los puntos $(r, 0)$ y $(s, 0)$ sobre el eje $x, r$ y s serán las raíces de la ecuación dada".


Figura 11. Método del geómetra alemán Harl Georg Chistian Von Stadt (1798-1867).

Llamamos A al punto (0,2), L al punto $\left(\frac{h}{g}, 0\right)$ donde $\overline{R S}$ corta a la tangente al círculo en $A$, se obtiene entonces las siguientes ecuaciones:

Circunferencia: $x^{2}+y(y-2)=0$; AR: $2 x+r(y+2)=0 y$ recta AS: $2 x+5(y-2)=0$ se sigue entonces que la gráfica de $[2 x+r(y-2)][2 x+5(y-2)]-4\left[x^{2}+y(y-2)\right]=0$ pasa por los puntos $A, R$ y $S$. Pero si simplificamos esta ecuación tenemos (y-2) $[2 x(r+s)+r s(y-2)-4 y]=0$, que a su vez representa el par de líneas rectas $y-2=0$ y $2 x .(r+s)+r s(y-2)-4 y=0$.

Dado que ni $R$ ni $S$ están en la primera recta, se sigue que la segunda recta debe ser RS. Reemplazando y $=0$ y $y=2$ sucesivamente en la ecuación de la recta $R S$, podemos concluir que $\mathrm{r}+\mathrm{s}=\mathrm{g}$ y rs $=\mathrm{h}$; esto es, r y s son raices de la ecuación: $x^{2}-g \cdot x+h=0$.

### 3.2. ANTECEDENTES

A continuación se destacan algunos de los trabajos que guardan mayor relación con el presente proyecto pedagógico, algunos llevados a cabo a nivel internacional y otros a nivel local.
3.2.1 Filloy y Rojano (1989) hacen un estudio donde utilizan modelos concretos para enseñar a resolver ecuaciones lineales; utilizó una secuencia didáctica diseñada para proporcionar al estudiante una serie de situaciones problemáticas
que se encuentran en el lenguaje del álgebra simbólica y s traduce a un lenguaje (icónico y escrito) concreto (balanzas. Pilas de piedra, intercambios de terreno, etc.). Al finalizar la secuencia los alumnos resolvían sintáctica mente ecuaciones lineales. Los referentes teóricos discurren en el concepto de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). Su utilización se encuentra en Kieran y Filloy (1989) y Filloy (1989). Los episodios de la investigación se describen a través de entrevistas clínicas.

El primer tipo de situaciones en S M Sa (abstractos) son textos del estilo:
$A X+B=C . x$, donde $A, B$ y $C$ son enteros positivos dados $y$, en este caso, $C>A$. Presentadas a los estudiantes con coeficientes numéricos; textos que un nivel más concretos, en los $S \mathrm{M} \mathrm{S}_{\mathrm{c}}$ aludidos, toman la forma:


Figura 12.
Los textos de este tipo se denominan algebraicos en contraste con los llamados aritméticos, en los que no es necesario operar la incógnita para su resolución (Filloy y Rojano, 1985b). ${ }^{15}$

[^12]
#### Abstract

En el artículo: "Procesos de abstracción de las operaciones, a partir del uso de un modelo para aprender a operar la incógnita" de E. Filloy / T. Rojano publicado a raíz de las investigaciones realizadas en el Centro de investigación y de Estudios Avanzadas del IPN, México, 1982-86, describe con detalles los resultados generales obtenidos en esta tarea. ${ }^{16}$

Parece interesante las investigaciones de Krutetskii (1976), Moses (1977), Suwarsono (1982), Presney (1985) y otros en el campo de la resolución de problemas, pusieron de manifiesto que atendiendo las caracteristicas de sus resoluciones, los estudiantes se pueden clasificar en tres grupos:


- Visual o geométrico. Aquellos con habilidad especial para interpretar visualmente relaciones matemáticas abstractas y caracterizadas por su persistencia en el uso de esquemas visuales incluso cuando los problemas se pueden resolver fácilmente desde otros enfoques.
- No visual o analítico. No tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.
- El intermedio o armónico. Aquellos cuyo equilibrio entre loas aproximaciones visuales y analíticas en la resolución de problemas. ${ }^{17}$

A escala local, se referencian los trabajos de:

[^13]- Benavides, E. y Canchila O. (2000) donde se estudiaban algunas expresiones algebraicas mediante la resolución de problemas y el uso de figuras geométricas. Básicamente se centraron en los conceptos de área y volumen. Con él se pretendía lograr una comprensión significativa de ellas, de abordar la técnica de resolución de problemas, en donde se pongan en juego el trabajo del alumno con expresiones algebraicas haciendo uso de los sistemas geométricos, los cuales permiten representar algunas situaciones concretas dotándolas de un alto nivel de significación y aplicabilidad. ${ }^{18}$
- MARTINEZ O. Liceth y MARTINEZ M. Emerson. Su propuesta: "Trabajo prealgebraico con estudiantes de séptimo grado del colegio Mariscal de Sucre de Sampues". Presentado en la Universidad de Sucre como trabajo de grado (2001). Con su trabajo contribuyen al paso de los estudiantes durante la transición aritmética al álgebra de manera que inicie en el manejo de la letra como número. Aplican a 40 estudiantes unas actividades con muchas figuras planas para que identifiquen el perimetro y el área de esas figuras incluyendo números y letras como números específicos. Una de sus más interesantes recomendaciones es la siguiente:
- Familiarizar más al estudiante desde el sexto grado con lo referente a los lenguajes matemáticos, es decir, llevarlo a que expresen enunciados del lenguaje ordinario al lenguaje aritmético y viceversa, para que cuando llegue al

[^14]grado séptimo, no se le presenten dificultades en las actividades propuestas en este trabajo (lenguaje aritmético-lenguaje algebraico).

### 3.3. BASES TEÓRICAS

El presente trabajo asume como bases las teorías constructivistas del aprendizaje, dentro de las que destacamos los enfoques epistemológicos de Piaget, Vigotsky y en especial los de Ausubel, y la teoria de las inteligencias múltiples de Gardner.

El enfoque epistemológico de Piaget, otorga un papel activo al individuo en el proceso de construcción del conocimiento, considera que dicho proceso se lleva a cabo gracias a estructuras cognitivas que posee el sujeto y que le permiten llevar a cabo la re organización de las experiencias y el conocimiento previo que posee. Piaget plantea que el aprendizaje consiste en el pasaje de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento. Es decir, los conocimientos nuevos se construyen a partir de los anteriores, lo que implica un proceso de reacomodación de todo lo conocido, es por ello que es el individuo el verdadero agente de su propio conocimiento.

A diferencia de Kant, Piaget considera que "las estructuras cognitivas evolucionan hacia un pensamiento cada vez más estable, capaz de incorporar en sus explicaciones un número creciente de situaciones del mundo fisico y del

[^15]entorno cognitivo" ${ }^{19}$. Según Piaget, el individuo desarrolla las estructuras cognitivas que posee gracias a los estados de equilibrio y desequilibrio cognitivo por los que atraviesa a lo largo de su vida, lo cual trasladado al ámbito educativo cobra importancia cuando el docente enfrenta al alumno a situaciones conflictivas ( conflictos cognitivos) para las cuales no posee todas las herramientas, pero que es posible abordarlas desde los conocimientos previos con los que cuenta

Vigotsky, por su parte, señala la importancia del contexto socio cultural en la adquisición de los conceptos, considera que los procesos cognitivos son productos de la vida social. Al respecto formuló una ley de la doble formación, según la cual todo los procesos cognitivos se construyen primero de manera interpersonal y luego se interiorizan individualmente.

