DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE ACTIVIDADES PRÁCTICAS QUE CONDUZCAN A RELACIONES FUNCIONALES: Una experiencia de aula

ATENCIO OROZCO MARIO ALBERTO
MERCADO ACOSTA VICTOR MANUEL
VELILLA RUIZ ANUAR SEGUNDO

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SINCELEJO SUCRE
2005

DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE ACTIVIDADES PRÁCTICAS QUE CONDUZCAN A RELACIONES FUNCIONALES: Una experiencia de aula

ATENCIO OROZCO MARIO ALBERTO
MERCADO ACOSTA VICTOR MANUEL
VELILLA RUIZ ANUAR SEGUNDO

Trabajo presentado como requisito para optar
al título de licenciado en matemáticas

TULIO AMAYA DE ARMAS
Director

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SINCELEJO SUCRE
2005

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

1. Jurado

____

2. Jurado

____

3. Jurado

Sincelejo (Sucre), Junio 20 de 2005

A Dios sobre todas las cosas,en memoria a mi padre y en honor a mi madre, A mis dos hermanas y a mi novia; quienes con su apoyo hicieron posible este logro

Mario Alberto Atencio Orozco

A Dios, porque gracias a el todo es posible,
a mis padres, la razón de mi lucha,
a mis hermanos quienes aportaron su granito de arena,
a mi novia que con su colaboración
y sus palabras me motivaron a seguir adelante; y a
todas aquellas personas, las cuales hicieron posible
que en el día de hoy triunfe y sea un profesional.

Anuar Segundo Velilla Ruiz.

A mis padre y a mis hermanos,
quienes de una forma u otra siempre me apoyaron
y me brindaron una voz de aliento cuando era necesario
motivándome sus palabras a seguir adelante; y a
todas aquellas personas, las cuales hicieron posible
que en el día de hoy triunfe y sea un profesional.

Víctor Manuel Mercado Acosta

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a:

Dios, por habernos dado la sabiduría, el apoyo y la paciencia para la realización de este proyecto.

Los profesores y directivos del programa por sus orientaciones valiosas en el desarrollo de nuestra carrera.

Al profesor Tulio Rafael Amaya de Armas por su valiosa orientación para la realización de éste trabajo.

A Docentes del Gimnasio Altaír De La Sabana y a los Estudiantes del grado 11 del 2004 por haber facilitado el desarrollo de esta investigación.

A nuestros padres, familiares y demás personas que de una u otra forma hicieron posible nuestra formación profesional.

CONTEIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Constantemente el hombre vivencia fenómenos en los cuales están presentes aspectos relacionados con la variación, con el cambio y las funciones. Estos se pueden observar en la naturaleza, en la sociedad y en muchas situaciones cotidianas.

En época de antaño el estudio de este conjunto de fenómenos originó dentro del campo de las matemáticas lo que en la actualidad se conoce como “El cálculo” : una de las ramas más importantes de las ciencias exactas; cuya prioridad o propósito fundamental es cuantificar o medir los cambios que se producen en dichos fenómenos, con lo cual se ha dado solución por mucho tiempo a problemas que involucran relaciones funcionales, Figueroa (2002).

Resolver problemas de cambios en términos generales “consiste en comprender la existencia de al menos dos variables involucradas en la situación, establecer su papel de dependencia o independencia, mirar sus relaciones y establecer una ley o patrón que permita medir los cambios que estas sufren en un determinado momento”, Flores (1997).

Se puede observar que a nivel de aula los estudiantes al ser enfrentados a este tipo de situaciones manifiestan falencias, las cuales impiden dar una solución adecuada a tal situación, quizá se deba a que en la actualidad muchos docentes abordan el estudio de funciones, privilegiando el sistema algebraico, dejando a un lado el sistema figural y gráfico entre otros; o también, se deba, al no tener la oportunidad de visualizar los cambios que se presentan en las variables involucradas de dichas situaciones, estas fueron las posibles causas que enmarcaron el inicio del presente trabajo, el cual busca posibilitar el estudio y comprensión de funciones, apoyándonos en practicas de laboratorio, las cuales podrían facilitar la comprensión del tema: pasar de una representación tabular y gráfica de una función a una figural y viceversa.

