SEGMENTO AUREO

PATRICIA ENITH PEDROZA

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA

SINCELEJO

2003

SEGMENTO AUREO

PATRICIA ENITH PEDROZA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de licenciado en matemáticas

ASESOR
EDUARDO ALFONSO CHAUCANES JACOME

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA

SINCELEJO
2003

Sincelejo, 2003

____

____

____
Nota de Aceptación

____
Director del Trabajo

____
Jurado

____
Jurado

____
Jurado

Sincelejo, 2003

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos.

A todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron en la realización de este trabajo.

A Alfonso Acevedo Rocha, profesor de investigación de la Universidad de Sucre y asesor pedagógico del trabajo.

A Eduardo Alfonso Chavcanes Jacome, profesor de la Universidad de Sucre y Director del Trabajo.

A los licenciados y especialistas: Marcos Betín, Jairo Escorcia y Justino Barraza, jurados del trabajo.

A los alumnos del Grado Noveno de la Institución Educativa de Buenavista.

A la Universidad de Sucre.

DEDICATORIA

A Dios por darme sabiduría y fuerza de voluntad.

A mis padres y hermanas quienes con sus esfuerzos me brindaron todo su apoyo.

A personas especiales como:
Mi hijo Luis Eduardo Moreno Pedroza
Mi sobrina Ana Marcela Mayoriano y Mi esposo Frank Moreno Alvarez.

CONTENIDO

A ti, maravillosa disciplina, media, extrema razón de la hermosura que claramente acota la clausura viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina, áurea sección, celeste cuadratura, misteriosa fontana de mesura que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares, flor de las cinco formas regulares, dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente. Tu canto es una esfera transparente.

A ti, divina proporción de oro.

Rafael Albertini.

INTRODUCCIÓN

Proporción armónica, proporción divina o número de oro es un tema del cual se dice que se ha desplegado mucha literatura, pero desafortunadamente en nuestro medio es escasa.

El tema se centra en el estudio y conocimiento del concepto de media y extrema razón, tópico que los griegos emplearon en toda su magnitud para elaborar deducciones y construcciones bellísimas ya sea de rectángulos, polígonos, conjuntamente con el teorema de gnomon se establecen resultados, en primera instancia geométricos como el denominado teorema de Pitágoras.

La proporción armónica, lo hace sublime en cuanto se presenta en la naturaleza (concha de un caracol, estrella de mar, cuernos del carnero, escamas de la piña,…). Y en algunas esculturas de la antigua Grecia como el Partenón de Atenas, la Monaliza de Leonardo Da Vinci y muchas otras obras arquitectónicas fueron diseñadas de tal manera que sus dimensiones están dadas en dimensión áurea.

Para el desarrollo del trabajo se dividió en cuatro capítulos: El capítulo I consta de conceptos y nociones preliminares que permiten orientar al lector en definiciones que se utilizan en el desarrollo del texto; el capítulo II trata del estudio del tema con una mirada en el aspecto histórico, más propiamente lo realizado por los griegos, que permite realizar construcciones como las del pentágono estrellado y polígonos regulares; el capítulo III que consta de los relevantes del tema, las denominadas aplicaciones en el campo de la naturaleza, el arte, etc, y el capítulo IV desarrollo del trabajo de campo mediante talleres en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa de Buenavista.

OBJETIVOS

GENERALES:

- Hacer una revisión bibliográfica del segmento áureo, con el fin de retomar elementos matemáticos y/o geométricos que se plasmaron en la vida del hombre por medio de cuadros artísticos, arquitecturas, etc, de tal manera que se pueda apreciar el aprendizaje de las matemáticas en sentido histórico y cotidiano.

- Plantear actividades que permitan la aplicación del número de oro, a partir de segmentos, polígonos regulares y el cuerpo humano.

ESPECÍFICOS:

- Estudiar el segmento áureo de tal manera que se pueda establecer relaciones entre segmentos, polígonos regulares y el cuerpo humano.

- Analizar la forma cómo los estudiantes al realizar los talleres utilizan, relacionan conceptos y usan terminología de conceptos matemáticos.

- Describir distintas formas de representación y utilización de materiales didácticos acordes con el tema.

JUSTIFICACIÓN

Es de suma importancia que el profesor de matemáticas haga el estudio de temas puntuales, con visión histórica y con aplicación en lo cotidiano a fin de que la transposición didáctica sea fiel al concepto y a su vez sirva de elemento motivante en temas a fines.

Lo expuesto anteriormente justifica el estudio del segmento áureo, toda vez que traza una pedagogía de aprendizaje y sirve para enriquecer la formación didáctica que necesita todo docente de matemáticas, de tal manera que el alumno no sienta el aprendizaje de las matemáticas como algo escueto, aislado antes por el contrario las matemáticas son herramientas de mucha utilidad ya que a diario nuestra naturaleza nos brinda elementos con aplicación a las matemáticas.

Además esto nos permite resaltar la importancia que tiene la integración, que tienen los campos numéricos, geométricos y algebraicos al trabajar el número de oro, también se acude a la historia del segmento áureo como fuente didáctica.

CAPITULO I

1. CONCEPTOS Y NOCIONES PRELIMINARES

Comprende un conjunto de elementos convenientes que requieren los desarrollos de los capítulos posteriores, con el fin de ubicar o nivelar al lector con los conceptos y definiciones propias del tema en estudio.

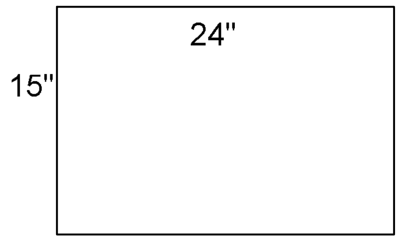
1.1. RAZON.

Según el concepto griego, una razón es un cociente de medidas de cantidades semejantes. Actualmente una razón es una fracción; y todas las reglas que gobiernan una fracción se acotan a las razones. Una razón se denota con una raya de fracción (—), una diagonal (/), el signo de división (÷) o con el símbolo (:), que se lee "es a". Por lo tanto la razón de 3 a 4 se representa por $\frac{3}{4}$, 3/4, 3 ÷ 4 o bien 3:4; el 3 y el 4 se llaman términos de la razón o también numerador y denominador en su orden[1]

---

[1] HEMERLING, Edwin m. Geometría Elemental. California 1964. Página 272.

Una razón se convierte en un número abstracto que no depende de las unidades de medición de las cuales proviene. Por ejemplo, en el rectángulo de la figura



la razón de ancho al largo es 15 a 24 o bien 5 : 8. Esto nos significa 5/8 de pulgada. Si las dimensiones de la figura fueran 15x24 metros ó 15x24 kilómetros, la razón del ancho al largo todavía sería 5 : 8. Éste 5 : 8 también puede expresar la relación de ganancias, porcentajes o pesos etc.

1.2. PROPORCION

Una proporción es una expresión de la igualdad de razones, por ejemplo sí a : b y c:d son iguales, entonces la expresión **a:b = c:d** es una proporción.

En la proporción se dice que a es el primer término, b es el segundo, c es el tercero y d es el cuarto. Frecuentemente se dice que el primero y el cuarto término de una proporción son los extremos y que el segundo y el tercero son los medios.

Debe observarse que se necesitan cuatro términos para formar una proporción y que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, denominándose a e este hecho **propiedad fundamental de las proporciones.**[2]

1.3. CUARTA PROPORCIONAL

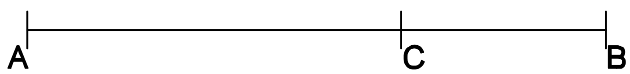
La cuarta proporcional de tres cantidades es el cuarto término de la proporción, así: en la proporción **a:b = c:d,** d es la cuarta proporcional para a, b y c.

Cuando el segundo y el tercer término de una proporción son iguales se tiene que cualquiera de los dos es la media proporcional entre el primero y el cuarto término. Así, sí x : y = y : z, y es la media proporcional entre x y z.

Si tres o más razones son iguales, se dice que forman una serie de razones iguales. Por tanto $\frac{a}{b}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ es una serie de razones iguales y también puede escribirse en la forma a:b:c = x:y:z.[3]

1.4. PROPORCION AUREA

Sea un segmento $\overline{AB}$ y un punto C de éste, tal que $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$, ésta se denomina **proporción áurea.**



[2] HEMERLING, Edwin m. Geometría Elemental. California 1964. Página 274.

Obsérvese que la sección áurea del segmento $\overline{AB}$ es el segmento $\overline{AC}$, tal que $\overline{AC}$ es media proporcional entre $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$.

Para calcular la longitud áurea de un segmento $\overline{AB}$ de longitud unitaria, hay que encontrar un punto C tal que el segmento $\overline{AC}$ sea media proporcional entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, esto es:

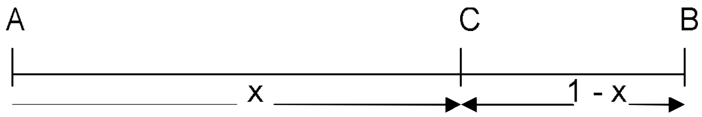
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad *$$

Efectivamente sea x la longitud del segmento $\overline{AC}$. Como el segmento $\overline{AB}$ es unitario su longitud es 1. Así que la longitud del segmento $\overline{CB}$ es igual a

$$\overline{AB} - x = 1 - x.$$

Remplazando en * se tiene:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$



Por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que 1(1 - x) = (x)(x), de donde se obtiene la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$ cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Descartando la raíz negativa, el segmento $\overline{AC}$ mide $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Este es el llamado número áureo o número de oro, representado por el símbolo Φ cuyo valor es

[3] HEMERLING, Edwin m. Geometría Elemental. California 1964. Página 275.

1.61803, aproximadamente obtenido por los griegos cuando encontraron las relaciones entre la diagonal de un pentágono y su lado. El número de oro se debe a Leonardo Da Vinci.[4]

1.5. FORMAS DE DIVIDIR UN SEGMENTO EN PROPORCION AUREA

A continuación presentamos algunas formas de dividir un segmento en proporción áurea:

- Consideremos el segmento de recta $\overline{AB}$ de la figura 1.5.a. Tracemos una perpendicular al segmento y que pase por B, sobre esta perpendicular ubiquemos el punto D, tal que BD = AB/2 y luego tracemos el segmento AD. Con centro en D y radio DB tracemos un arco de circunferencia que corte a AD en E. Ahora, con centro en A y radio AE, tracemos otro arco de circunferencia que corte a AB en C. El punto C así construido es el punto buscado, es decir,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

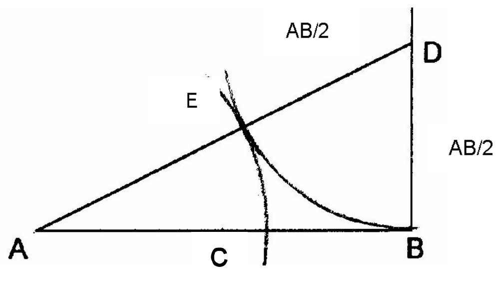


Fig. 1.5.a

- Otra forma de determinar segmentos en proporción áurea:

Construya un cuadrado ABCD. Halle el punto medio (X) del lado DC. Usando como centro a X y radio XB, dibuje un arco que intersecte a la prolongación de DC en F. El punto C del segmento DF divide a éste en proporción áurea. Es decir:

$$\frac{DF}{DC} = \frac{DC}{CF}$$

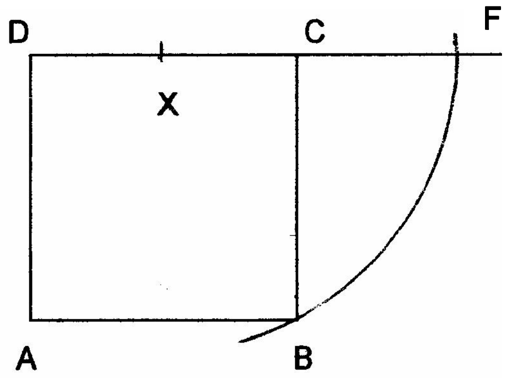
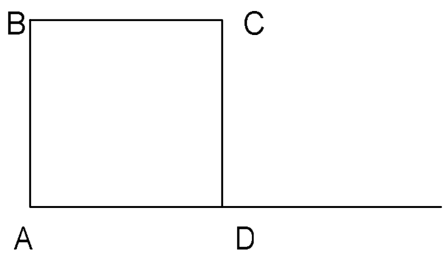


Fig. 1.5.b.

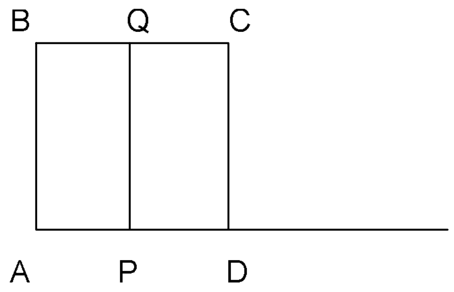
1.6. RECTANGULO AUREO

Un rectángulo áureo es un rectángulo armonioso en sus dimensiones, es decir sus lados están en razón áurea. Para construirlo se procede de la siguiente manera:

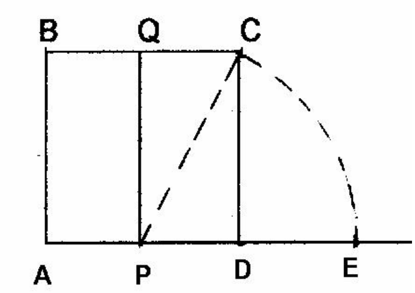
1. Tomamos el cuadrado ABCD y prolongamos su lado AD



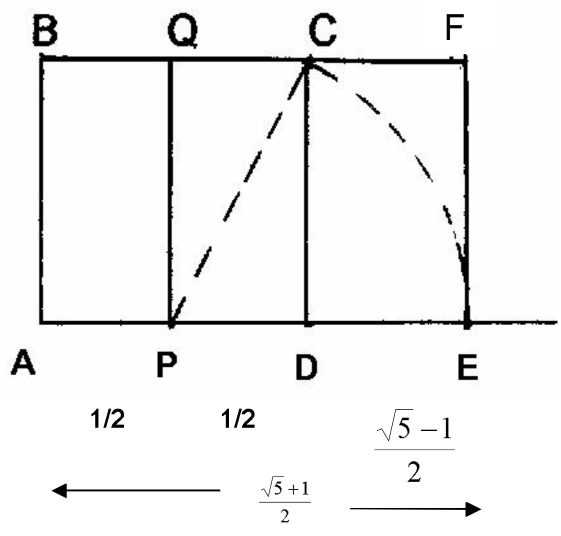
2. Dividimos, con el segmento $\overline{PQ}$ el cuadrado en dos rectángulos iguales.