Ausubel, "pone el acento de su teoría en la organización del conocimiento en estructuras y en las reestructuraciones que se producen debido a la interacción entre esas estructuras presentes en el sujeto y la nueva información. Ausubel, cree, al igual que Vigotsky que para que esa reestructuración se produzca se precisa de un instrucción formalmente establecida" ${ }^{20}$, resaltando asi la importancia del docente, de las mediaciones en el proceso de construcción del conocimiento. Según la teoría de Ausubel, para que el aprendizaje sea

[^16]significativo se requiere que el individuo pueda establecer relaciones entre la información que posee y la información que le llega, en cuyo proceso juega un papel preponderante el docente y las mediaciones que prevea para tal fin.

### 3.4. MARCO CONCEPTUAL

Lo expresado en las bases teóricas ha motivado, sin lugar a dudas, la búsqueda de alternativas con el fin de cambiar la enseñanza centrada en la transmisión de contenido que integre aportes más significativos y promuevan la interacción en grupo, a fin de que los estudiantes tengan un aprendizaje más duradero. De esta forma las construcciones geométricas permiten representar los términos de expresiones algebraicas que se relacionan con áreas de modo que los estudiantes puedan visualizar los términos de dicha expresión y otorgarles sentido; además, se presentan dos posibilidades de acceso a las ecuaciones cuadráticas, la algebraica y la geométrica, para que el alumno trate de interiorizar los conceptos, se apropie de estos, establezca relaciones entre ellos y a su vez construya sus propios conceptos para que posteriormente, en la cotidianidad, puede identificar y solucionar situaciones problemas relacionadas con áreas que involucren ecuaciones de segundo grado.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar en las últimas décadas ha sido fuertemente transformada, contextualizada y recontextualizada, debido a que ha sido considerada una herramienta potente para el desarrollo del pensamiento.

Es por ello que se enfatiza en el desarrollo de habilidades más que en la transmisión de contenidos aislados.

Se pretende con la actual educación matemática que los aprendizajes orientados, u obtenidos están muy estrechamente relacionados con la cultura, necesidades y potencialidades de los aprendientes. Cuando esto sucede, se promueve verdaderos aprendizajes (significativo).

Una tendencia que ha tenido mayor acogida dentro de la didáctica en matemática es la de privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas. Miguel de Guzmán plantea que:

> "La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con forma de pensamiento eficaz (...). El tratamiento de situaciones problematicas, proporciona el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inversión de las matematicas en la cultura del desarrollo del pensamiento y para contribuir a darle sentido y utilidad a las matemáticas

Con el diseño de situaciones problema (tomadas para este trabajo como preguntaproblema que se refieren a contextos matemáticos conectadas con la realidad situacional del escolar) asociadas con la resolución de ecuaciones de segundo

[^17]grado mediante modelos geométricos, en especial, de áreas, se pretende redefinir la vieja concepción de la matemática escolar, asumiendo la nueva visión mediante el tratamiento de situaciones problemas, de la vida cotidiana o de las ciencias que engarcen el saber cultural y cotidiano con el saber matemático, desde los contextos algebraico y geométrico En este sentido, plantea Dreylus- Eisemberg (1986) que "los currículos de matemática deben desarrollar cada tema en los aspectos analíticos y visuales para que cada estudiante se enfrente al material de manera que esté más próxima a su orientación cognitiva". ${ }^{22}$

La utilización de modelos geométricos de figuras planas (cuadrados y rectángulos) resaltan el proceso histórico de construcción del álgebra, particularmente, del álgebra geométrica, que encuentran sus fundamentos en los trabajos de Euclides, Mahammad Ben Musa Al- Khowarizmí y de la crítica de Tabit Ben Qurra, los cuales hemos querido "rescatar", desempolvar, para que los estudiantes de octavo grado normalista puedan apreciar la belleza y creatividad reflejada en la historia de las matemáticas y puedan de esta manera, resignificar las incomprendidas expresiones algebraicas por medio de este un toque geométrico y algebraico.

Cuando se operan ecuaciones de segundo grado mediante el enfoque geométrico, necesariamente el estudiante debe de poner en juego su razonamiento visual, para expresar en áreas, cada uno de los términos de la ecuación cuadrática dada

[^18]y tratar de organizar con todas estas partes, un rectángulo, del cual, puede deducirse, sus raices reales.

Se entiende por razonamiento visual el uso de representaciones gráficas como diagramas, modelos geométricos, como método para pensar y entender. Según investigaciones de Krutetskii (1976), Moses (1977), Suwarsono (1982), Presney (1985), en el campo de la resolución de problemas los estudiantes se clasifican en tres grupos: los que se polarizan al uso de soportes gráficos, los optan por los métodos analíticos y los que se sitúan en un estado armónico o intermedio entre la visual-geométrico y analítico. Esto resultaría importante considerar para identificar cual (es) estudiantes se sitúan en el grupo visual o geométrico.

Howard Gardner ${ }^{23}$, psicólogo, y profesor de Educación de la universidad de Harvard, quien ha investigado durante muchos años el desarrollo de las capacidades de conocimiento del ser humano, lo entendería como una acción pedagógica para el desarrollo de la inteligencia espacial, es decir, esa habilidad para comprender las relaciones entre las figuras en el espacio-tiempo (2D o 3D) y poder elaborar con ellas procesos mentales de mayor abstracción. Un ingeniero, un arquitecto, un diseñador de espacios interiores, un pintor, un geómetra, poseen en mayor proporción, un dominio de su inteligencia espacial, sin detrimento de las

[^19]otras. Según esta teoria, el nuevo paradigma: " saber para pensar con rigor y ser creativo y orientar la vida hacia el ideal de unidad y solidaridad". ${ }^{24}$

Este destacado psicólogo, plantea, que el pensamiento espacial, es esencial para el pensamiento científico ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial, para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial ${ }^{25}$.

En este trabajo apunta a desarrollar la inteligencia visual-espacial a través de la utilización de los modelos geométricos, para analizar y resolver ecuaciones de segundo grado, dibujando, recortando y distribuyendo cuadrados o rectángulos de acuerdo con algunos criterios preestablecidos (en virtud al método de completación de cuadrados; Euclides, Mahammad Ben Musa Al- Khowarizmí, Tabit Ben Qurra).

Un estudiante del grupo visual o geométrico (según Krutetskii, Moses, Suwarsono y Presney ), aplica su inteligencia espacial en la resolución de problemas, generalmente asociada a las aplicaciones y a la modelación.

[^20]La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En este sentido, el holandés Hans Freudenthal plantea los elementos básicos de la construcción de modelos (Lineamientos curriculares de matemáticas: 97) así como lo muestra la figura:


Figura 13. Elementos básicos de la construcción de modelos.

Según Freudenthal, el punto de partida de la modelación es una situación problemática real, la cual debe precisarse de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. La situación conduce a una formulación del problema la cual debe trasladarse a las matemáticas, es decir, debe "matematizarse", para generar un modelo matemático de la situación original. Los resultados obtenidos con las estrategias de resolución de problemas, deben ser validados, es decir, trasladarlos al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación real (así también se evalúa el modelo).

Validando satisfactoriamente el modelo, éste puede ser usado para hacer predicciones acerca de la situación problemática real.

Algunos autores difieren entre modelación y matematización y otros, la consideran equivalentes. Según los lineamientos de matemáticas, consideran la matematización, como el proceso desde el problema enunciado matemáticamente, hasta las matemáticas y, la modelación, (la construcción de modelos) como el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático ${ }^{26}$.