El presente trabajo se basó en dos tipos de talleres; Talleres de laboratorio y talleres de profundización ambos guiados por los proponentes. Mediante estos se pretendió recoger información que permitiera establecer cómo los estudiantes abordan las situaciones problemas, utilizan y relacionan conceptos, comunican ideas y como plantean estrategias de solución a las situaciones planteadas; como el paso de un sistema representación figural a uno gráfico y viceversa o del tabular a cualquiera de los dos anteriores, entre otros.

El trabajo está organizado en ocho partes como veremos a continuación:
1. EL PROBLEMA: en este se describen dificultades encontradas en los estudiantes y el porque de esta propuesta. 2. ESTADO DEL ARTE: en este se muestra el estado en el cual se haya el conocimiento relacionado con funciones y las bases que dan fundamento al trabajo llevado a cabo con los estudiantes. 3. METODOLOGÍA: en esta se muestra el tipo de estudio y el tipo de análisis que se le realizó a los resultados obtenidos mediante las actividades que se realizaron. 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS: en este se describen y analizan los resultados obtenidos con las actividades realizadas a los estudiantes. 5. CONCLUSIONES: en esta se dejan ver los aspectos más notorios de este trabajo. 6. ALGUNAS RECOMENDACIONES: en esta se plantean puntos de vistas que buscan el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas. 7. BIBLIOGRAFÍA: muestra las fuente de información que se usó en este trabajo. 8. ANEXOS: en estos se muestran las actividades y algunos de los resultados obtenidos.

1. EL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Analizando algunos estudios experimentales realizados por investigadores en educación matemática como Hitt y Páez (2003), se ha detectado una problemática relativa a algunas dificultades que tienen los estudiantes en la construcción del concepto de función, manifestadas al intentar hacer el paso de una representación semiótica a otra. Por ejemplo, resulta bastante difícil para estudiantes y profesores de matemáticas de la básica, media y hasta de nivel superior, hacer el paso de una representación figural que conduzca a una relación funcional a una representación gráfica de esta misma situación y viceversa.

En el primer acercamiento tratando de entender algunas de las dificultades que tienen los estudiantes relacionadas con la conceptualización y el aprendizaje del concepto de función, se realizó una prueba a estudiantes del grado once y a los profesores de matemática del Gimnasio Altaír de la Sabana del Municipio de Sincelejo, a los cuales se les presentaron situaciones relacionadas con un recipiente que se llena con un líquido que se vierte de manera constante dentro de este, se les solicitó realizar una gráfica de altura del líquido en función del tiempo, así como la gráfica del área transversal de la superficie del líquido al interior del recipiente a medida que transcurre el tiempo, además, en otra situación se les dio una gráfica y se les pidió dibujar un recipiente en el que al verter un líquido dentro de él resultara una representación figural de la representación gráfica (Ver anexos F y G); de esta prueba se podría inferir que la gran mayoría de esas dificultades pueden estar relacionadas con las propias dificultades que tienen los profesores en el manejo de la temática, es decir, dificultades de tipo epistemológico, más que de tipo didáctico o cognitivas. Hitt (Ibíd.) establece que “precisamente, algunos profesores de matemáticas de enseñanza media y de enseñanza superior, intentando simplificar las dificultades de aprendizaje, lo que promueven es un obstáculo que será mucho más difícil de erradicar por los estudiantes. Algunos de esos profesores, en su intento de simplificación, cometen ellos mismos errores que de alguna manera, a través del tiempo se vuelven conflictivos para sus estudiantes y para ellos mismos, propiciando tanto en unos como en otros, obstáculos de aprendizaje”. Lo anterior pudiera llevar a pensar que el problema es fácil de resolver, con un poco de entrenamiento tanto a docentes como a discentes. Pero, la historia de la matemática ha mostrado que el concepto es algo complejo y que probablemente los obstáculos que tuvieron algunos matemáticos aparecerán en el aula de matemáticas en cualquier contexto, en cualquier época. “Aún más, considerando que el problema es complejo, y que hubo muchos matemáticos que no lograron sobrepasar obstáculos como el generado por el infinito potencial para concebir el infinito actual, es de suponerse que algunos profesores de matemáticas pudieran tener problemas en el aprendizaje de temas relacionados como el que nos ocupa”, Hitt y Páez (2003).