3. Con ayuda del compás y haciendo centro en P, trasladamos la diagonal PC, sobre la prolongación AD, marcamos el punto E



4. El rectángulo buscado es el de base AE y altura AB, el cual es llamado rectángulo áureo.



Veamos que el rectángulo cumple con la proporción deseada.

Como PC es diagonal del rectángulo PQCD, se tiene que, por teorema de Pitágoras $PC^2 = PD^2 + CD^2$. Por construcción PC = PE y PE = AE - 1/2AD; por lo tanto PC = AE - 1/2AD. También por construcción PD = 1/2AD y CD = AD por ser los lados de un cuadrado.

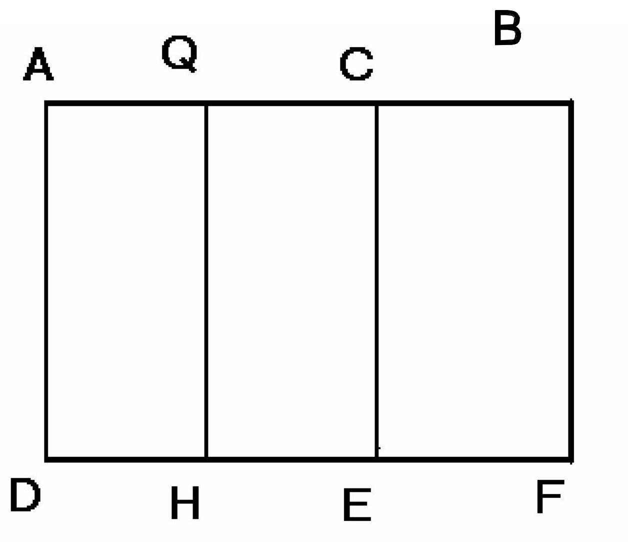
Remplazando PD, AD y CD por sus equivalentes se obtiene la igualdad: $\left(AE - \frac{1}{2}AD\right)^2 = \left(\frac{1}{2}AD\right)^2 + AD^2$. Desarrollando el cuadrado se obtiene:

$AE^2 - (AE \bullet AD) + \frac{1}{4}AD^2 = \frac{1}{4}AD^2 + AD^2$. Reduciendo términos semejantes queda:

$AE^2 - (AE \bullet AD) = AD^2$. Al factorizar resulta que $AE(AE - AD) = AD^2$; pero como AE - AD = DE, entonces al escribir los medios y los extremos de la proporción se llega a que $DE = \frac{AD^2}{AE}; \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{AE}$. Por lo tanto el lado del cuadrado es media proporcional entre el largo del rectángulo y su longitud excedente respecto al lado del cuadrado.

La proporción $\frac{DF}{DE} = \frac{DE}{EF}$ se llama **proporción áurea,** la longitud EF corresponde al **número áureo.**

EL NUMERO AUREO



Llamemos P a la distancia EF y supongamos que el cuadrado ADEC tiene lado 1.

Entonces DF = 1 + P. Así la proporción áurea $\frac{DF}{DE}=\frac{DE}{EF}$ será $\frac{1+P}{1}=\frac{1}{P}$, de

donde se obtiene $P+p^2=1$, entonces $P+p^2-1=0$. Al solucionar la ecuación

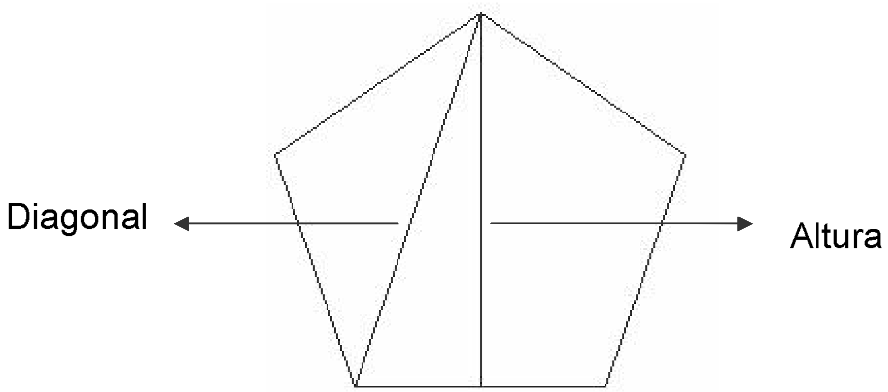
resulta $P=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, o sea P = 0.6180399... que es el número áureo[4]

1.7. ELEMENTOS BASICOS QUE INTEGRAN UN PENTAGONO

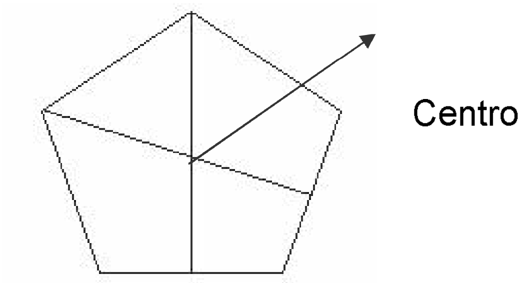
1.7.1. Diagonal del pentágono: Es el segmento rectilíneo que une un vértice con cualquiera de los extremos del lado opuesto.

[4] ARDILA, Victor Hernando, Matemáticas Educación Básica Secundaria. Santefe de Bogotá D.C. Colombia 1998. Editorial Voluntad. Página 19

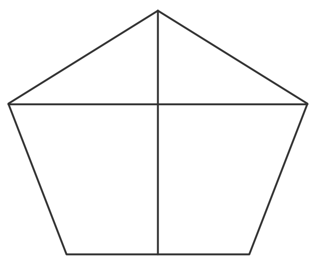
1.7.2. Altura de un pentágono: Es la unión rectilínea entre un vértice y el punto medio del lado opuesto. Corresponde también a la mediatriz del mismo lado.



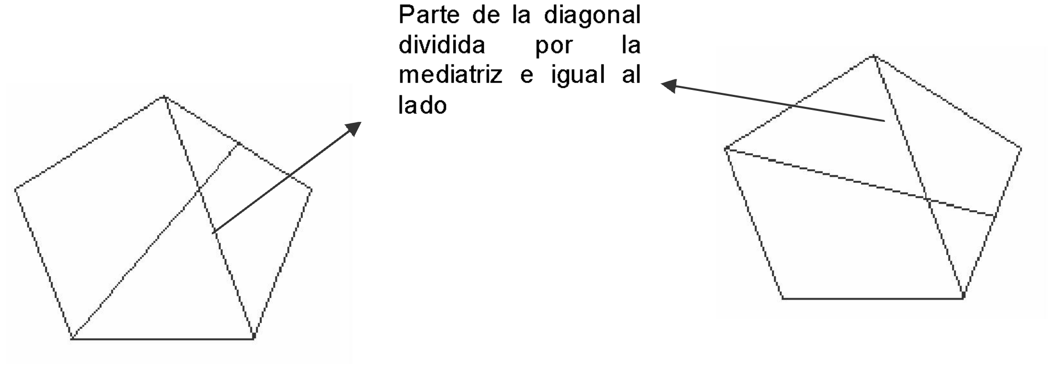
La intersección de dos mediatrices nos permite conocer el punto centro del polígono



En un pentágono regular siempre existe una diagonal paralela a uno de los lados y una mediatriz perpendicular a ambos elementos.

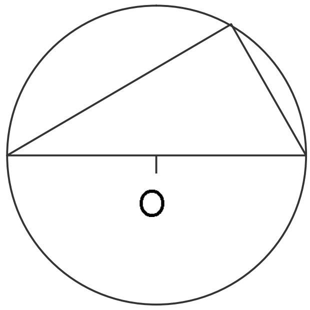


Para cada diagonal existen dos mediatrices que dividen a dicha diagonal en dos partes desiguales, siendo la parte mayor de esta división, igual en magnitud al lado del pentágono



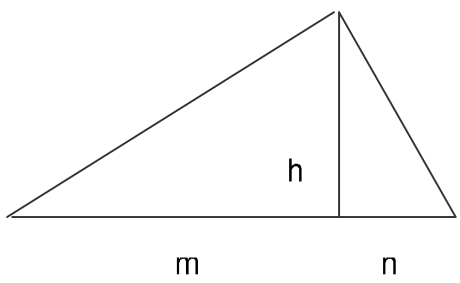
1.7.3. Media proporcional:

Si un triángulo se inscribe en una circunferencia, pero uno de sus lados se hace pasar por el centro de dicha circunferencia, el triángulo resultante deberá ser rectángulo, teniendo por hipotenusa al lado que pasa por el centro, y por lo tanto, el vértice opuesto contenido en la circunferencia, ha de ser el punto de concurrencia de los catetos.



En todo triángulo, la altura h, bajada perpendicularmente a la hipotenusa desde el vértice opuesto a ella, guarda una relación de proporción con los segmentos m y n que el pie de la perpendicular produce en la misma hipotenusa. Tal relación puede expresarse de la siguiente manera: $\frac{m}{n} = \frac{h}{n}$ *

En la igualdad * se puede comprender entonces el sentido de la expresión "Media proporcional". Por lo tanto se denomina segmento MEDIO PROPORCIONAL entre dos segmentos dados, que relaciona a los otros dos de acuerdo a la proporción establecida en la expresión *

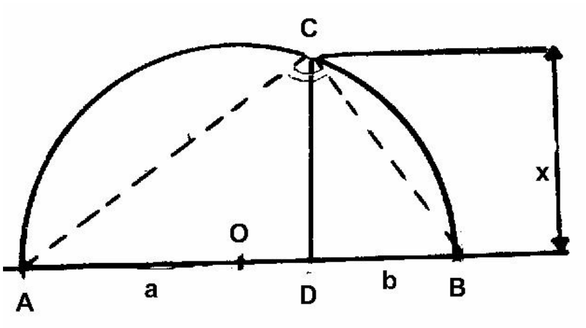


Ejemplo: Sean los segmentos conocidos, de magnitud a y b; obtener el segmento medio proporcional x.

Datos:

Solución: Sobre una recta indefinida R, llévese a cabo la suma gráfica de los segmentos dados, con lo que se tendrán los puntos A, D y B. Obténgase el punto medio O del segmento total AB; punto que deberá considerarse como centro de una semicircunferencia cuyos límites han de considerarse como los extremos de la suma; de donde resulta que el segmento total corresponde al diámetro de la circunferencia. Por el punto de transición D entre los segmentos adicionales, levántese una recta perpendicular a R hasta su encuentro C con el arco de circunferencia descrito.

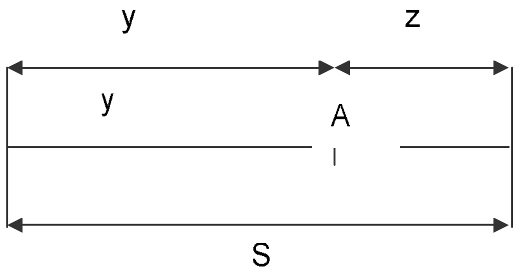
El segmento CD obtenido, de magnitud x, es medio proporcional con respecto a las magnitudes conocidas a y b, en efecto se puede establecer a/x = x/b . Si se unen rectilíneamente los extremos A y B del diámetro con el punto C de la circunferencia, se obtiene un triángulo rectángulo de catetos AC y BC, siendo la hipotenusa el segmento AB. En este triángulo se cumple la expresión a/x = x/b que es semejante a la expresión m/n = h/n



1.7.4. MEDIA Y EXTREMA RAZON

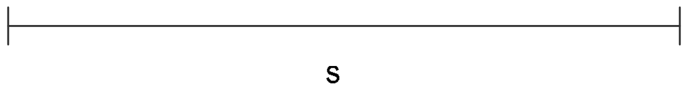
Siempre que un segmento rectilíneo sea dividido en dos partes desiguales, de modo que la mayor de las partes corresponda al segmento medio proporcional entre la magnitud total y la parte menor, se dice que tal segmento ha quedado dividido en MEDIA Y EXTREMA RAZON.

s/y = y/z, la cantidad y es media proporcional en s y z.



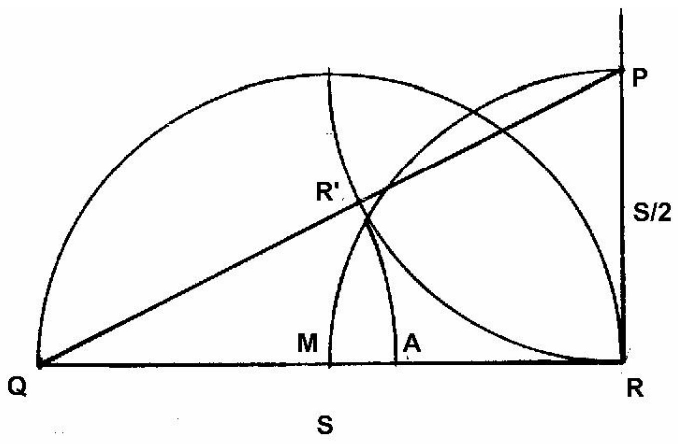
Al punto de transición A entre los segmentos **y** y **z,** se le conoce como **sección áurea** del segmento S.