De lo que se trata, es que el estudiante comprenda una situación problemática real, que la lleve a un enunciado matemático, la re-exprese mediante modelos geométricos de áreas, la valide en relación con la situación problemática real y comunique sus experiencias.

Este proceso de comunicación en el aprendizaje del álgebra escolar se debe propiciar en interacción. Para se tiene presente durante el proceso metodológico las siguientes orientaciones para ayudar a los alumnos a obtener lo mejor de su experiencia en el aprendizaje cooperativo:

- Ningún miembro del grupo puede decir que ha terminado la tarea asignada hasta no estar seguro de que todos han concluido su trabajo (esto ayuda a los alumnos a desarrollar el sentido de cooperación y de esfuerzo comunitario). Cuando los alumnos quieran hacer preguntas, siempre procurarán recurrir a los otros grupos antes de dirigirse al maestro (esto les ayuda a servirse de sus propios recursos para resolver los problemas y crea en ellos el sentido de la independencia).

[^21]- Los miembros del grupo deberán eplicar en qué consiste la tarea y las instrucciones, así como asegurarse de que todos los integrantes han entendido claramente qué es lo que se espera de ellos (esto ayuda a afianzar el dominio del alumno sobre la tarea asignada y sobre el tema de la materia).
- Todos los alumnos deberán desempeñar un papel y cumplir con una obligación (los alumnos no serán advertidos con anticipación de quien va a ser llamado para presentar el trabajo frente a todo el salón; por tanto, todos los alumnos deberán prepararse para hacer la exposición. Esto también contribuye a mantenerlos alertas y atentos). ${ }^{27}$

En el aprendizaje de las matemáticas, un principio fundamental cuando se considera la resolución de problemas, es aceptar que no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la instrucción; es una perspectiva en la que existe una conceptualización dinámica de la matemática y en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los estudiantes. La resolución de problemas se corresponde con una forma de pensar donde el estudiante tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diversas estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones, en el aprendizaje de las matemáticas. Los problemas, por su parte, serán presentados a los estudiantes mediante actividades centradas en preguntas como estrategia de enseñanza (Romiett Stevens, 1912, Meredith D. Gall, 1970). Del estudio de Meredith D. Gall y sus colaboradores (1978) sobr el arte de preguntar, d e las exposiciones y del aprendizaje parecían apoyar la idea de que la enseñanza por exposición era más
eficaz para promover el aprendizaje en el estudiante de lo que era la experiencia didáctica en la cual el alumno no habla y que duraba el mismo tiempo. También observaron que los alumnos aprendían en la misma medida cuando el maestro daba la respuesta a una pregunta que un estudiante no sabía que cuando la información se la daban sus pares. ${ }^{28}$

Una de las estrategias de resolución es el uso de representaciones o modelos para que el estudiante desarrolle sus habilidades visual-geométricas o su inteligencia espacial. En este sentido, Treffers y Goffree ${ }^{29}$, describen la modelación como:


#### Abstract

"Una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas".


En este caso el estudiante, debería descubrir esas relaciones, esas regularidades ocultas en las situaciones planteadas, en torno a la resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado en una incógnita.

Se entiende por ecuación de segundo grado en una incógnita, a la igualdad de la forma $a x^{2}+b x+c=0$, donde $a, b, c \in R \wedge a \neq 0$. Por ejemplo, las ecuaciones $x^{2}-x-$

[^22]$6=0$ y $2 x^{2}-5 x+2=0$, son cuadráticas. La solución de una ecuación de este tipo, requiere hallar el valor o valores de la incógnita. Según el teorema fundamental del álgebra, debe tener a lo sumo, dos soluciones (positivas o negativas) que pueden ser:

* Dos soluciones reales (racionales o irracionales).
* Una solución real.
* Ninguna solución real.

Por razones didácticas, se obvia un poco, las soluciones negativas para no generar incongruencias con interpretaciones con modelos geométricos de áreas y se toma la factorización sobre el conjunto de los enteros.

El método de resolución mediante áreas de figuras, se fundamenta en la factorización por completación de cuadrados, que consiste en ajustar la ecuación general de segundo grado, en un trinomio cuadrado perfecto, adicionando la misma cantidad a ambos lados de la igualdad:
$(a+b)^{2}=a^{2}+2 a b+b^{2}$ (cuadrado de un binomio).

Un término algebraico puede reexpresarse figuralmente, mediante áreas así:
> $\mathrm{X}^{2}$, corresponde al área de un cuadrado de lado x (lado por lado).

[^23]> $3 x$, corresponde al área de tres rectángulos de lados $x$ y la unidad $[A=b . h ;$ $A=1 . x=x \cdot(1)=x]$.
$>2$, estará representado por dos cuadrados de lado la unidad. ${ }^{30}$

### 3.5. BASES LEGALES

Entre otros artículos contemplados en la Ley General de Educación y sus decretos Reglamentarios se considera pertinentes los siguientes:

Decreto 1860 De Agosto 3 De 1994 en su artículo 35, plantea que en el desarrollo de asignaturas se deben aplicar estrategias y métodos pedagógicos activos y vivenciales que contribuyan a un mejor desarrollo cognitivo y a una mayor formación de la capacidad crítica, reflexiva y analítica del educando.

Su Artículo 36 se refiere a los proyectos pedagógicos como actividades dentro del plan de estudio, con la función de correlacionar, integrar y de ser activos, los conocimientos, habilidades, destreza, actitudes y valores logrados en el desarrollo de diversas áreas (matemática, arquitectura, construcción, en este caso).

Resolución 2343 De Junio 5 De 1996. Indicadores de logros curriculares comunes, para los grados décimo y undécimo de la educación media. Se destacan los siguientes indicadores generales:
${ }^{30}$ Recorriendo el álgebra. Op. Cit. p. 57.

- Investiga y comprende contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas; reconoce fórmula y resuelve problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpreta los resultados a la luz de la situación inicial.
- Elabora argumentos informales pero coherentes y sólidos para sustentar a ordenación lógica de una serie de proposiciones.


## 4. METODOLOGÍA

### 4.1. TIPO DE ESTUDIO

El estudio que se plantea es descriptivo, porque está encaminado a observar, identificar, analizar, explicar y argumentar el desempeño del estudiante de octavo grado cuando se enfrenta a las actividades asociadas a la resolución de ecuaciones de segundo grado a través de las siguientes actividades pedagógicas:

- Interpretación de expresiones algebraicas, utilizando modelos de áreas. En él, se aplica una prueba inicial de exploración de ideas previas (ver talleres 1 y 2$)$.
- Actividades referidas a la factorización de expresiones algebraicas utilizando áreas de cuadrados y rectángulos (talleres 3, 4,5, 6 y 7 ).
- Aplicación del método de Alwarizmo y cartesiano para la resolución de ecuaciones cuadráticas (taller 8, 9, 10 y 11).
- Método de Completación de Cuadrados. Lleva al estudiante a la solución general de la cuadrática $A x^{2}+B \cdot x+C=0$, mediante demostración geométrica y simbólica (taller 12).


### 4.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

El problema se diagnostica en los grados octavo, cuatro en total, de la Escuela Normal Superior de Corozal Sucre, para una población de 162 estudiantes.

Se seleccionó el grupo octavo cinco jornada vespertina de la Escuela Normal Superior de Corozal, compuesto de 30 estudiantes, a los que previamente se les practicó una prueba diagnóstica para explorar ideas previas. El rendimiento académico de éstos cursos, no fue el mejor, sólo un 13.3\% de los estudiantes se sitúan en valoraciones de excelente en el año lectivo del 2001. En el año 2002, las actividades de recuperación y las tasas de insuficientes se incrementaron. Como metodología de trabajo de aula se viene impulsando la participación activa del estudiante y trabajo a través de talleres, por ser estrategia concertada en el Núcleo de Ciencia y Tecnología.