Aunque cabe anotar que las dificultades relacionadas con el aprendizaje de tal concepto, están relacionadas con algunos aspectos tales como la madures que algunos profesores de matemáticas consideran necesaria para el entendimiento de ese concepto, el cual según Hitt, debe darse en el marco de la reflexión sobre las mismas dificultades. A continuación se muestran algunas de esas dificultades que se han detectado a través de estudios experimentales en educación matemática y que fueron ratificadas en la prueba diagnóstica que se aplicó en la institución mencionada anteriormente, (Ver formato en el anexo G):

- Problemas con el uso de diferentes representaciones semióticas de las funciones. Relacionado con la poca costumbre de usar concientemente tales representaciones.

- Dificultades para pasar de un sistema de representación figural a uno gráfico y viceversa.
- Dificultades para reconocer en una situación que conduzca a una relación funcional, una representación figural a que esta pueda conducir, o dada la representación figural, realizar una representación gráfica de ésta.
- Idea del infinito como la realización paso a paso o simplemente no concebirlo.
- Conflictos en la escogencia de las variables independiente y dependiente a la hora de hacer una representación gráfica de una relación funcional.
- Manejo de conceptos como concavidad en la gráfica de una función a la hora de pasar de una situación figural a una gráfica.

Por lo anterior se considera importante realizar un trabajo tanto con estudiantes, como con docentes, donde se les enfrente a situaciones que conduzcan a relaciones funcionales, que permita plantear alternativas de solución, haciendo uso de herramientas didácticas, como trabajo con situaciones concretas, que dé cabida de la mejor manera posible a la comprensión de problemas del contexto que involucren funciones presentadas mediante situaciones cotidianas y analizar entonces cuales dificultades persisten luego del proceso de intervención.

Considerándose además, que para dar solución a estas dificultades se hace necesario comprender conceptos como: variables, dependencia e independencia de variables, proporcionalidad, pendiente de una curva en un punto etc, y contar con procedimientos que permitan hallar áreas, volúmenes, perímetros y velocidades entre otros; como por ejemplo poder relacionar la representación de una relación funcional con su representación figural y viceversa, que es uno de los aspectos fundamentales de este trabajo. Esto puede permitir realizar procesos como abstracción, modelación, generalización, interpretación y comprensión. Que se consideran fundamentales en el desarrollo del pensamiento variacional.

Todo lo anterior lleva a pensar que la dificultad al tratar de pasar de un sistema de representación a otro, quizá radique en la falta de familiarización con tales situaciones que involucren algunos procedimiento, y procesos necesarios para analizar algunas transformaciones básicas cuando se trabaja con relaciones funcionales, además de los ya mencionados anteriormente, que se han manifestado a través de la historia del estudio de las matemáticas.

A raíz de esta problemática nace la siguiente inquietud:

¿cómo debería ser una propuesta de trabajo de aula que posibilite a los estudiantes la comprensión de situaciones que involucren relaciones funcionales y a pasar del sistema de representación figural al sistema gráfico y viceversa, y los acerque a procesos que les posibilite acceder al desarrollo del pensamiento variacional?