Ejemplo: Obtener la sección media y extrema razón de un segmento dado de magnitud S



Solución: Demos los nombres Q y R a los extremos del segmento, y por el punto R levantemos una recta perpendicular a QR sobre la cual deberá medirse la magnitud S/2, con lo que se define el punto P y el ángulo recto QRP. Unamos los puntos Q y P mediante una línea recta para conocer la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR cuyos catetos tienen por magnitudes las cantidades S y S/2. Con centro en P y abertura de compás igual a PR, descríbase un arco hasta encontrar la hipotenusa en R. Trazar finalmente el arco RA con centro en Q y radio QR; siendo el punto A, contenido en el segmento propuesto, el que divide en media y extrema razón a dicha magnitud.[5]

[5] CAMBEROS, Alberto. Dibujo Lineal Geométrico. México 1975. Ed. Porrúa S.A. Pág 320 - 325.



1.8. ELEMENTOS BASICOS QUE INTEGRAN UN HEPTAGONO REGULAR

1.8.1. **Mediatríz**: Es la perpendicular levantada desde el punto medio de uno de los lados hasta el vértice opuesto.

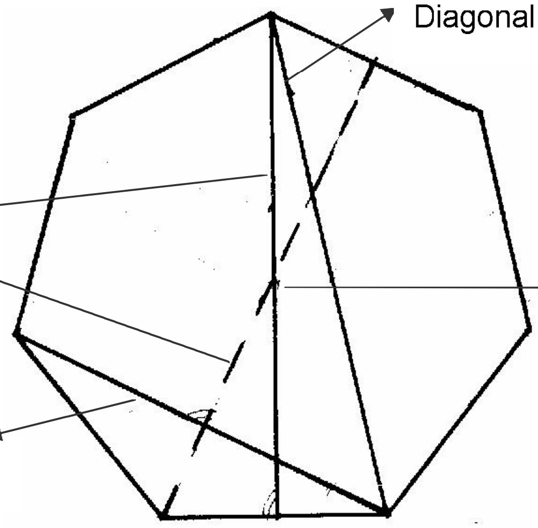
1.8.2. **Diagonal mayor**: Es la línea recta trazada desde un vértice hasta otro, que corresponde a uno de los extremos del lado opuesto al primer vértice.

1.8.3. **Diagonal menor**: Es la recta que une dos vértices, siendo ambos los extremos de dos lados adyacentes.

1.8.4. **Centro del heptágono**: Es el punto de intersección entre dos mediatrices.

- ❖ Cualquier diagonal siempre es paralela a uno de sus lados.
- ❖ Cualquier diagonal deberá resultar perpendicular a una de las mediatrices.[6]

[6] CAMBEROS, Alberto. Dibujo Lineal Geométrico. México 1975. Ed. Porrúa S.A



1.9. ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS DEL ENEÁGONO REGULAR

El eneágono regular es un polígono de nueve lados iguales, de tal manera que cada vértice queda contenido en la mediatriz del lado opuesto al vértice considerado.

1.9.1. **Mediatriz:** Es la perpendicular levantada por el punto medio de un lado.

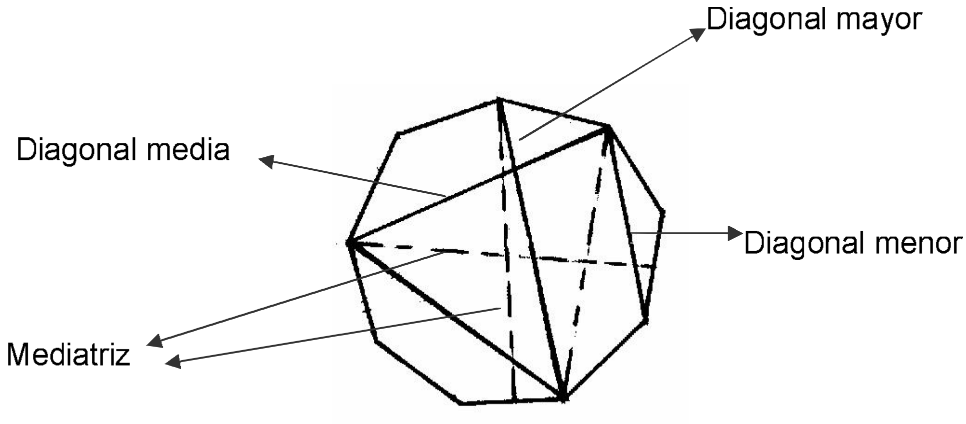
1.9.2. **Diagonal mayor:** Es la recta que une el extremo de un lado con el vértice opuesto al mismo lado.

1.9.3. **Diagonal media:** Es la recta que corresponde al lado del triángulo equilátero que resulta inscrito al polígono.

1.9.4. **Diagonal menor:** Es la recta que une los extremos opuestos de dos lados adyacentes.[7]

---

[7] CAMBEROS, Alberto. Dibujo Lineal Geométrico. México 1975. Ed. Porrúa. Página 329


Diagonal mayor
Diagonal media
Diagonal menor
Mediatriz

CAPITULO II

2. TEOREMAS, PROPOSICIONES Y CONSTRUCCIONES

Es el desarrollo del tema en estudio, que bien puede decirse es el corazón del trabajo. Para abordarlo se da una mirada a la historia, en lo referente a lo realizado por los griegos (teorema de Gnomon, de Pitágoras y demás proposiciones). Para que desde el punto de vista geométrico sirva de ayuda en la realización de las construcciones que actualmente se hacen. Al finalizar el capítulo y a manera de resumen, se elaboran las construcciones de los polígonos, desde el cuadrado hasta el decágono.

2.1. Teorema de Gnomon.

Un gnomon es una figura que se ha agregado a otra de tal manera que la figura completa es semejante a la figura más pequeña.

Ejemplo

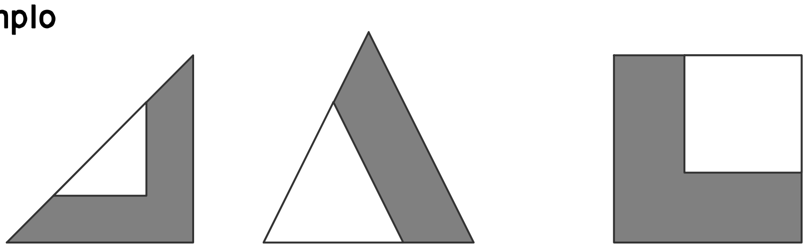


Figura 1.

En la figura 1, las regiones sombreadas son gnómones para el triángulo rectángulo, el triángulo isósceles y el cuadrado.

Como al agregar un gnomon a una figura se obtiene otra figura semejante, a esta nueva figura se le puede agregar un gnomon semejante al anterior y así sucesivamente de tal manera que todas las figuras obtenidas son semejantes a la inicial. Véase como en el siguiente ejercicio de construcción geométrica, la teoría de los gnómones era suficiente para resolver este tipo de problemas.

Si se construye un triángulo isósceles ABC de tal manera que el ángulo comprendido entre los lados iguales AB y AC mida 36°, resulta que:

1) Un gnomon para el triángulo isósceles ABC es el triángulo isósceles ABC_1 con los lados iguales AB y BC_1 y el ángulo comprendido entre ellos es de 108°.
2) El nuevo triángulo CAC_1 es semejante al triángulo isósceles ABC, entonces puede repetirse el proceso, pegándole sucesivamente en un triángulo el gnomon semejante al anterior (figura 2).

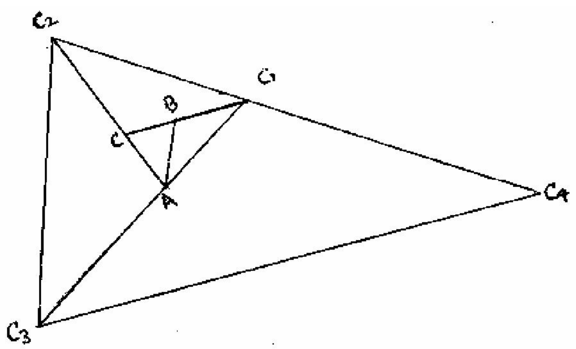


Figura 2.

Ahora, si con centro en B se traza un arco de circulo que una a C_1 con A; con centro en C uno que una a C_1 con C_2 ; con centro en A uno que una a C_2 con C_3 con centro en C_1 uno que una a C_3 con C_4 y así sucesivamente, se obtiene una espiral logarítmica que en efecto, no solo parece una espiral sino el cuerno de un carnero. (figura 3)

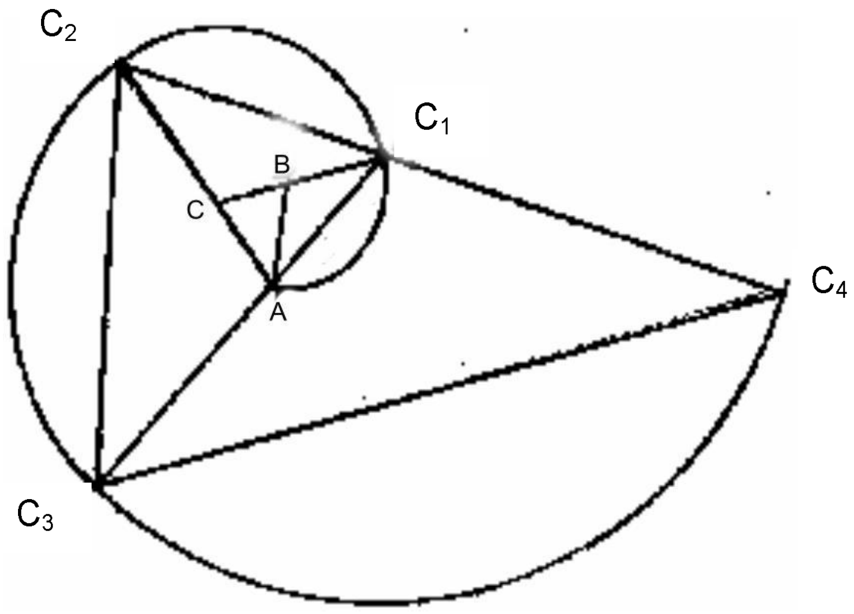
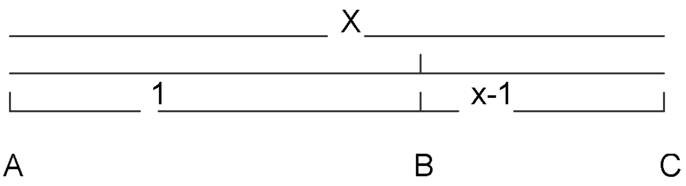


Figura 3.

Ahora el modelo matemático correspondiente al ejemplo anterior se construye sobre la base de una relación de proporcionalidad geométrica, que da lugar al planteamiento y solución de una ecuación cuadrática, es decir, una ecuación que involucra una cantidad elevada a la potencia dos, ya que por ejemplo: dado el segmento AB, si se agrega el segmento BC de tal forma que cumpla la relación:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow (AC)(BC) = (AB)^2$$

Si AB es el segmento unidad, al agregarle el segmento BC se obtiene la longitud AC. Como se debe averiguar la longitud AC, se representa ésta con x, y así la longitud de BC es x-1 (figura 4).



Según la relación de proporcionalidad establecida para los segmentos AB, AC y BC, se obtiene en términos de la variable x, la igualdad x(x-1) = 1 de donde $x^2 - x - 1 = 0$. Una de las posibles soluciones es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ por tanto, cuando AB = 1

AC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y BC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-1 = $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La relación en la que están AC y BC es $\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1}$ es decir, justamente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Construir un segmento AC de longitud $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es relativamente sencillo partiendo de un segmento unidad AB, y de la construcción de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 1 y 2 unidades respectivamente, pues la hipotenusa del triángulo tiene longitud $\sqrt{5}$, según se deduce del teorema de Pitágoras.

Obsérvese en la figura 5 el triángulo de longitud $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donde se traslada sobre una recta el segmento unidad AB, se agrega a continuación la longitud de la hipotenusa $\sqrt{5}$, y se ubica el punto medio.

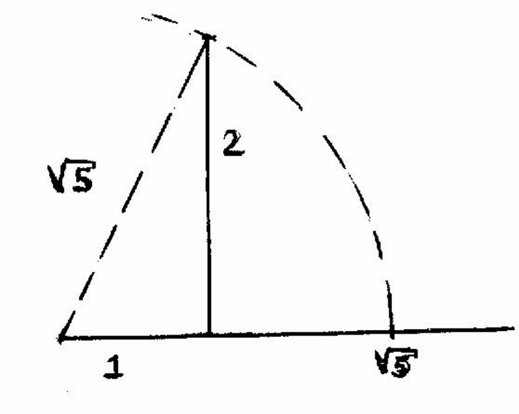


Figura 5.

Para ver mejor la relación del modelo geométrico con la teoría de los gnómones, en la construcción anterior se traza una perpendicular a AC que pasa por el punto medio del segmento BC. Con centro en B y radio AB se trazas un arco de circunferencia que corta la perpendicular en un punto D. Así el triángulo ACD es isósceles con lados AC y AD iguales y ángulos iguales de 72°. (figura 6)

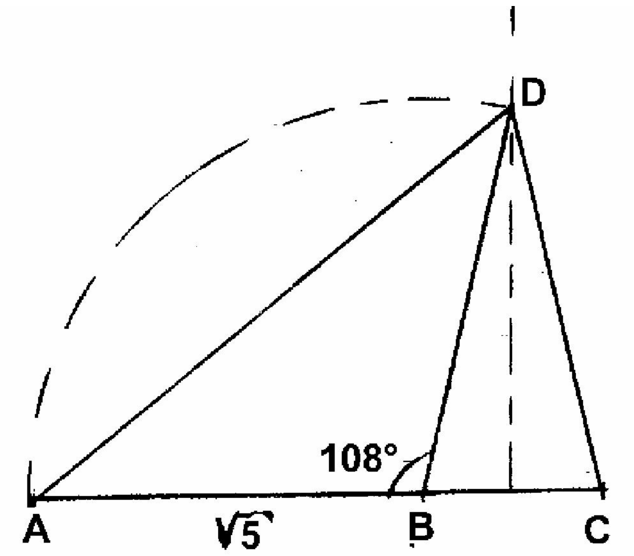


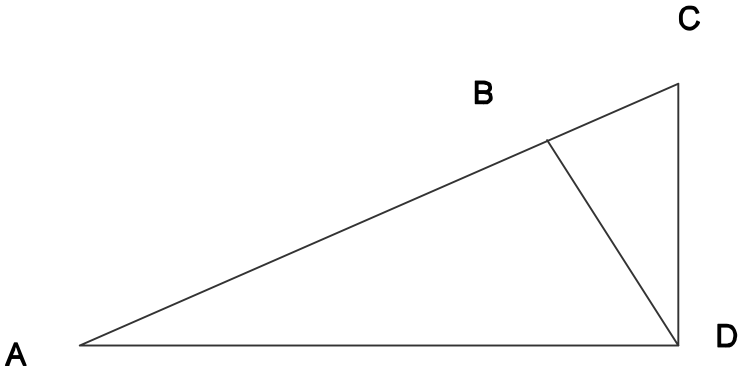
Figura 6.