### 4.3. INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para captar la información requerida, se utilizaron los siguientes instrumentos.

- Prueba (1) inicial para exploración de ideas previas (anexo 1). Está orientado a que el estudiante interprete expresiones algebraicas como perimetro y área de una superficie, halle el valor numérico de una expresión algebraica $y$, relacione una situación problema con un enunciado matemático. Consideramos esencial la exploración de ideas previas pues,
como plantea Ausubel, es a partir de ellas el estudiante otorga significado a la nueva información que recibe.
- Talleres grupales e individuales. Los consideramos fundamentales en la medida que los estudiantes más aventajados pueden ayudar a que sus compañeros construyan los conceptos tratados. Estos talleres buscan familiarizar a los estudiantes con los modelos geométricos para reexpresar expresiones algebraicas, y utilizarlos en la factorización y resolución de la ecuación cuadrática, atendiendo a los métodos de Euclides, René Descartes y Al-warizmi. El último taller, está orientado a la demostración de la fórmula general de la cuadrática, por vía visual-algebraica.


### 4.4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

La información que se obtiene de la prueba inicial y de los talleres (6) es analizada y llevada a tabla de datos cualitativos, de acuerdo a los siguientes indicadores de logro:

- ¿Identifica expresiones algebraicas como el área de una figura geométrica?
- ¿Comprende y aplica los métodos de solución de ecuaciones de segundo grado como los utilizados por los babilonios, Euclides, Al-warizmi y Descartes?
- ¿Tiene facilidad para reconocer figuras geométricas y efectuar cálculo de áreas y perimetros con ellas?.

Las tablas se explican de forma precisa presentando las dificultades o aspectos positivos y creativos, identificados en los estudiantes de octavo grado. Se enfatiza en el análisis descriptivo de las potencialidades y debilidades de los estudiantes de octavo grado.

## 5. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

### 5.1. FUNDAMENTACIÓN

Las actividades están centradas en el desarrollo de habilidades tendientes a lograr la abstracción y generalización de la ecuación cuadrática, a partir del tratamiento de casos que involucran modelos geométricos para su solución. La propuesta rescata, esencialmente, los presupuestos del álgebra geométrica de los griegos y los árabes.

### 5.2. ETAPAS DE LA PROPUESTA

Las actividades de aprendizaje se estructuran por medio de talleres, los cuales se organizan en las siguientes fases:

- Fase inicial. Encaminada, como ya dijimos, al reconocimiento del estado cognitivo en que se hallan los estudiantes para emprender, seguir el estudio de la ecuación cuadrática.
- Fase de Familiarización. Su propósito es que los estudiantes identifiquen las expresiones algebraicas como representaciones de áreas. Se desarrolla a través de talleres en que se enfatiza la representación de expresiones algebraicas por medio de modelos de área. Para tal fin se usa cartón o
cartulina para llevar acabo la representación de la expresión respectiva. La organización del trabajo es de tipo grupal, a lo sumo tres estudiantes. Corresponden a esta fase los talleres 3 de factor común, taller 4 factorización de la forma $(x-a)^{2}$, taller 6 , forma $(x+a) .(x+b)$ y el taller 7 , de completación de cuadrados
- Fase de Análisis y Aplicación de Métodos: En esta fase el propósito es de recrear métodos, eminentemente geométricos, empleados por diferentes culturas para resolver la ecuación cuadrática. Tales como los métodos de Al-khwarizmi; Descartes, Pitagórico (Bháskara, 12 th century) y álgebra de los griegos.
- Fase ecuación cuadrática contemporánea. Desarrolla el taller 12 para que los estudiantes puedan a este nivel, visualizar y relacionar la construcción simbólica de la ecuación cuadrática con su referente geométrico.


### 5.3. RESULTADOS DE LOS TALLERES APLICADOS

Los talleres se presentan en los anexos, a continuación mostramos los resultados:

Resultados Obtenidos del Taller Inicial. Este taller buscaba que los estudiantes:

- Interpretaban expresiones algebraicas como perímetro y áreas de una superficie.
- Hallaran el valor numérico de una expresión algebraica los resultados se presentan en la tabla 3.

| Indicador de Logro | İtem | Descripción |
| :---: | :---: | :---: |
| Interpreta expresión algebraica como perímetro de una figura plana. | Este ítem se componen de 4 figuras $\square$ <br> Figura 1. <br> Figura 2. <br> Figura 3. <br> Figura 4. | El 40\% de los estudiantes tomo el perímetro de la figura como una suma de números con números y de letras con letras mientras sean del mismo tipo las respuestas las fueron simplificando, así: $\begin{aligned} & P_{1}=a+b+a+b \\ & P_{1}=(a+b)+(a+b) \\ & P_{1}=2 a+2 b \end{aligned}$ $\begin{aligned} & P_{2}=e+e+e \\ & P_{2}=3 e \end{aligned}$ $\begin{aligned} & P_{3}=3 x+x+4+x+x+4+x+3 x \\ & +2 x+2 x . \\ & P_{3}=(3 x+x+x+x+x+3 x+2 x+ \\ & 2 x)+(4+4) \\ & P_{3}=14 x+8 \end{aligned}$ $\begin{aligned} & \mathrm{P}_{4}=5+2 w+7+8+w+9 \\ & \mathrm{P}_{4}=(5+7+8+9)+(2 w+w) \\ & \mathrm{P}_{4}=29+3 w \end{aligned}$ <br> En la sumatoria utilizaban las propiedades conmutativas y asociativas de la edición. <br> El 35\% de los estudiantes tomaron el perímetro como las figuras se estiraron en una solo línea recta. <br> En su mayoría sus expresiones fueron: $\begin{aligned} & P_{1}=2(a+b) \\ & P_{2}=3 e \\ & P_{3}=8+14 x \\ & P_{4}=w+2 w+29 \end{aligned}$ <br> Hacían cálculos directamente obviando la aplicación explicita de las propiedades conmutativas y asociativas de la edición. <br> El $25 \%$ de los estudiantes |


|  |  | presentaron dificultades con la interpretación de la letra, en especial letra ignorada sus expresiones algebraicas fueron $\begin{aligned} & P_{1}=a+b+a+b \\ & P_{2}=e^{3} \\ & P_{3}=8+14 x=22 \\ & P_{4}=3 w+29=32 \end{aligned}$ |
| :---: | :---: | :---: |
| Interpreta expresión algebraica como área de una superficie. | El segundo ítem consta de 4 figuras a, b, c y d. <br> Fig. a | El 60\% de los estudiantes expreso las áreas así: $a_{1}=20 x$ $\mathrm{cm}^{2}$ $\mathrm{cm}^{2} \mathrm{a}_{2}=20 \mathrm{~cm} \times 10 \mathrm{~cm}=200$ |
|  | Fig. $b$ <br> Fig. c. <br> Fig. d. | Las expresiones fueron: $A=3 x+4 x+x^{2}+1 x$ <br> Sólo alguno de estos predijo la expresión: $A=x(y-5 x)+y^{2}=x y-5 x^{2}+y^{2}$ <br> Esto representó un reto para los estudiantes, al encontrar la longitud que no se muestra: $y-5 x$. El $70 \%$ tuvo dificultad con esta figura. <br> El $100 \%$ determinó la expresión $A=2 x+2 . y$.. Sólo un $20 \%$ de ellos la expresó como 2. $(x+y)$. |
| Halla las figuras  <br> correspondientes a   <br> expresión.   <br>    | 3. ¿Cuál es la expresión correspondiente a $x(2 x+1)+y(2 x+1)$ ? | Sólo 11 de 30 estudiantes anotaron: $\begin{aligned} & 2 x+11 \\ & \times \square \\ & Y \\ & \square \end{aligned}$ <br> Sólo 7 estudiantes eligieron la $3^{\text {a }}$ figura. |
| Halla el valor numérico de una expresión algebraica correspondiente a una sección de área dada en una figura plana. | $\mathrm{X}^{2}$ 3 x <br> Ítem 4. <br> 40 42 | El 80\% de los estudiantes tomó $x=5$, como respuesta. Anotaban 5+3= 8 y $8 \times 5=40$. El resto se limitó a copiar los resultados de los demás. |
| Encuentra la expresión algebraica en términos de áreas, | Item 5. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el | Sólo algunos estudiantes (33.3\%) indicaron ( $x-y$ ). $y=x y-$ |


| asociada a un referente geométrico. | área <br> sombreada? |  | $\mathrm{y}^{2}$. El resto tuvo dificultad, por sí sólos, para encontrar la longitud del lado $\mathrm{x}-\mathrm{y}$. |
| :---: | :---: | :---: | :---: |