1.2 JUSTIFICACIÓN

Debido a la importancia que tienen las funciones y el cálculo en el estudio de fenómenos físicos, biológicos, sociales, políticos, y de lo fundamental que resulta comprender como se pasa de un sistema de representación a otro para enfrentar con éxito las pruebas de estado, es apropiado realizar un estudio de esta naturaleza, debido a que con este se podrían beneficiar los estudiantes ya que llegarían con cierto entrenamiento de situaciones que involucren relaciones funcional. Además, teniendo en cuenta el pensamiento variacional como un eje fundamental en la educación, lo cual permite afianzar en la comprensión de conceptos como la proporcionalidad, funciones, variables, dependencia e independencia de variables y manejo de procesos como la modelación, abstracción, generalización, entre otros, que les permitan en un determinado momento dar solución a situaciones problemáticas de su vida. Se puede ver entonces la necesidad de estos conocimientos en los jóvenes no como estudiantes únicamente, si no como personas en formación y futuros profesionales, debido no solo a los múltiples usos del concepto de función en contextos cotidianos, sino también a los beneficios posteriores que pueda traer a un estudiante en la universidad si tempranamente ha tenido trabajo con tal concepto.

Los lineamientos curriculares plantean que una de las maneras iniciales de estudio y desarrollo del proceso de la variación en el ámbito escolar, es a partir del abordaje de situaciones problemas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambios y variación de la vida practica, ya que en el desarrollo de solución de las mismas, el estudiante se acerca a procesos procedimientos y acciones que les posibilitan acceder al desarrollo del pensamiento variacional.

Con miras a disminuir en el mayor grado posible estas falencias, y a posibilitar de un modo mejor el estudio y comprensión de las matemáticas se estará realizando este trabajo basado en la realización de talleres prácticos en el laboratorio de física.

Lo cual implica ventajas como:

- Hace más fácil la identificación de las variables involucradas en los problemas relacionados con funciones.

- Genera motivación en los estudiantes y hace que el aprendizaje sea mas significativo y además, se trabaja con situaciones concretas.

- Permite un mejor acercamiento hacia la solución de problemas que involucran funciones apreciando de modo real las variaciones que se producen entre las variables relacionadas.

- Tener la posibilidad de analizar gráficas con un alto nivel de abstracción antes de enfrentar las pruebas de estado.

El trabajo se considera pertinente porque:

- La temática abordada es de gran importancia, no solo en la escuela, sino también a nivel superior, y además permite el uso de procedimientos, de preconceptos y de otros campos como la física, los que ayudan a desarrollar el pensamiento variacional.

- Permite realizar análisis profundos de situaciones, a través de su representación gráfica, lo que es muy favorable para los estudiantes debido a que en las pruebas de estado, deben hacer análisis gráficos de las situaciones que se les presentan, a la hora de abordarlas

- Las situaciones problemáticas hoy día se consideran prioritarias en el currículo de matemáticas, y por ello deben ser objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.

Se considera viable porque:

- Se cuenta con el apoyo de las directivas del Gimnasio Altaír de la Sabana, para su aplicación y desarrollo .
- Se cuenta con un laboratorio de física el cual se puede adecuar para llevar a cabo las pruebas-talleres de matemáticas que se requieran para realizar el trabajo y además la ejecución de éste.

- La ejecución de este trabajo no exige un alto presupuesto.

- Se cuenta con recurso humano, suficiente material bibliográfico y tiempo disponible para su ejecución.

1.3 OBJETIVOS

OBJETVO GENERAL

Favorecer el desarrollo de pensamiento variacional mediante actividades prácticas que conduzcan a relaciones funcionales, y el uso de representaciones semióticas de funciones, en estudiantes del grado once del Gimnasio Altaír de la Sabana de Sincelejo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proponer un trabajo de aula que dé pie a la comprensión de problemas que involucren relaciones funciones, mediante actividades prácticas.