El triángulo isósceles BCD es semejante al triángulo ACD y el triángulo isósceles ABD, cuyo ángulo ABD mide 108° es un gnomon con el que se puede obtener ACD de BCD. [8]

2.2. Teorema de Pitágoras.

Sea ADC un triángulo rectángulo, si AD y DC son sus catetos y AC su hipotenusa, entonces $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$

Demostración:



Trácese el segmento DB perpendicular al segmento AC. Se forman así tres triángulos rectángulos: ADC, ABD y DBC que son semejantes. El triángulo ABD es semejante al triángulo ADC, pues <BAD = <CAD, <ABD = <ADC = 90°, y como los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180°, entonces los ángulos restantes en cada uno de los triángulos, tienen que ser iguales. Es decir:

[8] CASTILLO, Eugenia. Enciclopedia Ilustrada. Bogotá 1998, Círculo de lectores. Página 50 - 51

<ADB = <ACD.

Al ser semejantes estos triángulos sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{DB}$. Tomando la primera igualdad: $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB}$, resulta que AC X AB = AD X AD, es decir:

AC X AB = $(AD)^2$.

Por otro lado, el triángulo ADC es semejante al triángulo DBC, puesto que los ángulos DBC, BCD, y CBD del triángulo DBC cumple con <DBC + <BCD + <CDB = 180° y como DBC = 90° resulta que <BCD + <CDB = 90°.

De manera análoga se establece que los ángulos ACD y CAD del triángulo ACD cumplen con <BCD + <ACD = 90°. Además <CDB + <ADB = 90° y como ya se probó que <ADB = <ACD, entonces <CDB + <ACD = 90°, que junto con la igualdad ya establecida, permite encontrar que <CAD = <CDB. Pero como <ADC = <CBD = 90°, entonces los ángulos restantes también son iguales.

Al ser semejantes estos triángulos, sus lados correspondientes son proporcionales, así que: AC/CD = DC/BC = AD/DB y tomando la primera igualdad, AC/CD = DC/B resulta que AC•BC = DC•DC, es decir, AC•BC = $(DC)^2$. Se tiene entonces que AC•AB + AC•BC = $(AD)^2$. + $(DC)^2$. De donde AC(AB + BC) =

AC•AC = $(AD)^2$ + $(DC)^2$., es decir, $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$, con lo que queda demostrado el teorema de Pitágoras.[9]

2.3 PROPOSICIONES

2.3.1. Dividir una recta en media y extrema razón.

2.3.2 Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado de la parte mayor añadida a la mitad del total equivale a cinco veces el cuadrado de la mitad.

2.3.3 Si el cuadrado de una recta es cinco veces el de sus partes y el doble de esta parte se divide en media y extrema razón la parte mayor es la que sobra de la recta.

2.3.4. Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado de la parte menor añadida a la mitad de la mayor e equivalente a cinco veces al cuadrado de la mitad de la parte mayor.

2.3.5. Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado de la recta total, junto con el de la parte menor, es el triple del de la parte mayor.

---

[9] CASTILLO Eugenia, Enciclopedia ilustrada. Bogotá 1998, Círculo de lectores. Página 91

2.3.6. Si se divide una recta en media y extrema razón y sele añade una recta igual a la parte mayor, la recta total queda dividida en media y extrema razón y su parte mayor es la recta dada.[10]

2.4. CONSTRUCCIONES DE POLIGONOS REGULARES, DESDE EL PENTAGONO HASTAEL DECAGONO

2.4.1. Construir el pentágono regular cuando se conoce el lado L_1

A ——————— B
L_1

Dato: Segmento de longitud L_1.

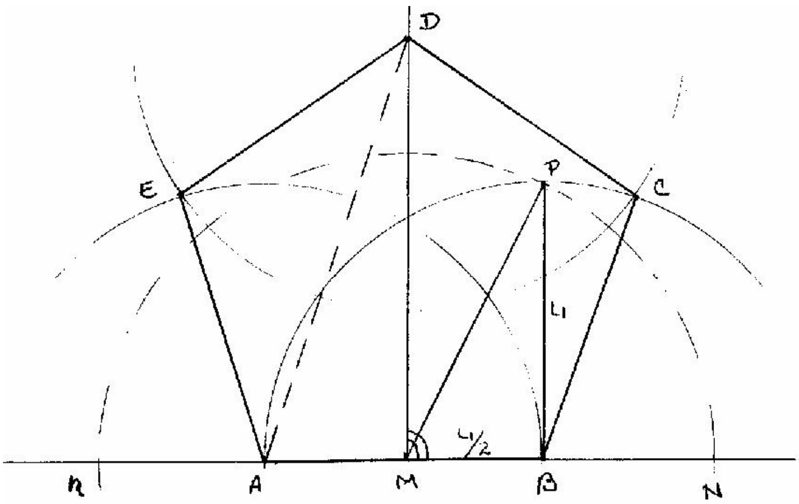
Procedimiento:

1) Con la magnitud L_1 del lado conocido, dibújese el segmento AB contenido en una recta horizontal indefinida.
2) Por el extremo B del segmento, levántese una perpendicular sobre la que deberá medirse la magnitud L_1 para determinar el punto P.
3) Obténgase el punto medio M del segmento AB y enseguida únase rectilineamente los puntos M y P, siendo MP la hipotenusa del triángulo rectángulo MBP que tiene por catetos L_1 y L_1 /2.
4) Con centro en M y radio MP, trasládase la hipotenusa hasta la prolongación del segmento dado, con lo cual se conoce el punto N. El segmento AN deberá resultar igual en magnitud a la diagonal del pentágono ya que la presente construcción se verifica de acuerdo al trazo de la figura, el segmento resultante

[10] VERA, Francisco. Científicos griegos. Ed. Tolle, Lege. Aguilar. Madrid (España), 1970. Páginas 959 - 963

AN, ha quedado dividido en media y extrema razón, dado que el segmento AB es media proporcional entre el AN y el BN.

5) Con centro de compás en A y abertura AN, procédase a trasladar esta diagonal hasta la mediatriz que pasa por M, con lo que obtiene el vértice D, opuesto al lado conocido y siendo el segmento MD por definición.
6) Tomando con el compás la magnitud L_1 dada y con centros en D, A y B se trazan pequeños arcos cuyos encuentros producen los puntos C y E; la unión conveniente entre los vértices B, C. D, E y A nos conduce al pentágono buscado.



2.4.2. **Construir un hexágono regular conocida la magnitud** L_1 **del lado**

Dato: Segmento AB de magnitud L_1 A $\overset{L_1}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}$ B

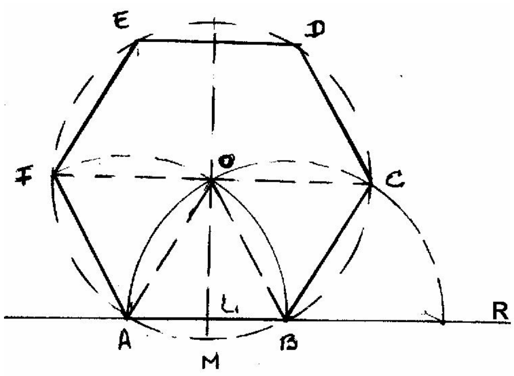
Procedimiento:

1) Dibújese el segmento dado sobre una horizontal R indefinida, determinando enseguida la mediatriz OM y estando el punto O definido en el vértice del

triángulo equilátero AOB y localizado mediante los arcos cincunferenciales AO y BO con centro en B y en A, respectivamente.

2) El punto O es el centro de la circunferencia en la cual deberá quedar inscrito el hexágono, ya que, como se sabe, el lado de este polígono es igual en magnitud al radio de la mencionada circunferencia. Por lo tanto, con centro en A y abertura de compás igual al segmento AB = OA = OB, descríbase la circunferencia, sobre la cual deberá trasladarse sucesivamente, por medio del compás, el lado conocido de magnitud L_1 .

3) Unir por medio de líneas rectas los puntos B, C, D... etc., obtenidos en el paso anterior, utilizando para esto línea continua gruesa, como resultado



2.4.3. **Construir un heptágono regular cuando se conoce la magnitud L del lado**

Dato: Segmento AB de magnitud L = 4 unidades. A |________________| B

Procedimiento:

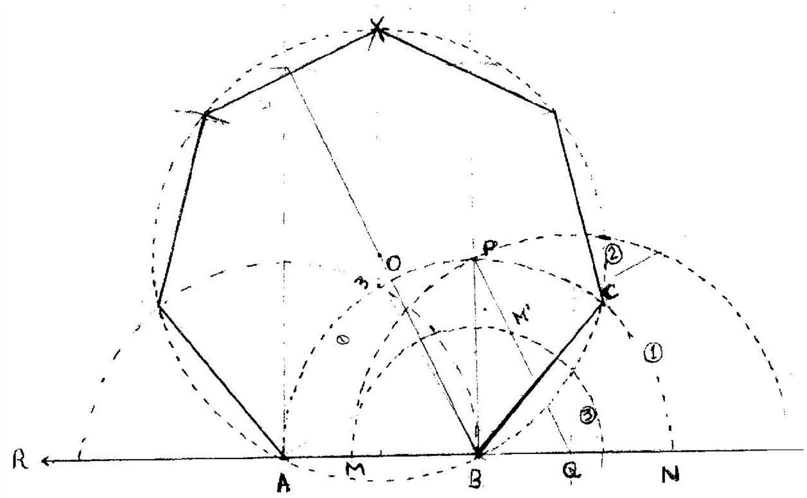
1) Conténgase al segmento AB, de longitud L = 4 unidades en una recta indefinida R, trazando la mediatriz 1 - 2, al segmento AB y la perpendicular 4 - B (puntos 3 y 4), por el extremo B.

2) Con centro en B y radio L, descríbase la semicircunferencia 1, la cual nos permite conocer N en R y P en $ - B, determinando Q, punto medio del radio BN, mediante 5 - 6. Unir rectilíneamente los puntos Q Y P, trazando, con centro en Q y radio QP, el arco 2 hasta su encuentro M con el segmento AB; M corresponde a la sección media y extrema razón del segmento propuesto.
3) Trazar el arco de circunferencia 3, con centro en B y radio BM, hasta su intersección M' con la hipotenusa QP. Por lo tanto BM' = BM.
4) Procédase a unir rectilineamente A con M', prolongando esta línea hasta encontrar el punto C en la circunferencia 4. El punto C es el vértice del heptágono buscado.

Si A y C son extremos de lados adyacentes, el segmento AB corresponde entonces a una diagonal del polígono.

5) Si trazamos la mediatriz 7 - B a la diagonal AC, la cual debe pasar precisamente por B, habremos determinado la mediatriz del lado opuesto al vértice B. Localícese el punto de intersección entre esta última mediatriz y la que corresponde al segmento AB. Como se ha dicho, este encuentro produce el centro O de la circunferencia que circunscribe al heptágono buscado , cuyo radio tendrá por magnitud la distancia OA = OB = OC.
6) Debido a que en la circunferencia han de estar contenidos todos los vértice del polígono, bastará con marcar estos puntos sucesivamente (D, E, F, G), haciendo uso del compás de puntas y con una abertura AB = L, teniendo que cerrar la operación en el punto de partida A. Finalmente la unión, mediante trazos de línea recta, continua y gruesa de los puntos A con B, B con C,…,F

con G y G con A, dará forma definida al polígono regular del problema planteado.



2.4.4. **Construir un octágono regular, conocido el lado L, de longitud 5 unidades**

Dato: Segmento AB de longitud L = 5 unidades. A ├───────────┤ B

Procedimiento:

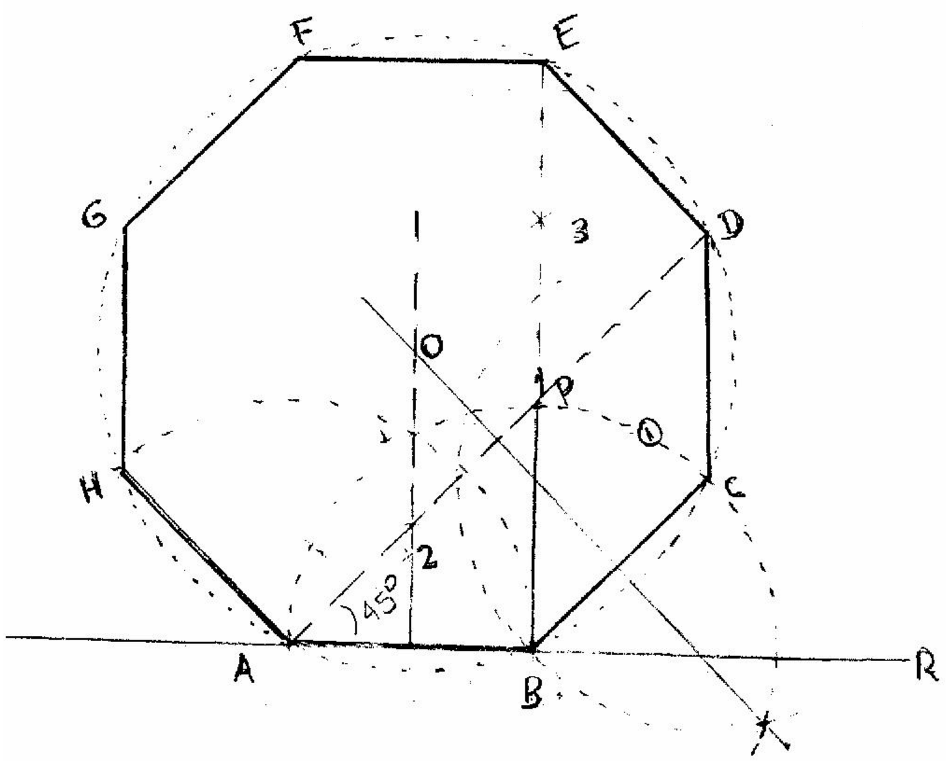
1) Conténgase el segmento dado en una recta indefinida R, trazando la mediatriz 1 - 2, la perpendicular B3, trazada por el extremo B, define el punto P en su intersección con el arco 1 (centro en B y radio BA).