Tabla 3. Taller 1.

La mayoria de los estudiantes tienen cierto manejo de las nociones de área y perímetro tratadas en los grados anteriores. Esta actividad permitió explorar sus ideas y enriquecerlas mediante el uso de letras como números especificos (Kúcheman, 1978).

## Resultados de la Fase Factorizando por medio de áreas.

Algunas dificultadas encontradas al iniciar la intervención tuvo que ver con la confusión entre perímetro-área, equivalencia de áreas y manejo de la dimensionalidad. De igual manera, lo constatan M. A. del Olmo y otros ${ }^{31}$, así:

Las dificultades persistentes constatadas parecen debidas a la existencia de obstáculos cognitivos y epistemológicos que se refuerzan mutuamente,, de los cuales los principales son: el paso de las estructurad aditivas a las multiplicativas, y la construcción de ellas como dominio propio, el reconocimiento de la dimensionalidad relativa de los objetos geométricos líneas, superficies y volúmenes) y la noción de equivalencia que fundamenta la medida de formas no pavimentadas y subentiende propiedades de continuidad, complejas, pero ciertas.

[^24]Resultados del taller 2. Para expresar una expresión algebraica en términos de áreas. Para esta actividad se les pidió cartulinas y tijeras para recortar figuras geométricas planas como rectángulos y cuadrados, luego debían dimensionarlas con una escuadra y hallar sus áreas.

Se hizo una lectura silenciosa del taller 2 en grupos de tres estudiantes. Se pide que expresen espontáneamente las intenciones del taller. Algunos afirman que "se trata de aprender el álgebra no como está en el libro de Baldor, sino con muchas figuras..." (Juan C., Lainer, 14 años).

La tabulación de los resultados del taller son los siguientes:

| Indicador de logro | İtem | Descripción |
| :---: | :---: | :---: |
| Encuentra significado geométrico a constante, variable y expresión algebraica dentro del contexto geométrico. | La actividad se compone de 4 figuras $a, b, c$ y . | La mayoría de los estudiantes expresaron los 4 conjuntos de áreas en términos numéricos evaluando la letra para $x=20$, $\mathrm{y}=1$ estudiantes . $\begin{array}{lll}\text { Sólo } 2 \\ \text { hallaron }\end{array}$ de $\begin{aligned} & 30 \\ & \text { las }\end{aligned}$ expresiones algebraicas y luego evaluaron las letras. |
| Construye figuras planas correspondientes expresiones polinómicas. | Actividad 2. Construir figuras planas para: <br> - $w^{2}+5 w$; <br> - $\mathrm{x}^{2}+\mathrm{y}^{2}+\mathrm{z}^{2}$. | El 60\% de los estudiantes logró encontrar la expresión $w^{2}+5 w=w .(w+5)$. El resto sólo lo representó gráficamente: <br> En la segunda figura, se presentaron diversas alternativas según las relaciones de orden implícitas en las dimensiones. Unos representaban asi: |


|  |  | Otros: <br> La opciones fueron múliples lo que significa que tomaron la letra como cualquier número positivo que la reemplaza (evaluada). |
| :---: | :---: | :---: |
| Relacionar expresiones <br> polinómicas con figuras <br> planas.  | Referente geométrico de: <br> 1. $x^{2}+8 x \cdot y+15 y^{2}$ <br> 2. $x^{2}+5 x y+6 y^{2}$ <br> 3. $2 x^{2}+11 x y+2$ <br> 4. $2 x^{2}+11 x y+12 y^{2}$ | La mayoría de los grupos (3 estudiantes) respondieron correctamente con esta actividad una dificultad se halló al representar los términos independientes. Con el "2", hacían rectángulos de $2 \times 1$. Ios estudiantes construyeron las figuras correspondientes a estas expresiones utilizando cartones. Esto pareció muy divertido para ellos. |
| Hallar el factor común de una expresión factorizable por el método del rompecabezas. | $\begin{aligned} & \text { Factorizar por factor } \\ & \text { común } 10 x z-5 x y+8 y z-4 y^{2} \end{aligned}$ | Pese el grado de dificultad de esta actividad por el método visual, los estudiantes, optaron inicialmente por el método algebraico; luego iban tanteando con las figuras para ver cómo contrastarlas con las expresiones. <br> Las dificultades surgen cuando aparecen figuras con el signo menos. |

Tabla 4. Taller 2.
Esta actividad fue importante porque los estudiantes identificaron en su gran mayoría que las expresiones algebraicas representan secciones de área. Dicen algunos, que esta forma es "más concreta, que se aprende más fácil..."

La interacción en los diferentes grupos (10) fue activa mientras se mantenían ocupados elaborando las figuras geométricas en cartón y entonces empezar a manipularlas para tratar de conjeturar y sacar conclusiones. Un aspecto interesante es que ven en las letras, números específicos, según la investigación de Kücheman, (Diversas Interpretaciones de la Letra en contextos matemáticos, 1978).

### 5.4.2 Resultados de la Fase de factorización por medio de geometría. Esta

fase encierra la aplicación y evaluación de los talleres $3,4,5,6$ y 7 . Los resultados
se condensan en una tabla explicativa que agrupa de manera global atendiendo a los indicadores de logro trazados. La tabulación es la siguiente:

| Indicadores de logro | Forma de las expresiones algebraicas | Aspectos relevantes | Aspectos a mejorar |
| :---: | :---: | :---: | :---: |
| Identifica el área como representativa de secciones de áreas en distintos contextos matemáticos. | $\begin{aligned} & \mathrm{A}(\mathrm{~B}+\mathrm{C}) \\ & (A \pm B)^{2} \\ & \\ & (\mathrm{X}+\mathrm{A})(\mathrm{X}-\mathrm{B}) \end{aligned}$ | Los casos que se facilitaron fueron la factorización por factor común utilizando a lo más, 4 términos; aquí la manipulación de las figuras es esencial, para que puedan reorganizarlas de acuerdo con los lados o número de veces que se repite (factor). Esto fue trabajado con sagacidad por los estudiantes, en especial cuando todas las áreas se suman. Las situaciones contextuales que se presentaban incluyendo muchos términos con positivos y negativos despertaron gran interés cuando de reorganizar las figuras se trata. <br> En la diferencia de cuadrados, se presentaron dificultades, en especial, cuando de hallar la longitud de un segmento que se obtiene por diferencia de dos; por ej. (y-2), (4y-y). De igual manera, cuando las piezas que llevan el signo menos, se superponen. <br> En el caso ( $x-a$ ) $(x+a)$ [Taller 6], Actividad 1, la gran mayoría de los estudiantes factorizó la expresión representativa | Introducir <br> expresiones que los estudiantes puedan factorizar para que se apropien de la utilización y manejo geométrico del álgebra. <br> Ir aumentando gradualmente el número de términos del polinomio para que los estudiantes no se confundan con tantas figuras. Esta habilidad la ponen en práctica los que presentaron <br> expectativas con inteligencias espacial, lógico-matemática lingüística. <br> La organización heterogénea de los grupos de trabajo. <br> La intervención del docente debe ser efectiva y eficaz, para generar conflictos |