- Fomentar el desarrollo del pensamiento variacional, analizando el comportamiento de los gráficos que describen las situaciones planteadas en las actividades prácticas.

- Enfrentar a los estudiantes a situaciones que conduzcan a relaciones funcionales, donde les toque hacer el paso de una representación figural a una gráfica y viceversa.

- Proponer actividades donde se pueda apreciar la dependencia e independencia de variables.

2. ESTADO DEL ARTE

2.1. ANTECEDENTES

Con la incursión de la sicología y los estudios profundos en educación matemáticas, en los últimos años han sido muchos los cambios que se han suscitado en la enseñanza y aprendizaje de esta. Así mismo, muchos los investigadores interesados en indagar sobre diferentes tópicos relacionados con su enseñanza y aprendizaje. Precisamente han sido los resultados de dichas investigaciones los que han llevado a considerar otras formas de enseñar y a determinar posibles causas de las dificultades para comprender algunos conceptos matemáticos fundamentales a nivel escolar. Uno de estos tópicos, objeto de estudio en esta investigación, es el de las dificultades que se han presentado en la humanidad a través de la historia relacionados con el aprendizaje del concepto de función y en especial el paso de una representación semiótica a otra. Se presentarán a continuación algunos de los trabajos que se consideran se relacionan mejor con el nuestro:

☺ Estudio elemental de funciones: presentado como trabajo de grado a la Universidad de Sucre, en el programa de licenciatura en matemáticas, por Tomas Martínez Castillo (1985).

  En esta monografía se busca que el estudiante esté familiarizado con las funciones, diferentes tipos de funciones, gráfica de funciones, y podrá manejar las operaciones definidas entre ellas, pero también se busca que sepa aplicar esto a conceptos y terminologías en las situaciones de experiencia personal.

- Gráfica de algunas funciones con regla y compás: presentado como trabajo de grado a la universidad de sucre, en el programa de licenciatura en matemáticas, por Jorge Padilla Choperena y José Francisco Puerto (1989).

  En el cual se buscaba adecuar una guía fundamental para introducir a los estudiantes en el estudio de gráfica de funciones, ya que en ella se presentan formas o métodos para graficar algunas funciones con el uso de regla y compás, basados en argumentos y representaciones geométricas que permitan una mejor asimilación a la aprehensión y comprensión del proceso que involucra graficar una función.

- Función y algunos problemas de la vida diaria que se pueden modelar a través de una función: presentado como trabajo de grado a la universidad de sucre , en el programa de licenciatura en matemáticas por Jaime Guaso Herázo (1999).

  Con este trabajo se pretende dar a conocer de una manera sencilla y entendible, todos aquellos elementos que componen el concepto de función. Para ello se ha recurrido en la mayor parte de este trabajo a situaciones y ejemplos para la construcción de algunas definiciones que hacen parte de la teoría de función. Además, con este trabajo no se pretende presentar una teoría rigurosa, sino que ella sirva a estudiantes que se encuentren en último año de bachillerato y para aquellos que incursionan en los primeros semestres de la Universidad, con el objeto que estos tengan una base sobre la teoría de funciones y que ellos a partir de sus lecturas y ejercitación planten y desarrollen problemas que conlleven a un modelo funcional.

- indicar Principales ideas de las Matemáticas que contribuyen a la creación del cálculo presentado por Rafael Álvarez (1998) como trabajo de grado a la universidad de sucre.

Trata de explicar que no sólo es posible trazar la trayectoria del desarrollo en un intervalo de 125 años durante el cual las ideas fueron siendo formuladas, sino también ciertas tendencias enemigas de este desarrollo.

- Problemas de optimización , con Cabri, presentado por Jaider Alberto Figueroa Flórez y Jaime Eduardo Muñoz Acosta como trabajo de grado realizado en la Universidad de Sucre.

Se buscaba proponer n trabajo de aula que contribuya a posibilitar la comprensión de problemas de optimización a través de talleres con el uso del programa educativo **cabri geometre** a fin de posibilitar el desarrollo del pensamiento variacional durante la resolución de los mismos.