2) Dado que BP = AB, la hipotenusa AP estará orientada a 45° con respecto a R y por lo tanto AP es un segmento de la diagonal AB del octágono. El punto C

puede determinarse trazando por B una paralela a la diagonal, hasta su centro en C con el arco 1.

3) Obténgase la mediatriz 4 - 5 del segmento BC, mediatriz que deberá encontrar a la mediatriz 1 - 2 en el punto O, centro del polígono, con centro en O y radio OA = OB = OC, describir la circunferencia que circunscribe al octágono.

4) Por último, tomando con el compás la magnitud AB, trasladándose ésta sobre la circunferencia y a partir de C márquese los puntos D, E, F, G y H, debiendo cerrar esta operación en el punto A. Desde luego, será necesario unir con líneas rectas los puntos C con D, D con E, etc., para obtener el octágono.



2.4.5. **Construir el eneágono, conocida la longitud L de sus lados**

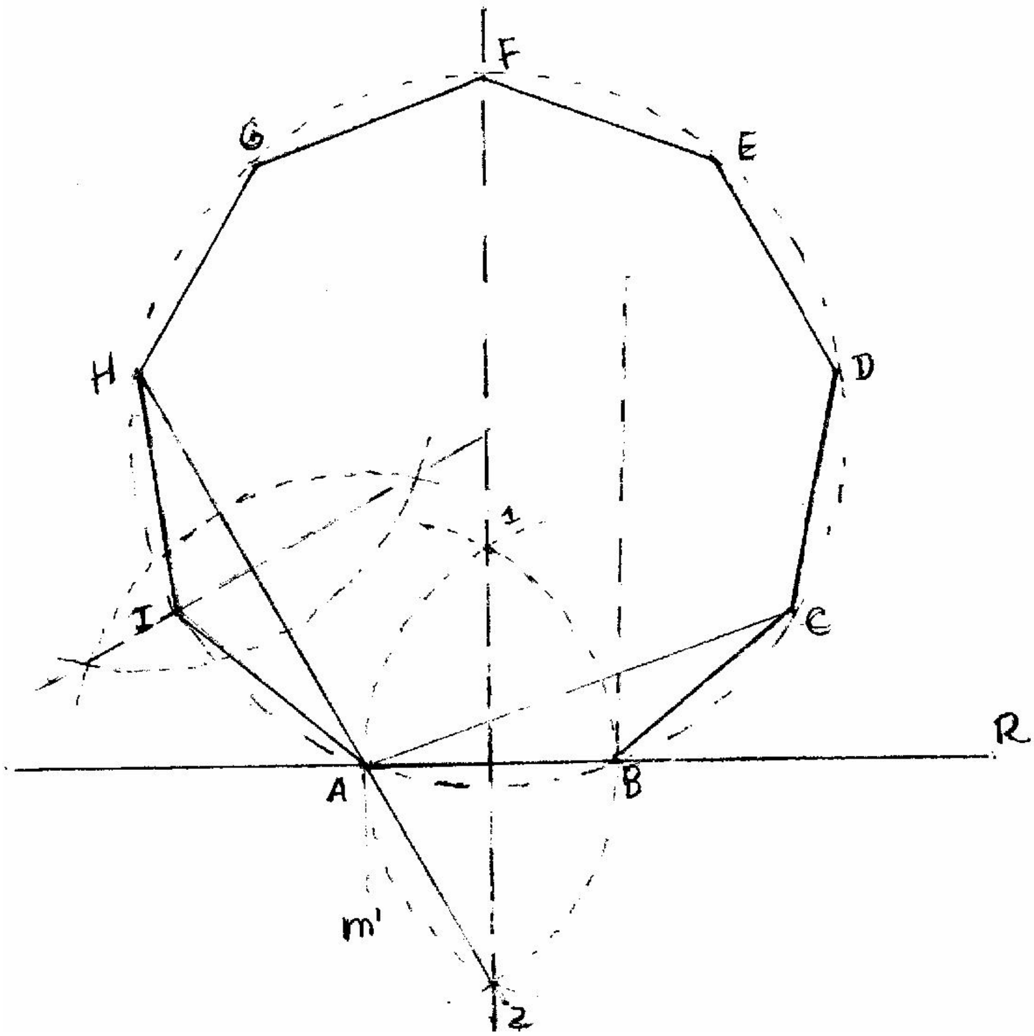
Dato: Segmento AB de longitud L = 5 unidades. A|————————————| B

Procedimiento:

1) En una horizontal R indefinida, contener el segmento AB de longitud L = 5 unidades. Determínese la mediatriz 1 - 2 y la perpendicular B3.
2) Con centro en B y radio L, trazar el arco 1; Mediante el triángulo rectángulo BAm' determinar el punto M que corresponde a la sección media y extrema razón del segmento dado. Recuérdese que el cateto Am' se obtiene trasladando la magnitud L/2 hasta la perpendicular por A; de ahí el punto A se desplaza hasta la hipotenusa en A' (con centro en m'). Con abertura de compás BA' y centro en B se traza el arco que nos conduce a m.
3) La parte mayor del segmento AB, así dividido, tiene por magnitud d= 3.08 u. Con centro en M y radio d, trazar el arco 2 hasta su encuentro con la perpendicular B3 en el punto M_1
4) Únase rectilíneamente los puntos A y M_1 prolongando el segmento AM_1 hasta su intersección con arco circunferencial 1 en el punto C, correspondiendo este punto a un vértice del eneágono. Por esta razón, el segmento AC resulta ser diagonal menor de dicho polígono, por lo que, si se traza la mediatriz B4, podremos localizar con relativa precisión el centro O del eneágono, en el punto de intersección con la mediatriz 1 - 2.
5) Debido a que el ángulo α formado por ambas mediatrices es muy pequeño, la localización exacta de O es relativa como decíamos; pero es fácil llegar a este centro si se aprovecha el hecho de que la prolongación del segmento 2A nos

conduce a otra de las diagonales menores, la AH. Como el punto C está definido con bastante aproximación podremos, con centro en A y radio AC, trasladar la magnitud de la diagonal menor a la prolongación del segmento 2A mediante el arco 4. Con este se obtiene el punto H, debiendo trazar enseguida la perpendicular 5 - 6 al segmento AH. Esta mediatriz nos conduce, ahora si, al centro O con gran aproximación, aunque cabe reafirmar que este paso tiene por objeto únicamente definir con mayor exactitud dicho centro, ya que de hecho, el punto ha sido determinado en la intersección de las mediatrices 1 - 2 y B4.

6) Con centro de compás en O y radio OA = OB = OC, trazar la circunferencia en la cual ha de quedar inscrito el eneágono. Por lo tanto, con una abertura del compás de puntas L = AB = BC, marcar conveniente los puntos D, E, F, G, e I (H ya se conoce), debiendo coincidir en A la última posición del compás. Finalmente se unen todos los puntos mediante línea continua gruesa, con lo que se obtienen los lados del eneágono.



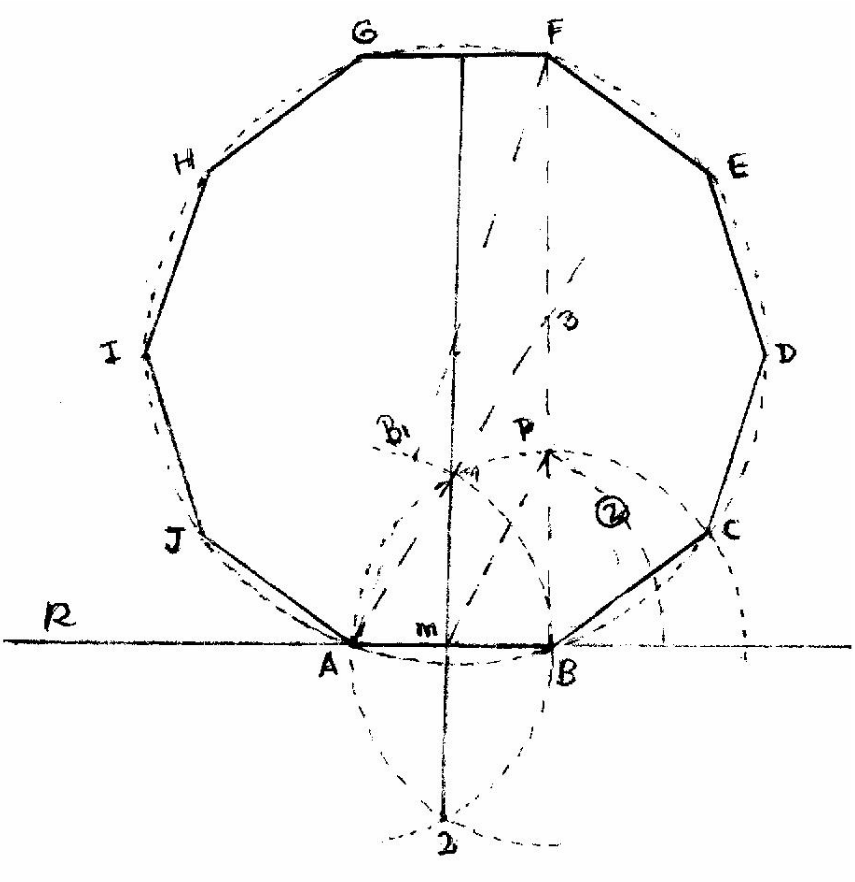
2.4.6. Construir el decágono regular, conocido el segmento AB o lado del polígono de longitud L

Dato: Segmento AB de longitud L = 4u. A|————————| B

Procedimiento:

1) Conténgase el segmento dado de una recta horizontal indefinida R, trazando la mediatriz 1 - 2 que define el punto m. Determinar, aquí mismo, la perpendicular B3 al propio segmento AB.
2) Localizar un punto N, sobre R, tal que AB resulte la parte mayor del segmento AN, dividido en media y extrema razón. Para lograrlo, trasládese la magnitud L del segmento AB, sobre la perpendicular B3 con lo que se obtiene el punto P. Con centro en m y radio mP, descríbase el arco 1 hasta su intersección con la recta R en el punto N.
3) El segmento AN deberá corresponder en magnitud, al radio de la circunferencia que circunscribe al polígono que se pide. Como esta circunferencia pasa por los dos vértices conocidos y además, el centro de la figura debe estar contenido en la mediatriz al segmento AB. Con centro en A y radio AN, descríbase el arco 2 que cortará a la mediatriz 1 - 2 en el punto O. Con el mismo radio y centro en O, trazar la circunferencia circunscrita. El radio OA queda entonces dividido en sección media y extrema razón por el punto B_1
4) En la figura, entonces el punto O es el centro de la circunferencia circunscrita (para AB = L); OA es el radio de dicha circunferencia, B_1 divide en media y extrema razón a tal radio y el segmento AB es igual al AB_1 que, por lo tanto, resultará ser igual al lado del decágono regular que se busca.

Solo resta trasladar el segmento AB, sucesivamente a lo largo de la circunferencia circunscrita para obtener los puntos C, D, E, F, G, H, I, J, A y unir mediante línea continua gruesa estos puntos para obtener la forma definitiva de la figura.[11]



[11] CAMBEROS, Alberto. Dibujo Lineal Geométrico. México 1975. Ed. Prrúa S.A.

CAPITULO III

APLICACIONES

Es la parte más llamativa del trabajo, por algo al segmento áureo también se le denomina proporción divina; puesto en el arte y la naturaleza. Para abordarlo se inicia con los números de Fibonacci y la razón áurea en el arte y la naturaleza; se representa el Partenón de Atenas que conjuga arte y naturaleza al mismo tiempo, entre otras relevantes aplicaciones.

3.1. LOS NUMEROS DE FIBONACCI Y LA RAZON AUREA EN EL ARTE Y LA NATURALEZA

En general, si se le pide a una persona que divida un segmento en dos partes de tal forma que la relación entre ellos sea armoniosa, la mayoría la dividen en 1/3 y 2/3.

Para muchos artistas, la división que establece una relación ideal entre los dos pedazos es precisamente la correspondiente a la "proporción divina" como fue llamada en el renacimiento, "media dorada" según Euclides o "sección áurea" como se llama desde el siglo XIX.

Los artistas en gran parte, ya sean conscientes o inconscientes, usan la proporción divina para darle armonía estética a sus obras, es así como el

Partenón de Atenas y muchas obras arquitectónicas de la antigüedad fueron diseñadas de tal manera que sus dimensiones están en proporción áurea.