|  |  | del área en el salón de artes de la escuela como $(x+2)(x+2)=9 \quad \mathrm{~m}^{2} ; \quad$ la solución presentada fue $x=1$. El resto optó por decir que cada lado media 3 m y si era $\mathrm{x}+2$, la $x$ tendría que ser $x=1$. <br> En la actividad 2, de este taller, la gran mayoría de los estudiantes intentó armar el rompecabezas asi: <br> Entonces $\quad A=x^{2}+2 x+3 x$ $+6=5 \mathrm{~m}^{2}$. No presentaron soluciones a la ecuación. Se presentaron muchos casos en que los estudiantes figuran como muy ocupados, que están comprendiendo, pero sólo copian el trabajo de los demás; por ej. $(x+2)(x+3)=9$. Otros casos ignoraban la letra como por ej. escribir, $x^{2}+5+6=5$ (en lugar del $x^{2}+5 x$ $+6=5$ ). <br> Para la Actividad 3, taller 6, la mayoría relacionó las áreas con la expresión $x^{2}+7 x+2=0, \quad y \quad e l$ rompecabezas fue armado así: <br> La dificultad surgió cuando se precisó que el área total debía ser nula, lo cual no presentaron soluciones para ello. <br> En la actividad 4, sólo una | cognitivos sociocognitivos. <br> Es importante que los estudiantes sean concientes que es más interesantes las buenas preguntas, que muchas respuestas. <br> Enfatizar primero en el análisis y discusión del problema, antes que dar orientaciones que lo llevan a las soluciones. |
| :---: | :---: | :---: | :---: |


|  | Completación de cuadrados. | minoría (15\%) después de discusión entre el grupo y manipulación de las figuras, expresó el área así: <br> No presentaron soluciones. El resto sólo representó las figuras, de diferentes reorganizaciones (no siempre viables para factorizar). <br> En la completación de cuadrados, para los casos dados, no se exhibe gran dificultad, sólo en el caso $2 x^{2}+$ $9 x+4=7$, donde debían transponer términos. Los estudiantes lograron responder ante esta actividad. <br> El 100\% de los estudiantes <br> Exhibe sus confusiones o errores cuando de operar números negativos, se trata. La inquietud de cómo un lado tiene medida negativa, abrió nuevas posibilidades de reflexión, conflicto. | Es bueno que los estudiantes lleguen por sí solos a declarar una expresión, como factorizable o no. <br> Hacer caer en cuenta que los piezas con el signo menos superponen sobre las figuras, lo cual obliga a aplicar la diferencia de longitudes. |
| :---: | :---: | :---: | :---: |

Tabla 5. Fase de Factorización.

Resultados del análisis y aplicación de métodos De Al-Khowarizmi, cartesiano y álgebra griega. Esta fase necesitó del prerrequisito, factorizar mediante rompecabezas de áreas para facilitar la comprensión de estos métodos, legados de la historia de las matemáticas griegas, babilónicas o árabes. Se presentaron a estudiantes de octavo grado, nivel en que inician propiamente el manejo de la generalización del número (letras como números especificos, generalizado, incógnitas o variables).

La tabulación es la siguiente:

| Indicadores de logro | Forma de las expresiones algebraicas | Aspectos relevantes | Aspectos a mejorar |
| :---: | :---: | :---: | :---: |
| Identifica el procedimiento utilizado por alKhwarizmi para la solución de ecuaciones cuadráticas con coeficientes positivos. | $x^{2}+10 x=39$. | El 76.6\% de la muestra identificó el procedimiento heurístico expresando que la clave está en el termino en $x$, del cual se extraen cuatro cuadrados... sin embargo, al resto le pareció más fácil descomponer el término en dos, como si fuese el caso $(x+a)^{2}$. <br> Estudiantes destacados se atrevieron a plantear una expresión de la misma forma, como $3 x^{2}+9 x=102$. el planteamiento generó nuevas confusiones para los que venían entendiendo el método. | Ayudarles a los estudiantes en el proceso lectural que es donde fallan para la comprensión de las situaciones. <br> Afianzar el uso de los racionales, pues tienden a marginarlos desplazarlos. En esto los estudiantes exhiben sus dificultades para la manejo. |
| Aplica el modelo geométrico de alKhwarizmi en la solución de situaciones asociadas a la ecuación cuadrática. | 1. $x^{2}+4 x=125$ <br> $\frac{4 \frac{125 m^{2}}{x+4}}{\frac{4}{4}}$ | La mayoría tomaron el caso de descomponer el coeficiente de $x$ en cuatro longitudes para sacar 4 rectángulos (de 1 y x), pues como es 4, cada uno salía de 1 unidad, lo cual lo obvia un poco el uso de racionales. Cayeron en la cuenta que se necesitaban 4 cuadrados de $1 \times 1$ unidades cuadradas...concluyen que la suma de las áreas | Las dificultades se exhiben cuando se requiere operar la incógnita, despejar el término desconocido. Esto merece mayor atención. |


|  |  | es $125+4=129$, lo que da un cuadrado de lado la raíz cuadrada de 129. El lado $x$, sería la. La utilización de este método fue correcta para este caso. |  |
| :---: | :---: | :---: | :---: |
| Aplica el modelo geométrico de alKhwarizmi en la solución de situaciones asociadas a la ecuación cuadrática. | 2. $x^{2}+2 \cdot x=10$ | El método que sugirió al grupo, los estudiantes adelantados fue de descomponer en dos rectángulos pues, se facilitaba. La mayoría de los estudiantes lo siguieron. La solución la hallaron mediante el uso de una calculadora; no veían en una radical indicado, una medida, sino una acción o concepto $\sqrt{11}$ ó $\sqrt{11}-1$ ). <br> La figura la construyeron así: | Afianzar en la <br> extensión de los <br> reales,  en <br> particular del uso <br> de irracionales.   |
| Identifica algunos procedimientos del álgebra geométrica de René Descartes para la solución de ecuaciones de segundo grado. | 1. $x^{2}=6 x+16$. | Los estudiantes se dieron cuenta de la veracidad del método cuando se les pidió contrastar los resultados en la ecuación original. La figura la trazaron haciendo uso de la regla y el compás, así: <br> La solución presentada fue de 8 cm aprox. | Pedir SIEMPRE en los estudiantes, la contrastación de sus respuestas. |