- Una experiencia de aula sobre la comprensión de función lineal en estudiantes de noveno grado por Sandra Arévalo, Adriana Orozco, Néstor Fernando Guerrero, en el Liceo Freinet, Colegio Nuestra Señora del Pilar y Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El objetivo principal fue diseñar, implementar y sistematizar una unidad didáctica para abordar la noción de función lineal bajo el marco de la enseñanza para la comprensión. (dado a conocer en las Memorias del V Encuentro de Matemática Educativa, desarrollado en Bucaramanga).

- Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones por Edgar Guacanemes, de la Universidad de los Andes “una empresa docente” .

Este trabajo realizado particularmente en los cursos de precálculo, con funciones de: primer, segundo y tercer grado. Así definidas contempla asuntos y procedimientos tales como construir sus gráficas cartesianas, calcular los ceros de la función, examinar el crecimiento de las variables. En síntesis el trabajo prima sobre la variación conjunta. (presentado en el IV Encuentro de Matemática Educativa desarrollado en la ciudad de Manizales).

☺ Graficación de funciones a través de la calculadora (Luis Moreno Armella; Investigador del CINVESTAV - México).

En este trabajo se aborda el estudio de la graficación de funciones considerando la calculadora como una ventana a través de la cual se estudia una fenomenología visual: Las gráficas de las funciones. Esto deberá dar un conocimiento sustancial de cómo funciona el plano cartesiano, cuando lo vemos a través de las ventanas de la calculadora. Además, se desarrolla una serie de estrategias de graficación propias del contexto que ha de combinarse con las estrategias analíticas que permitan confirmar los resultados que sugieran las representaciones visuales. Sin embargo a medida que se van desarrollando mejores estrategias de graficación, el estudiante sentirá que esa intuición educada y respaldada por la tecnología, le da un criterio suficientemente sólido para saber si necesita o no de la confirmación analítica.

❖ El papel de la variación en las explicaciones de los profesores en situaciones escolares por Evelia Resendiz y Ricardo Cantoral de la Universidad Autónoma De Tamaulipas de México.

El objetivo era conocer el papel que juega la variación en las explicaciones del profesor y cuales son los cambios que en sus explicaciones hacen ellos cuando tratan con una noción compleja.

En conclusión encontraron que las explicaciones es uno de los medios que utiliza el profesor para hacer comprender o dar sentido; Es el objeto de una comunicación, de un debate, una discusión. Estas explicaciones se modifican en la medida que se den las interacciones con los alumnos. Identificamos algunas categorías de la variación, en las explicaciones de los profesores, tales como: Una resta, en la tabulación(variación numérica de los puntos), la grafica(varían puntos notables o puntos genéricos), en el álgebra(la variación de los parámetros), verbal, pendiente de una recta igual al cociente de variación, variación funcional, variación como un incremento infinitesimal, variación diferencial, entre otras.

2.2. MARCO TEORICO

En el presente estudio se enfatiza en la relación entre los sistemas de representación de una relación funcional, y el paso de un sistema a otro. Como base para el desarrollo de esta se tienen en cuenta algunos autores y teorías, los cuales relacionamos en lo sucesivo.

2.2.1 Contexto y aprendizaje significativo

El aprendizaje de las matemáticas como una actividad constructivista, conlleva a trascender de las clases tradicionales - en las cuales los maestros transmiten un conocimiento acabado a un alumno que lo recibe pasivamente - lo que significa, que el alumno tenga la posibilidad de deducir, descubrir, crear conocimientos y desarrollar habilidades matemáticas, en el curso de una actividad social que se les ha propuesto, (Piaget; 1956; en Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas).
Esto lo pudimos observar cuando los estudiantes se enfrentaron a problemas relacionados con funciones en practicas de laboratorio (paso del sistema figural al grafico y viceversa) en donde ellos estaban obligados a crear sus propias estrategias para enfrentar y desarrollar las situaciones planteadas En el mismo sentido Collins (1975), considera que “el aprendizaje no es una manifestación espontánea de formas aisladas sino que es una actitud indivisible conformada por los procesos de adaptación, asimilación, y el equilibrio resultante le permite a la persona adaptarse a la realidad, lo cual constituye el fin último del aprendizaje. Que es en nuestro caso la comprensión de relaciones funcionales en el paso del sistema de representación figural al grafico y viceversa.