Partenón de Atenas

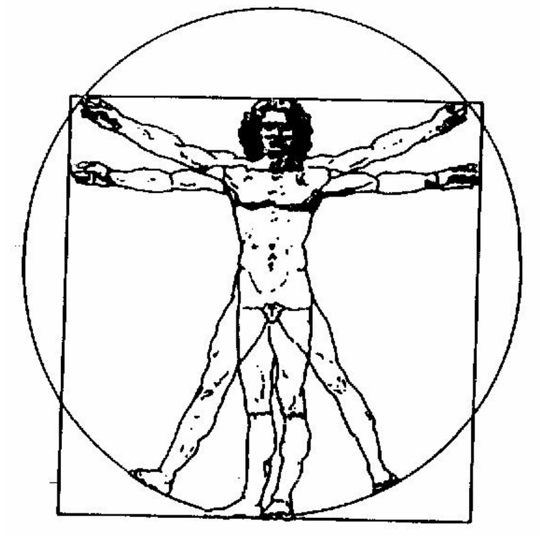
Fecher, inventor de la psicología física, hizo en 1876 una serie de estudios en los cuales colocaba varios rectángulos frente a una persona pidiéndole que escogiera aquel que le parecía más agradable. La mayoría de las personas escogieron el rectángulo áureo; es interesante observar que esta forma está tan arraigada dentro de nosotros que se usan en las barras de chocolate, libros, etc.

Los artistas hacen uso de la proporción áurea para subdividir el espacio sobre el cual van a hacer su cuadro (El rectángulo) de tal forma que se encuentra la sección áurea, lugar donde se coloca el centro de interés de la obra. Tal vez el pintor que más se preocupó por seguir esas ideas y cuyos cuadros muestran esto, fue Georges Seurat de Seurat, quien dio muchos ejemplos del uso de la proporción divina.

No siempre el centro de interés de la obra la colocaban los artistas en este espacio, pero si usaban el color en los espacios demarcados para balancear la obra; como en "Mardi Gras" de Cézame en el cual el payaso vestido de blanco contrasta con el arlequín.

Después de más de dos siglos de vida hacia 1850, el alemán Zeysing, vuelve a estudiar la sección áurea, a tal profundidad que descubre la presencia de esta en el cuerpo humano, estudiada por Leonardo Da Vinci como puede verse en sus dibujos, los cuales muestran unas medidas, también ilustradas en las estatuas griegas; en la música y en la botánica. Zeysing efectúo medidas entre muchos hombres y mujeres, encontrando que en los hombres la razón h/n = 13/8 = 1.625 y en las mujeres h/n = 8/5 = 1.6; donde h es la altura total y n es la distancia desde el ombligo hasta la planta de los pies. Como se ve ambas razones se aproximan al número de oro.

Relaciones similares se encuentran en el rostro. Consideran h la altura de la cabeza y n la parte de la frente de la nariz hasta la barba.



Church en sus estudios de filofaxía (parte de la botánica que estudia la posición de las ramas, hojas y semillas), descubre que para que las hojas alrededor de un tallo tengan la máxima expansión a la luz vertical, estas deben hallarse sobre una hélice ascendente sobre el tronco, separadas por un ángulo α = 137° 30' 28", esta es la medida del lado cuya diferencia a 360° β divide a 360° en media y extrema razón. Además β = 360°/Φ = 222° 24' 32", donde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339$, denominado el número de oro. β se llama el ángulo ideal.

Una manifestación de la sucesión de Fibonacci está en la cantidad de curvas espirales en dirección opuesta que forma el ovario maduro de la flor del girasol unos rombos, cada flor arroja dos números que siempre corresponden a las siguientes fracciones 13/21, 21/34, 34/55, 55/144, así mismo las escamas de una piña forman espirales opuestas, cinco en una dirección y ocho en la otra.[12]

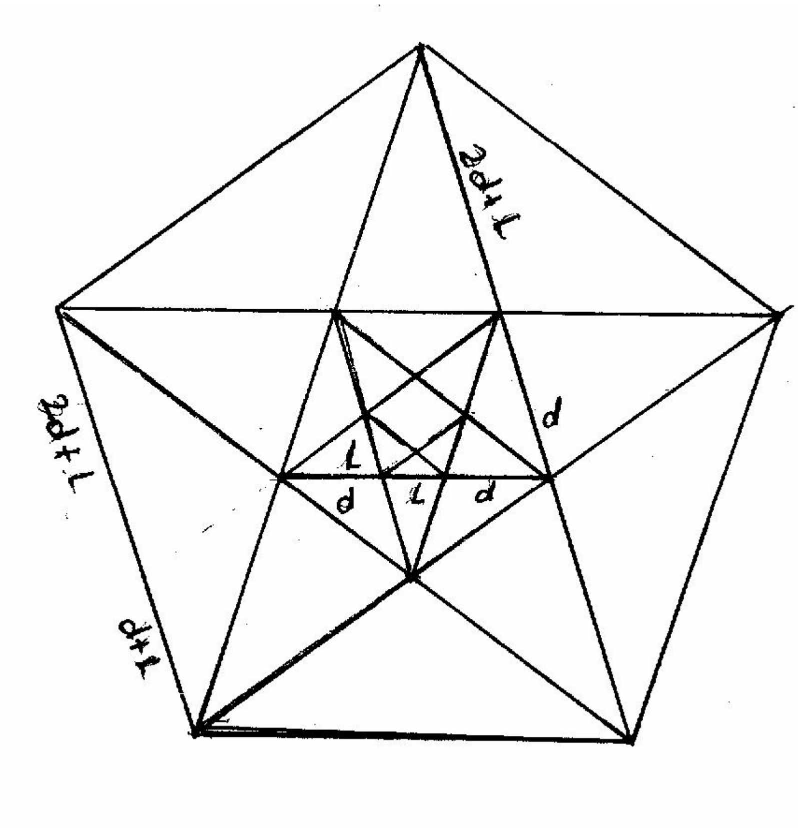
Las investigaciones de Johannes Kepler sobre el universo, comparte las mismas características de crecimiento y desarrollo de los seres vivos, las cuales están determinadas por la sección áurea. Kepler encontró que la formación de los sólidos platónicos está ligada a esta sección y sostuvo que estos sólidos se derivan de uno de ellos, el decaedro cuyas caras laterales pentagonales se caracterizan por la sección áurea.

Por ejemplo si trazamos dos diagonales del pentágono estas se intersecan en proporción áurea, de lo cual se deriva que la razón d/l corresponde a la sección áurea, donde l denota la longitud del lado del pentágono y d la longitud de la diagonal; también si se prolongan sus lados y unimos los puntos de corte de estas prolongaciones resultará un pentágono de lado l + d y de diagonal l+2d, luego sí a este nuevo pentágono le prolongamos sus lados y continuamos este proceso indefinidamente se observará una formación infinita de pentágonos regulares de las cuales se generan las siguientes proporciones:

$$:\frac{d}{l}=\frac{2d+l}{d+l}=\frac{5d+3l}{3d+2l}=\frac{13d+8l}{8d+5l}=\frac{34d+21l}{21d+13l}$$

La siguiente figura ilustra este proceso.

[12] Programa regional. Universidad Francisco José de Caldas en convenio con la Universidad de Sucre. Sincelejo 1998. Taller de didáctica de la matemática. Múltiples facetas de la sucesión de Fibonacci. Páginas 7 a 13.



3.2. LA SECCION AUREA Y LA ARQUITECTURA

El número áureo se aplica a las proporciones del cuerpo humano: el origen de este hecho se observa en el autor Vitruvio, quien escribió un importante libro sobre arquitectura (De Architectura) el cual fue escrito alrededor del año 25 A.C. En él se desarrolla la idea de que la igualdad entre dos razones en materia de construcción, debe tomarse como una similitud con el cuerpo humano, es decir, que la geometría de los grandes edificios debe tomarse como copia de la armonía del cuerpo humano.

Este hecho da origen en 1946, a que el arquitecto francés Le Corbusier, encontrara la forma de realizar una construcción en serie, inventando el módulo de oro. Que consiste en un sistema de proporciones arquitectónicas que facilitan la construcción de edificios armoniosos.

CAPITULO IV

4. IMPLEMENTACIÓN DE TALLERES PARA APLICAR EL NÚMERO DE ORO, EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BUENAVISTA, EN LOS ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO.

4.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA:

Para llevar a cabo la implementación de los talleres, se tuvo en cuenta una pregunta problema: ¿cómo aprender “número de oro” a partir de segmentos, polígonos regulares y figura humana?

4.2 TEORÍAS DEL APRENDIZAJE:

En el quehacer del docente se busca desarrollar acciones que posibiliten los procesos de enseñanza y aprendizaje, los cuales son siempre iluminados, consciente o inconscientemente por una teoría de aprendizaje. Dentro de estas familias de teorías de aprendizaje distinguiremos las siguientes:

4.2.1 El Constructivismo: Esta teoría sostiene que el conocimiento es producto de la creación de la mente humana; que el conocimiento está en la mente, en el interior del sujeto, lo que hay que posibilitar es su desarrollo. El constructivismo valida el hecho que, el alumno, el sujeto de la educación posee una pre-teoría, conocimiento previo o preconcepto al enfrentar cualquier situación de aprendizaje, y que es a partir de esa pre-teoría que asigna significado a los datos y situaciones de aprendizaje, en el cual se logra un cambio conceptual que permite la elaboración de explicaciones cada vez más cercanas a la elaboración de conocimientos aceptados como verdad.

Mario Carreto (1990, pág. 20), define el constructivismo "como la idea que mantiene el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un nuevo reproductor del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos los factores" [13]

Así el constructivismo habla de la interacción sujeto-ambiente como la causa que genera el conocimiento, el conductismo hace lo mismo, pero solo lo valida el efecto del ambiente sobre el sujeto como generador del conocimiento

El constructivismo posee dos grandes enfoques "el primero hace referencia al desarrollo de la inteligencia y su construcción social, Piaget y Vigotsky son sus principales exponentes.

El constructivismo de Piaget se relaciona con las etapas de desarrollo o estudios que atraviesa la inteligencia del ser humano, asociado con su desarrollo biológico, de allí su nombre de constructivismo evolutivo.

Vigotsky, por su parte plantea que el conocimiento es un producto de la interacción social y la cultura. Esto permite aseverar que hace énfasis en el sujeto como un resultado social. También introduce el concepto de "zonas de desarrollo próximo" y entre a considerarlo como la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado por medio de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto, se privilegia el trabajo en grupo se busca dirigir la acción de aprender.

---

[13] Carretero, Mario. Constructivismo y Educación citado en práctica Docente Reflexiva. Por Esteban Rodríguez. Pág. 20.

La segunda hace relación a los aportes de Ausubel y la sicología cognitiva.

Ausubel habla del aprendizaje significativo para la persona que aprende y lo define en función de la relación que existe entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el estudiante.

Carretero (1990) resume los lineamientos generales del constructivismo así:

1. Partir del nivel del desarrollo del alumno.
2. Asegurar la construcción de aprendizaje significativo.
3. Posibilitar que los alumnos realicen aprendizajes significativos por sí solos.
4. Procurar que los alumnos modifiquen sus esquemas del conocimiento.
5. Establecer relaciones ricas entre el nuevo conocimiento y los esquemas de conocimientos ya existentes.

Novak por su parte ha desarrollado la técnica de los mapas conceptuales, como una forma de indagar y ayudar al alumno en la construcción del conocimiento.

Aprendizaje Significativo: "El optimismo innovador e intuicionista de Bruner fue criticado por Ausbel (1978), quien también se ocupa de la enseñanza del contenido de las ciencias, pero no por descubrimiento propio, sino como un aprendizaje que el alumno tornará significativo gracias al aporte de su experiencia previa y personal.

La contribución de sentido del alumno lo saca de la pasividad y lo convierte en activo constructor de su propio aprendizaje".[14]

---

[14] IBID Pág. 44

Es importante tener en cuenta la estructura mental del estudiante y su coherencia con los conocimientos nuevos.
También es indispensable tener en cuenta que la estructura cognitiva de estudiante, tiene una serie de antecedentes y conocimientos previos, producto de la cultura y de las relaciones familiares y sociales, que se traducen en un esquema de referencia personal, el cual es imprescindible conocer puesto que se convierte en soporte para propiciar las experiencias pedagógicas con miras a lograr conocimientos significativos en los educandos.

Durante el aprendizaje significativo el alumno relaciona de manera arbitraria, los conocimientos nuevos, con los conocimientos previamente adquiridos como producto de la interacción con su medio o con otros saberes disciplinares, sino que comprende su significado, al relacionar la nueva información con lo que ya posee.

Tampoco se limita a memorizarla, sino que realiza acciones con adquisiciones previas. Es importante tener en cuenta la globalidad de la interacción con diferentes medios sociales o académicos, que la tecnología le proporciona al estudiante. Con éstos se les facilita el interactuar con diferentes espacios.

La organización del conocimiento no se presenta de manera fraccionada o como marcha de lo simple a lo complejo, o de la parte al todo, sino que siempre se debe tener en cuenta la integralidad, aunque deba avanzarse para la comprensión a otros niveles de profundidad. La construcción de sentido es necesaria desde el principio para lograr aprendizajes significativos.

El contenido del aprendizaje debe ser potencialmente significativo para los alumnos, es decir, su elección debe hacerse de tal forma que esté acorde con la estructura cognitiva de los educandos, por lo cual debe antes indagarse en la plataforma conceptual (conocimientos de semestres anteriores) y los conocimientos básicos que posean, entre otras acciones.

“El aprendizaje significativo requiere confirmación y retroalimentación cognoscitiva que permita corregir errores y ajustar desviaciones mediante el debate y la discusión con los pares; pero sobre todo ensayando y probando en la experiencia cada conjetura, cada hipótesis, en el campo de las ciencias naturales y en el de las ciencias sociales, eso si, con la certeza de que no se trata de un cambio determinista que conduce con exactitud a una sola respuesta correcta, sino a una aproximación probable de algunas de las soluciones posibles. No se trata tampoco de verificar la respuesta en el libro ni la teoría del profesor, sino de confrontar y hacer viable la conjetura del alumno, no desde afuera, sino desde la iniciativa racional que la sustenta, con el estímulo y ayuda del profesor y del grupo”[15]

Aprendizaje por descubrimiento: Se trata de una propuesta construida Brunen quien estudió las diferentes etapas del desarrollo cognitivo y la marcada influencia que tienen en el mismo, el lenguaje y el entorno.