| Indicadores de logro | Forma de las expresiones algebraicas | Aspectos relevantes | Aspectos a mejorar |
| :---: | :---: | :---: | :---: |
| Aplica el modelo geométrico de Descartes en la solución de ecuaciones de segundo grado. |  | Los estudiantes trazaron con regla y compás la construcción. En su mayoría contestan que la medida de $\times$ es 4 cm . También se le preguntó sobre la medida del segmento NM, sobre la recta, externo al diámetro (4-3=1). EI trabajo los ha motivado a encontrar valores en una construcción, de acuerdo con ciertos principios. | Que el estudiante no sólo se base en la medida sino en las relaciones métricas dadas en el principio que los sustenta, $\left(x^{2}+3 x=4\right)$. |
| Identifica relaciones métricas en un triángulo rectángulo desde el enfoque visualgeométrico del álgebra. | 1. Visualiza las figuras (taller 10). | Sólo el $36 \%$ de los estudiantes alcanzó deducir el teorema con ayuda del modelo geométrico: $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ el resto manipuló las piezas construidas en cartón y expresando las áreas respectivas. | Enfatizar en el análisis sobre los objetos geométricos sobre los resultados. |
| Identifica algunas ecuaciones típicas de segundo grado conforme al álgebra geométrica de los griegos. | Taller 11. Expresiones $a x \pm x^{2}=b^{?}$ | En este parte de análisis y discusión el modelo con adición fue más asimilable por parte de los estudiantes. Las dificultades surgían cuando en el modelo con términos con el signo ( - ), debía construirse un cuadrado con tres figuras (1 cuadrad y rectangulares) <br> Entender que en sentido numérico las tres áreas debían corresponderse con el área de un cuadrado de lado b., que no veían en la figura. Los más interesante fue el tiempo gastado en la manipulación de las figuras para cada modelo. <br> La comprensión fluye cuando se compagina cada figura, con sus respectiva expresión algebraica. Esto favoreció construir sentido alrededor de las expresiones trabajadas. $\qquad$ | La mediación del orientador no se debe descuidar. Hay estar atento a cada detalle...cada inquietud, dificultad surgidas. |


| Aplicar el modelo geométrico del álgebra griega en la solución de ecuaciones de segundo grado. | $\begin{array}{lr} \text { Taller 11. Álgebra } \\ \text { griega. } & \text { Forma } \\ x^{2}+12 x=64 \end{array}$ | El $60 \%$ de los estudiantes logró satisfactoriamente aplicar el método. El resto se confundió al reemplazarla suma de las áreas por ba |  |
| :---: | :---: | :---: | :---: |
|  | $\begin{aligned} & \text { Taller 11. Álgebra } \\ & \text { griega. } \\ & -x^{2}+8 x=64 . \end{aligned}$ |  | Estimular  <br> permanentemente la <br> formulación de <br> preguntas como <br> estrategia de <br> enseñanza.  |

Tabla 6. Fase de algunos métodos de resolución de la cuadrática.

Resultados Fase Ecuación cuadrática general. Esta contiene el desarrollo individual y grupal del taller 12. Este taller describe el método del álgebra hindú, de completar cuadrados que ya los estudiantes lo afianzaron con buenos resultados. Debido al temor y esquivo de los números negativos, se presenta la forma $a x^{2}+b x=c$, con apoyo visual-geométrico.

En su mayoría, los estudiantes cuando se enfrentan a sendas expresiones simbólicas, consideran que es muy dificil o avanzado para ellos. Sólo una minoría, los que poseen las expectativas tendenciosas hacia las matemáticas, son capaces de adelantarse y brindar espontáneamente sus inferencias a partir de la visualización de las figuras.

Las inquietudes surgieron cuando:

- Habiase que multiplicar la ecuación por el término a.
- Hallar el tercer término (b/2 $)^{2}$.
- Extraer raíces.
- Transponer términos.
- Despejar la incógnita.

Estas se constituyen en obstáculos que detienen o hacen lento el proceso pedagógico. El 70\% de los estudiantes no recordaba cómo operar la incógnita, a pesar de haber visto ecuaciones sencillas en grados anteriores.

La tabla 7 explica el resultado de la actividad:

| Indicador de logro | Expresión | Aspectos relevantes |
| :---: | :---: | :---: |
| Aplica el método hindú en la resolución de ecuaciones cuadráticas . | $x^{2}+7 x-60=0$ | Los estudiantes siguen el mismo proceso sugerido. Como el coeficiente de a es 1 , dicen que la ecuación queda igual por la propiedad modulativa del producto. Trasponen el término -60 al miembro derecho. Algunos toman números decimales (3.5) como tercer término; otros prefirieron ( $7 / 2)^{2}$. Al adicionar 60+ 49/4, utilizaron calculadora completa; otros pasaron a decimal.. Extraen numéricamente la raíz (calculadora) y le restan el decimal 7/2. La solución fue correcta. <br> Sólo un 20\% tomó la ecuación y fue evaluando cada letra. La parte numérica la hallaron con calculadora. <br> Se les pidió elaborar el referente geométrico: casi un $50 \%$ lo hizo, los demás prefirieron la notación simbólica. El esquema fue: $60+(7 / 2)^{2}$ <br> La mayoría (90\%) presentó solución a la ecuación (positiva). |

Tabla 7. Fase Ecuación Cuadrática.

## 6. CONCLUSIONES

Como conclusiones del trabajo realizado podemos señalar las siguientes:

- El poner en contacto al estudiante con situaciones que pueden ser tratadas a través de procedimientos geométricos antes tematizados, posibilita que la ecuación cuadrática surja de manera natural y adquiera sentido para los estudiantes, y no se convierta en una receta que toca aprender sin poder asociarla con algún fenómeno relacionado con la vida del estudiante.
- Nos permitió descubrir la creatividad, poder y dificultades de las civilizaciones para resolver ecuaciones, particularmente las de segundo grado, así como las limitaciones de los sistemas numéricos por ellos utilizados y que los obligó al uso de modelos geométricos.
- Pudimos otorgar sentido a algunas expresiones muy usadas por los docentes al hacer trabajo en álgebra escolar, muy comunes a civilizaciones pasadas, como por ejemplo: " completar cuadrados", " esta solución no tiene sentido".
- Nos permitió revalorar la importancia del álgebra geométrica para el trabajo en álgebra escolar por contribuir a la construcción de sentido a muchas expresiones que antes para los alumnos eran consideradas simples combinaciones de letras y números.
- El uso de modelos geométrico de áreas, despertó muchas inquietudes en los estudiantes de octavo grado, les facilitó descubrir relaciones de dimensionalidad y congruencia de áreas que coadyuvaron a otorgarle sentido y significado a la resolución de ecuaciones de segundo grado al brindárseles la oportunidad de representar las expresiones algebraicas mediante áreas.
- La aplicación de las actividades de factorización con áreas fue muy rica porque los estudiantes al elabora las piezas de los rompecabezas y al manipularlas, producian preguntas e inferencias, que les permitió cambiar su concepción de ver dichas expresiones como simples combinaciones de letras y números
- La utilización de materiales como cartulinas de colores, colbón y tijeras con la cual se elaboraron las piezas del rompecabezas, facilitó al alumno representar las expresiones algebraicas, mediante áreas, permitiéndoles obtener claridad con respecto a la representación de cada término de la expresión.
- La utilización de actividades creativas basadas en los modelos geométricos contribuyen a reducir el nivel mecánico con que se trata a menudo la enseñanza de las ecuaciones de segundo grado y a brindar nuevas opciones para su enseñanza.
- Se ha contribuido en este tiempo, a potencializar el pensamiento numérico y variacional, en especial, permitir que los estudiantes lograsen ver en las letras diferentes caras: números específicos (ecuaciones cuadráticas), como números generalizados (polinomios de segundo grado) o como abstracción de las dimensiones de las áreas.
- Podemos considerar que las diferentes actividades creativas contribuyeron a que los estudiantes de la escuela normal superior de Corozal adquirieran un aprendizaje significativo de la ecuación cuadrática y le otorgaran sentido a dicha expresión algebraica.


## 7. RECOMENDACIONES

Para el desarrollo y puesta en practica de propuestas similares a éstas hacemos las siguientes recomendaciones:

- Incursionar en la historia de las matemáticas, fuente inagotable de ideas y estrategias didácticas para intentar mediaciones acordes con los estados cognitivos de los alumnos y sus limitaciones conceptuales, que posibiliten sus propias construcciones intelectuales.
- Promover la utilización de modelos geométricos debido a que es una herramienta útil en la enseñanza - aprendizaje de ecuaciones de segundo grado.
- Compaginar el tratamiento geométrico con el algebraico o simbólico. Basarse en lo geométrico para llegar a lo simbólico. Esto permite mayor grado de comprensión y aceptación que una simbología abstracta y aversiva.
- El empleo de área debe iniciarse desde el mismo momento en que aparezcan las letras en la enseñanza del álgebra, de modo que los estudiantes se familiaricen en la relación existente entre letra y área.
- El docente y los estudiante utilicen materiales didácticos elaborados por ellos mismo que faciliten el proceso de enseñanza, la manipulación y la visualización para el aprendizaje significativo de las expresiones algebraicas.
- Diseñar actividades fundamentadas en los modelos geométricos utilizando software educativos diseñados para la geometría activa, como Cabri Geometre, debido a que favorece a potencializar el pensamiento variacional.


## BIBLIOGRAFÍA

ACEVEDO, Myrian y FALK, Mari. Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santafé de Bogotá: Uninacional, 1997.

BENAVIDES BELL, Edel y CANCHILA JARABA Omar. Algunas expresiones algebraicas tratadas mediante resolución de problemas y el uso de figuras geométricas. Sincelejo: Unisucre, 2000.

BOYER, Carl. Historia de la Matemática.
COLOMBIA, MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares: Matemática. Santafé de Bogotá: Magisterio, 1998.

DEL OLMO, M. A., MORENO, M. F. y GIL, F. Superficie y volumen. Sevilla: editorial Síntesis, No. 19, 1993.

Enseñanza de las ciencias. Sevilla España: Vol. 11(2), 1993.
Escuela Normal Superior de Corozal. Incidencia de las metodologías en el proceso de aprendizaje de las ciencias. Corozal: Núcleo de ciencia y Tecnología, 2001.

Estudio de investigaciones en el aula. Postgrado en educación matemática, Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Sincelejo: Unisucre, 1998.

Estudio sobre el comportamiento visual en Álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16. En: Revista Enseñanza de las Ciencias.

Jan de Lange, Mathematics insight and meaning, p. 43. En: Lineamientos curriculares de matemáticas.

JIMENEZ VÉLEZ, Carlos Alberto. Cerebro Creativo y Lúdico. Hacia la construcción de una nueva didáctica para el siglo XXI. Santafé de Bogotá: Magisterio, 2000,

MEN. Análisis y Resultados de las pruebas de matemáticas. TIMSS, Colombia, 1997.

MEN. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santafé de Bogotá: Magisterio, 1998, p. 56.

OTERO MARTINEZ Liceth y MARTINEZ M. Emerson. Trabajo pre.algebraico con estudiantes de séptimo grado. Sincelejo: Unisucre, 2001.

PRIESTLEY, Mauren. Técnicas y estrategias del pensamiento crítico: salón pensante, grupos cooperativos; aprendizaje creativo, guía de motivación; para profesores y padres. México: Trillas, 1996.

SOCAS, M. y otros. Iniciación al álgebra. Sevilla: Editorial Síntesis, 1996.
Teorias de las múltiples Inteligencias. En: ORTIZ DE MASCHWITZ, M. Inteligencias Múltiples en la educación de la persona. Santafé de Bogotá: Magisterio.

UNAD COLOMBIA. Teoría del Error Aplicada al aprendizaje Autónomo. Santafé de Bogotá: Cread Sincelejo, 1999.

## ANEXOS


[^0]:    ${ }^{1}$ BOYER, Carl. Historia de las Matemáticas. Alianza Universidad. Madrid. 1986. Pag 298.

[^1]:    ${ }^{2}$ MEN. Analisis y Resultados de las pruebas de matemáticas. TIMSS, Colombia, 1997, p. 82-84.

[^2]:    ${ }^{3}$ Ibid., p. 93-97.

[^3]:    ${ }^{4}$ MONROY, María (2001); Jaime Vásquez Franco (2002). Jefes de Núcleo de C \& T. de la E.N.S.C.

[^4]:    ${ }^{5}$ Fundamentalmente la abstracción y la generalización

[^5]:    ${ }^{6}$ ZULUAGA, Carlos. La Matemática Babilónica: Taller. Centro Educativo integral Colsubsidio. Bogotá, 1991

[^6]:    ${ }^{7}$ Ibid pag
    ${ }^{8}$ Ibid, pag

[^7]:    ${ }^{9}$ ACEVEDO, Myrian y FALK, Mari. Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santafé de Bogotá: Uninacional, 1997. p. 51.

[^8]:    ${ }^{10}$ Enseñanza de las Ciencias, 11 (2), 1993, p. 162.

[^9]:    ${ }^{11}$ lbid.,., p. 53-57.

[^10]:    ${ }^{12}$ BOYER, Carl. Historia de la matemática, Madrid: Alianza editorial, 2001 p. 428

[^11]:    ${ }^{13}$ Ibid. Pag. 34

[^12]:    ${ }_{15}$ Enseñanza de las ciencias 11 (2, 1993, p. 160-161.

[^13]:    ${ }^{16}$ Estudio de investigaciones en el aula. Postgrado en educación matemática, Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Sincelejo: Unisucre, 1998, p. 21-23.
    ${ }_{17}$ Estudio sobre el comportamiento visual en Álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16. En: Revista Enseñanza de las ciencias, vol. 11(2), 1993.

[^14]:    ${ }^{18}$ BENAVIDES BELL, Edel y CANCHILA JARABA Omar. Algunas expresiones algebraicas tratadas mediante

[^15]:    resolución de problemas y el uso de figuras geométricas. Sincelejo: Unisucre, 2000, p. 90.

[^16]:    ${ }^{19}$ MORENO ARMELLA, Luis. Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas. CINVESTAD. Méjico. 1998. pag 11.
    ${ }^{20}$ POZO, Juan. Teorías cognitivas del aprendizaje. Morata. Madrid. 1999. Pag 28.

[^17]:    ${ }^{21}$ COLOMBIA, MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares: Matemática. Santafé de Bogotá: Magisterio, 1998. p. 41.

[^18]:    ${ }_{22}$ Enseñanza de las ciencias. Sevilla España: Vol. 11(2), 1993.7

[^19]:    ${ }^{23}$ Teorías de las múltiples Inteligencias. En: ORTIZ DE MASCHWITZ, M. Interligencias múltiples en la educación de la persona. Santafé de Bogotá: Magisterio.

[^20]:    ${ }^{24}$ Ibíd., p. 68.
    ${ }^{25}$ MEN. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santafé de Bogotá: Magisterio, 1998, p. 56.

[^21]:    ${ }^{26}$ Ibid., p. 97-98.

[^22]:    ${ }^{27}$ PRIESTLEY, Mauren. Técnicas y estrategias del pensamiento crítico: salón pensante, grupos cooperativos; aprendizaje creativo, guía de motivación; para profesores y padres. México:Trillas, 1996, p. 174.
    ${ }^{28}$ UNAD COLOMBIA. Teoría del Error Aplicada al aprendizaje Autónomo. Santafé de Bogotá: Cread Sincelejo, 1999., p. 44.

[^23]:    ${ }^{29}$ Jan de Lange, Mathematics insight and meaning, p. 43. En: Lineamientos curriculares de matemáticas.

[^24]:    ${ }^{31}$ DEL OLMO, M. A., MORENO, M. F. y GIL, F. Superficie y volumen. Sevilla: editorial Síntesis, No. 19, 1993, p. 43 .