Propone que el docente facilite el aprendizaje, proporcionándole al estudiante situaciones que le permitan identificar por cuenta propia, la estructura de la disciplina, descubrir las ideas principales y la información esencial y facilitándole que a partir de ejemplos específicos llegue a generalizaciones. Para lograrlo se deben organizar y categorizar los conceptos que constituyen una información, relacionándolos entre sí, para entender la estructura básica de una teoría.

Sugiere Bruner, para que lo que se conoce pueda ser aplicado en situaciones diferentes a la originalidad de aprendizajes que se estimule con suposiciones y el pensamiento intuitivo, que se confirmen las pruebas insuficientes, que se aprenda a partir de la participación activa, que se realicen preguntas intrigantes, que se enfrente al estudiante a situaciones desconcertantes y a problemas interesantes y

[15] IBID PAG. 47

a la observación solicitándole que le formule hipótesis y pruebe posibles soluciones.

Según Rafael Flórez, Bruner asegura que “cualquier contenido científico puede ser comprendido por los alumnos si se les enseña bien y se les traduce a su propio lenguaje, facilitándoles el entendimiento, por el mismo de los conceptos básicos estructurales y los modos de investigar de cada ciencia”[16]

Continúa afirmando que “los alumnos realizan su aprendizaje a medida que experimentan y consultan la bibliografía disponible, analizan la información nueva con la lógica del método científico de la disciplina y deducen sus propios conocimientos”[17]

Esta última afirmación, lleva a concluir que se trata de un enfoque que puede resultar apropiado para aquellos saberes y teorías que han empleado a su desarrollo el método inductivo. (Ver Anexo – Mapa Conceptual – Contructivismo).

4.2.2 El Conductismo: Esta teoría se enmarca en una filosofía positivista que da crédito a los hechos observables, negando de alguna forma la participación de los sentimientos en las acciones del ser humano. Lo importante para el conductismo es llegar a que la conducta se repita hasta convertirse en el resultado final.

El conductismo asocia al docente como eje del proceso de enseñanza y aprendizaje, con la autoridad que le da el ser, el poseedor de la verdad. No niega en ningún caso la creatividad y la actividad dentro del rol asegurado.

El conductismo privilegia la instrucción, tipo expositiva vertical, mira al estudiante como el sujeto a moldear, a quien hay que darle un carácter, limita su creatividad y

[16] IBID PAG. 43

[17] IBID PAG. 44

fomenta el individualismo. Asume un ambiente formal, normativo, donde el punto de vista del estudiante no es tenido en cuenta.

De acuerdo con esta teoría el docente asume el rol de instructor, poseedor de la verdad y el estudiante es el sujeto a moldear.

El conductismo se caracteriza por las siguientes leyes:

- Acción: el sujeto debe ser activo.
- Recompensa inmediata: los resultados de las evaluaciones deben ser reconocidas de inmediato.
- Repetición: se debe hacer o decir lo mismo pero por caminos o forma diferentes.

- Instalación y extinción: lo bueno se debe reforzar, lo malo hay que desecharlo.
- Generalización: discriminación y diferenciación: se debe permitir el ensayo y cometer errores para luego asumir el aprendizaje y saberlo ubicar ante situaciones nuevas. (Ver Anexo – Mapa Conceptual – Conductismo).

4.3 METODOLOGÍA

4.3.1 Tipo de estudio:

El tipo de estudio de acuerdo con la característica y la naturaleza de los talleres son de tipo descriptivo, porque permite hacer una descripción en detalle de lo que hace el estudiante al emplear el número de oro en cualquier momento que se le presente.

4.3.2 Población y muestra:

Para llevar a cabo la realización de los talleres se escogieron 15 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Buenavista.

4.3.3 Tipo de talleres:

Se trabajarán dos tipos de talleres:

1. Con orientación del docente en el curso se le darán pautas que indica el desarrollo de cada uno.

2. Investigación personal, el cual tiene como objetivo analizar la forma como trabajan los estudiantes por si solos, para la cual luego lo socializaban en el aula de clases.

Para el análisis de los talleres se tuvieron en cuanta los siguientes aspectos:
- Utilización y relación de conceptos.
- Uso de la terminología de conceptos matemáticos.
- Utiliza materiales didácticos acordes con el tema.
- Aborda la situación con claridad.
- Propone estrategias de solución.

- Utiliza distintas formas de representación.

4.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS:

Para llevar a cabo el análisis de los resultados arrojados en la aplicación de cada taller, se tuvieron en cuenta los siguientes pasos.

1. Se hizo explicaciones por parte del docente sobre la temática a desarrollarse en cada taller y la forma de cómo se debería trabajar.
2. Una vez dadas las explicaciones los estudiantes, leían y analizaban documentos entregados para el desarrollo de cada taller. A su vez procedían a emplear materiales requeridos para el desarrollo de cada una de las actividades propuestas.

3. Finalizado el desarrollo de cada taller los estudiantes explicaban en el tablero de que manera lograban dar solución a lo propuesto en cada taller.

Cuadro No. 1 (ver anexo)

Taller 1: División de un segmento en proporción áurea.
Taller 2: Construcción de rectángulos áureos.
Taller 3: Obtención de un rectángulo áureo a partir de un cuadrado.
Taller 4: La razón a partir de presentación del cuerpo humano para llegar al número de oro.
Taller 5: Construir un pentágono regular conociendo uno de sus lados.
Taller 6: Construir un hexágono regular conociendo la magnitud l, del lado.

De acuerdo a lo registrado en el cuadro 1 se tiene: Durante la realización de los 6 talleres, los estudiantes en un 100% (15) siempre utilizaban conceptos previos; lo que les permitió tener claridad y ubicarse en las actividades a realizar.

En cuanto a la relación de conceptos en cada taller, se evidencia que de los 15 estudiantes el 86,6% (13) siempre lo hicieron en los talleres 1, 2 y 3, mientras el 13.,3% (2) lo hacía algunas veces. Durante el desarrollo de los talleres 4, 5 y 6 el 66,6 (10) de los estudiantes siempre relacionaban los conceptos a partir de su propia construcción y el 33,4% (5) restantes lo hacía algunas veces, lo cual demuestra que había dificultad para dar conceptos a partir de la relación que hacían de los mismos.

Se observó durante la realización de los talleres en un 100% (15) siempre utilizaron material didáctico acorde a las actividades desarrolladas.

En relación con el abordaje con claridad, se pudo observar que solo en el taller 2 siempre lo hizo la totalidad de los estudiantes, mientras que en el taller 1 siempre lo hizo el 60% (9) y algunas veces el 40% (6) cabe destacar que a partir de la realización 3, 4, 5 y 6, el abordaje tuvo mayor dificultad ya que el 66,6% (10) siempre lo hizo y el 33,4% (5), se le presentaban dificultades y lo hacían algunas veces, lo cual lleva su implicación a proponer estrategias de solución que se solicitaban; y donde mantuvieron los mismos comportamientos anteriores de acuerdo a la actividades a desarrollar en cada taller.

Durante la realización de los talleres el 100% (15) de los estudiantes usaba terminología de conceptos de acuerdo a los temas estudiados, lo cual les permitía comunicar siempre ideas matemáticas a través de lo descrito en cada taller y durante la socialización hecha en el aula de clases.

En cuanto a las formas de representación indicadas para cada taller se pudo observar que el 100% (15) de los estudiantes siempre mostraba que existían formas diferentes a las señaladas por el docente para llegar a la construcción de polígonos regulares.

De acuerdo al análisis realizado en cada taller se puede concluir que la teoría sobre el número oro si tiene aplicación para la enseñanza de algunos temas tales como razón, proporción cuarta proporcional y rectángulo áureo.

TALLER DE SENSIBILIZACIÓN

Análisis del video Donald en el país de las matemáticas

OBJETIVOS:

- Motivar a los estudiantes para el conocimiento de espacios, figuras, esculturas que contenga el número de oro.

- Analizar detenidamente en dónde y de qué forma se encuentra representado el número de oro.

JUSTIFICACIÓN

La presentación del video se hace con el fin de que los estudiantes, comienzan a familiarizarse con lo que es el número de oro, así como también para que se motiven por el conocimiento y estudio del mismo, ya que muchas veces ellos desconocen el significado que tiene a nivel de las matemáticas; los espacios en donde cotidianamente encontramos representado dicho número.

PREGUNTAS ORIENTADORAS PARA EL ANÁLISIS DEL VIDEO

1. ¿Considera usted que sin la matemática no podría existir la música? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es el emblema de los pitagóricos?

3. ¿Dónde encajarías el emblema de Pitágoras?

4. ¿Qué contiene el emblema de los pitagóricos?
5. Para los griegos ¿qué representa la sección de oro?

6. De acuerdo a lo observado en el video, consideras importante los juegos dentro de las matemáticas. ¿Por qué?

7. En la naturaleza, dónde se encuentra representado el número de oro.

8. ¿Qué idea principal concluyes de la película?

Análisis de las opiniones

En cuanto a que sin la matemática no podría existir la música el 80% consideró que sí, porque la matemáticas es la que da la armonía en la música y el 20% consideró que no porque no le ven ninguna relación.

A la pregunta sobre el emblema de los pitagóricos el 100% lo conoce y lo describieron como un pentágono estrellado; pero al responder sobre donde encajar el emblema de Pitágoras no hubo respuestas, ya que no encuentran donde colocar o como relacionar el emblema.

Para la pregunta No. 4 sobre lo que contiene el emblema de los pitagóricos el 100% manifiesto de acuerdo a lo observado en la película que contiene el rectángulo de oro infinidades de veces.

En cuanto a la representación de la sección de oro para los griegos (pregunta No. 5) el 100% manifiesto que representa la belleza y la escultura representadas en las catedrales, museos y edificios.

En cuanto a la pregunta No. 6 sobre la importancia de los juegos, de acuerdo a lo observado en la película el 100% consideró que es muy importante porque se les convierte en una estrategia básica para el desarrollo de sus habilidades mentales y dan como ejemplo el ajedrez, el billar y béisbol entre otros.

En cuanto a la pregunta No. 7 sobre la representación del número de oro en la naturaleza el 50% manifestó que está representado en las conchas de caracoles y en los cuernos de los rumiantes y el 50% en las conchas de la piña, en las flores y en los árboles.

En cuanto a la pregunta No. 8 sobre la idea principal de la película el 100% manifestó que esta se basa en que la sección áurea o número de oro juega un papel muy importante dentro de las matemáticas ya que ella se encuentra presente en muchas cosas de la naturaleza.

Una vez realizado el taller de sensibilización que tuvo como base la película Donald en el país de las matemáticas se procedió a la aplicación en forma operativa de otros talleres, los cuales se describen a continuación.

TALLER No. 1

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PROPORCIÓN AUREA

OBJETIVOS:

- Adquirir habilidad en la división de un segmento en proporción áurea.

- Dividir segmentos en proporción áurea.

JUSTIFICACIÓN

Con este taller se busca que los estudiantes, desarrollen agilidad y precisión en la división de un segmento en proporción áurea.

ACTIVIDADES:

1. Explicación por parte del docente sobre las formas de dividir un segmento en proporción áurea.

2. Los estudiantes trazarán un segmento cualquiera, para dividirlo en proporción áurea.

3. Socializar el ejercicio anteriormente desarrollado, a partir de indicaciones y construcciones con la participación de los estudiantes, teniendo en cuenta los siguientes interrogantes.

a) ¿Cómo hiciste para lograr dividir en el segmento dado en proporción áurea?
b) ¿Qué utilidad te brinda la división de un segmento en proporción áurea?

CONTENIDO:

Para dividir un segmento en proporción áurea se procede de la siguiente forma:

1. Construimos un cuadrado ABCD, y luego prolongamos el segmento AB para dividirlo en proporción áurea.

2. Ahora hallemos el punto medio del segmento AB y lo denotamos con la letra X.

3. Después procedemos a usar el compás. Lo colocamos en el punto X y con abertura XD, se dibuja un arco que intercepte la prolongación de AB en el punto Z. El punto D del segmento AZ divide a éste en proporción áurea.

$$\frac{A\,Z}{A\,B} = \frac{A\,B}{B\,Z}$$

RECURSOS: Lápiz, borrador, compás, hoja en blanco, regla.

EJERCICIOS:

Dados los siguientes segmentos, dividirlos en proporción áurea.

X Y M N

A B

TALLER No. 2

CONSTRUCCIÓN DE RECTÁNGULOS ÁUREOS

OBJETIVOS:

- Adquirir habilidades en la construcción de rectángulos áureos.

JUSTIFICACIÓN

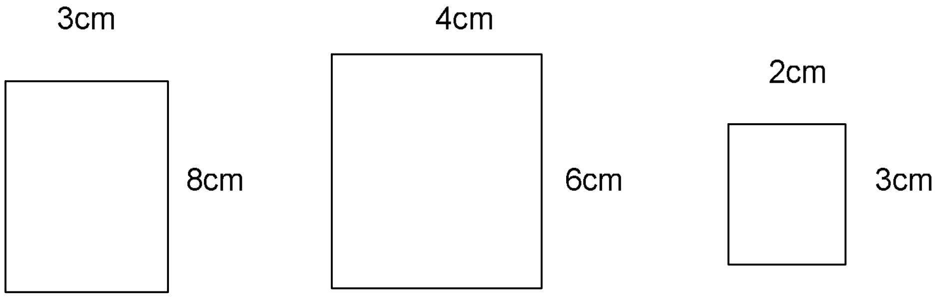
Con este taller se busca que los estudiantes construyan rectángulos áureos a partir de rectángulos dados.

ACTIVIDADES

- Explicación por parte del docente sobre como construir rectángulos áureos.
- Leer detenidamente el taller y luego realizarlo.

CONTENIDO

1. Observar los siguientes rectángulos



2. Ahora mide la anchura y la longitud de cada uno ¿reconoces estos números de alguna unidad que hayas leído?

3. Divide la longitud de cada rectángulo por su anchura. ¿Cuál de ellos es el que más se acerca a rectángulo áureo?

TALLER No. 3

OBTENCIÓN DE UN RECTÁNGULO ÁUREO A PARTIR DE UN CUADRADO

OBJETIVO:

- Utilizar un cuadrado como base para obtener un rectángulo áureo.

JUSTIFICACIÓN:

Con este taller se busca que los estudiantes obtengan un rectángulo áureo a partir de un cuadrado.

ACTIVIDADES

- Explicación por parte del docente, que a partir de un cuadrado, se puede obtener un rectángulo áureo.

- Los estudiantes dibujarán un cuadrado de 1cm de lado y a partir de este obtener el rectángulo áureo.

- Procede a contestar las preguntas que están al final del taller.

CONTENIDO

1. Toma una hoja de papel cuadriculado y en su esquina inferior derecha dibuja un cuadrado de 1 cm. de lado.

2. Luego dibuja otro cuadrado del mismo tamaño justo al lado.

3. Ahora procede a dibujar otro cuadrado que sea el doble de los anteriores.

4. Sigue dibujando cuadrados que sean el doble de los anteriores, hasta que ya no te quede espacio en el papel.

PREGUNTAS

1. ¿Qué pasa con los lados del rectángulo anterior cada vez que añades uno nuevo?

2. Si siguieras dibujando rectángulos así ¿Qué tamaño tendrá el que al dividir la longitud por la anchura, diera exactamente 1,618cm?

Nota: Recuerde que la medida del rectángulo áureo es aquella cuya longitud es 1,618cm.

TALLER No. 4

LA RAZÓN A PARTIR DE PRESENTACIÓN DEL CUERPO HUMANO PARA LLEGAR AL NÚMERO DE ORO

OBJETIVOS

- Hallar el número de oro efectuando medidas entre hombres y mujeres mediante el establecimiento de razones.

- Demostrar como las razones aproximan al número de oro mediante medidas entre hombres y mujeres.

JUSTIFICACIÓN

Se justifica este taller ya que a través de la medición que se haga entre hombres y mujeres, los estudiantes podrán hallar aproximaciones al número de oro; efectuando medidas desde el ombligo hasta la planta de los pies y en el rostro lo cual permite hallar la razón h/n donde h se toma como la altura total y n es la distancia desde el ombligo hasta la planta de los pies.

ACTIVIDADES

1. Explicación por parte del docente sobre las formas para medir en el cuerpo humano y así encontrar la razón.

2. Se escogerán hombres y mujeres para que realicen mediciones, utilizando un metro, desde el ombligo hasta la planta de los pies y en la cara.

3. Una vez realizadas las mediciones, los estudiantes procederán a establecer las razones encontradas.

CONTENIDO:

Para llegar al número de oro a través de la figura humana se procede de la siguiente manera:

- Se efectuarán medidas entre hombres y mujeres, encontrando en ellos la razón h/n donde h es la altura total y n es la distancia que hay desde el ombligo hasta la planta de los pies.

- Nuevamente se realizarán medidas, pero ahora en el rostro considerando h la altura de la cabeza y n la parte de la frente desde la nariz hasta la barba.

RECURSOS: Hombres, mujeres, metro, lápiz, borrador, hoja en blanco.

EJERCICIOS: Reunir por parejas estudiantes para que ellos realicen mediciones y luego establezcan las razones encontradas.

TALLER No. 5

CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR CONOCIENDO UNO DE SUS LADOS

OBJETIVO:

- Construir un pentágono regular conociendo uno de sus lados.

JUSTIFICACIÓN:

Con este taller se busca que los estudiantes, construyan un pentágono regular conociendo uno de sus lados, lo cual le contribuye la construcción de polígonos regulares.

ACTIVIDADES:

1. Explicación por parte del docente sobre la construcción de un pentágono regular.

2. Los estudiantes trazaron un segmento cualquiera, como uno de los lados del pentágono.

CONTENIDO:

Segmento de longitud L_1

1. Con la longitud L_1 del lado conocido, dibújese el segmento AB contenido en una recta horizontal indefinida.

2. Por el extremo B del segmento, levántese un perpendicular sobre la que deberá medirse la longitud L1 para determinar el punto P.

3. Obténgase el punto medio M del segmento AB y enseguida únase rectilíneamente los puntos M y P siendo MP la hipotenusa del triángulo rectángulo MBP que tiene por catetos L_1 y $L_{1/2}$.

4. Con centro en M y radio MP, trasládese la hipotenusa hasta la prolongación del segmento dado, con lo cual se conoce el punto N. El segmento AN deberá resultar igual en magnitud a la diagonal del pentágono ya que la presente construcción se verifica de acuerdo al trazo de la figura, el segmento resultante AN, ha quedado dividido en media y extrema razón, dado que el segmento AB es media proporcional entre el AN y el BN.

5. Usando el compás con centro en A y abertura AN, procédase a trasladar esta diagonal hasta la mediatriz que pasa por M, con lo que se obtiene el vértice D, opuesto al lado conocido y siendo el segmento MD por definición.

6. Tomando con el compás la magnitud L_1 dada y con centros en D, A y B se trazan pequeños arcos cuyos encuentros producen los puntos C y E; la unión conveniente entre los vértices B, C, D, E y A nos conduce al pentágono buscado.

TALLER No 6

CONSTRUCCIÓN DE UN HEXÁGONO REGULAR CONOCIDA LA MAGNITUD L_1 DEL LADO

OBJETIVO:

- Construir un hexágono regular conociendo la magnitud L_1 del lado.

JUSTIFICACIÓN:

Se justifica este taller para construcción de un hexágono regular, conociendo la magnitud L_1 del lado, se busca que los estudiantes construyan polígonos regulares.

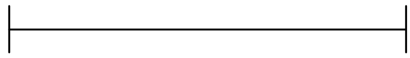
ACTIVIDADES:

1. explicación por parte del docente sobre la construcción de un hexágono regular.

2. Los alumnos estudiarán el contenido del taller y procederán a realizarlo.

CONTENIDO:

A L_1 B

Segmento AB  de longitud L_1

1. Dibújese el segmento dado sobre una horizontal R indefinida, determinando enseguida la mediatriz OM y estando el punto O definido en el vértice del

triángulo equilátero AOB y localizado mediante los arcos circunferenciales AO y BO con centro en B y en A respectivamente.

2. El punto O es el centro de la circunferencia en la cual queda inscrito el hexágono ya que, como se sabe, el lado de este polígono es igual en magnitud al radio de la mencionada circunferencia. Por lo tanto, con centro en A y abertura de compás igual al segmento AB = OA = OB, descríbase la circunferencia, sobre la cual deberá trasladarse sucesivamente, por medio del compás, el lado conocido de magnitud $L_{1.}$

3. Unir por medio de líneas rectas los puntos B, C, D,… etc. obtenidos en el paso anterior, utilizando para esto línea continua gruesa, como resultado, obtenido así el hexágono buscado.

CONCLUSIONES

- Los estudiantes algunas veces mostraron dificultad para dar un concepto desde su propia construcción.

- Los estudiantes mostraron dificultad para responder acerca de donde encajaría el emblema de los pitagóricos.

- Los estudiantes siempre utilizaron materiales didácticos para realizar los talleres.

- Los estudiantes siempre se mostraron motivados para la realización de los talleres y más aun cuando contaron con la orientación del profesor.

- La socialización de los talleres de investigación personal, permitió que los estudiantes siempre mostraran que existen diferentes formas a las señaladas por el docente para llegar a la construcción de polígonos regulares.

RECOMENDACIONES

- Para el grado noveno los profesores deben incluir el segmento áureo como tema de estudio en su programación.

- Que el docente oriente a los estudiantes, de que manera está presente el número de oro en nuestra naturaleza.

- Que el docente destaque la importancia que tiene el número oro, en los juegos que a diario practican los estudiantes.

BIBLIOGRAFIA

ARDILA, Victor Hernándo. Matemáticas Educación Básica secundaria. Santa Fe de Bogotá. 1998. ED. Voluntad.

CASTILLO, Eugenia. Enciclopedia ilustrada. Bogotá, 1998. Círculo de lectores.

CAMBEROS, Alberto. Dibujo Lineal Geométrico. México, 1975. Ed. Porrúa S.A.

HEMERLING, Edwin. Geometría Elemental. California 1994.

Programa Regional. Universidad Francisco José de Caldas en convenio con la Universidad de Sucre. Sincelejo (Sucre), 1998. Taller de didáctica de las matemáticas. Múltiples facetas de la sucesión de Fibonacci.

VERA, Francisco. Científicos Griegos. Ed. Tolle, Lege Aguilar. Madrid (España). 1970.

CUADRO No. 1

Registro de aspectos observados en estudiantes durante el desarrollo de talleres.

DIARIO DE CAMPO	TALLER 1			TALLER 2			TALLER 3			TALLER 4			TALLER 5			TALLER 6		
	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N
Utiliza conceptos previos para el desarrollo del taller.	15			15			15			15			15			15		
Utiliza materiales didácticos acordes con el tema.	15			15			15			15			15			15		
Relaciona conceptos de cada taller a partir de su propia construcción.	13	2		13	2		13	2		10	5		10	5		10	5	
Aborda la situación con claridad.	9	6		15			10	5		10	5		10	5		10	5	
Comunica ideas matemáticas.	15			15			15			15			15			15		
Propone estrategias de solución.	9	6		15			10	5		10	5		10	5		10	5	
Usa tecnología de conceptos matemáticos.	15			15			15			15			15			15		
Utiliza distintas formas de representación.	15			15			15			15			15			15		
Formula generalizaciones a partir de teorías estadísticas.	13	2		13	2		10	5		10	5		10	5		10	5	

DIARIO DE CAMPO	TALLER 1			TALLER 2			TALLER 3			TALLER 4			TALLER 5			TALLER 6		
	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N	S	AV	N
Utiliza conceptos previos para el desarrollo del taller.	15			15			15			15			15			15		
Utiliza materiales didácticos acordes con el tema.	15			15			15			15			15			15		
Relaciona conceptos de cada taller a partir de su propia construcción.	13	2		13	2		13	2		10	5		10	5		10	5	
Aborda la situación con claridad.	9	6		15			10	5		10	5		10	5		10	5	
Comunica ideas matemáticas.																		
Propone estrategias de solución.																		
Usa tecnología de conceptos matemáticos.																		
Utiliza distintas formas de representación.																		
Formula generalizaciones a partir de teorías estadísticas.																		

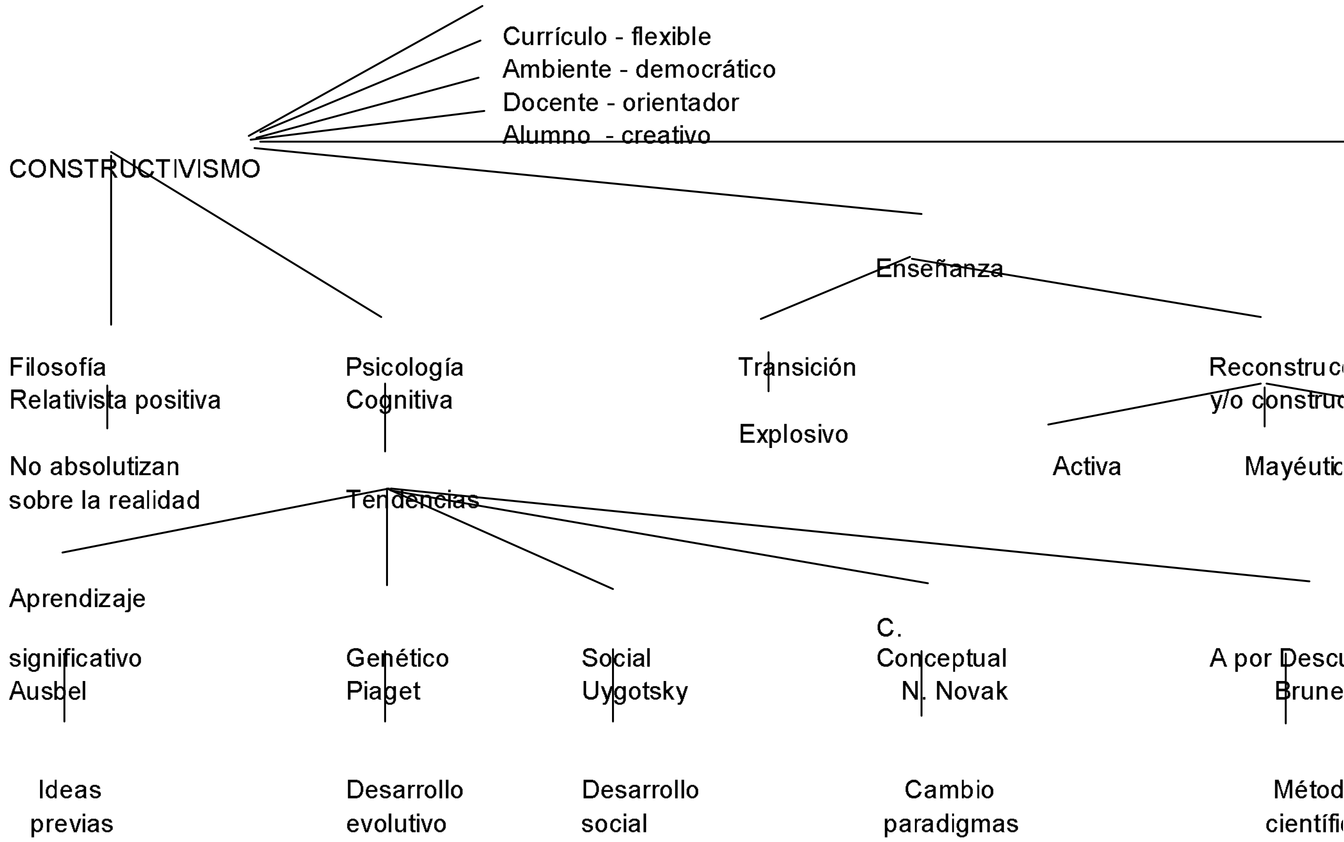


Figura: Mapa conceptual sobre CONSTRUCTIVISMO.