Según Ausubel (1978), el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad esta directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee. Ausubel no esta de acuerdo con la forma mecánica en que el alumno aprende las cosas o como se le enseña, según él, el aprendizaje debe estar relacionado con el medio, de tal manera que el alumno pueda estructurar el conocimiento y tener en cuenta la aplicabilidad de este, unificando los conceptos nuevos con los previos.

Para GOMEZ-GRANELL[1] "contextualizar el conocimiento matemático no quiere decir simplemente simular en el aula cualquier actividad más o menos cotidiana para *disfrazar las aburridas matemáticas.* Si se plantea el problema de ir a la tienda en una clase de matemáticas, la mayoría de los alumnos tratarán el enunciado como si careciera de significado sustantivo: sólo está ahí para dar una presentación disfrazada a una serie de variables y relaciones matemáticas".

Desde el punto de vista de este autor, una enseñanza de las matemáticas contextual izada y personalizada implicaría:

- Conocer las representaciones y, las ideas de los alumnos, sabiendo que están vinculadas a un contexto y que, si cambiamos el contexto (la formulación del problema, por ejemplo), pueden no actualizarse ciertos procedimientos, aparecen errores que parecían superados, procedimientos distintos o menos complejos, etc.
- Trabajar el mismo concepto matemático en diferentes contextos concretos, ayudando a los alumnos y alumnas a distinguir el concepto estrictamente matemático, idéntico en los distintos contextos, de los otros aspectos de la situación.
- Propiciar el uso tanto de procedimientos propios y estrategias personales como de expresiones simbólicas, y el paso de unas a otras en diferentes contextos,

---

1 Gomez-granell, Carmen. Las matemáticas en primera persona. México. 1998.

de forma que los alumnos y alumnas puedan dotar de significado a los símbolos matemáticos.

- Plantear la enseñanza en una variedad de contextos relevantes, científica y socialmente significativos, que potencien la implicación personal de los alumnos y que les permitan adentrarse en la complejidad de los fenómenos, y usar las matemáticas para interpretarlos. Éste sería uno de los sentidos de un planteamiento interdisciplinario
- .Proponer la resolución de problemas, no tanto como contexto de aplicación de conocimientos ya adquiridos, sino como una media para plantear contextos diferentes que exijan la actualización de procedimientos y estrategias de resolución y permitan la generalización.
- Guiar el proceso de aprendizaje de los alumnos en función de unas finalidades, objetivos y metas bien delimitados, y ayudar a los alumnos y alumnas a tomar conciencia, de dichas finalidades y de su propio proceso de aprendizaje.

2.2.2 Trabajo en equipo

Se necesita un hecho problemático que estimule al alumno a interrogar y a reflexionar, que despierte su interés, su disposición a estudiar un determinado contenido . Lo que mas fácilmente originará esa motivaciones podría ser un hecho del ámbito de la vida, de la cual se tenga referencia por alguna experiencia de la vida, ó de los intereses del alumno, siempre que se consiga hacerlo realmente `cuestionable para él. La motivación es codeterminada por factores inmanentes a la personalidad, a la vitalidad, al talento, así como por factores situacionales de tendencia, intención y transformación del objeto. Muchos objetos no interesan al alumno de por si: necesario transformarlos para que se le conviertan en problema que quisieran resolver, explorar e investigar. Es preciso crear una situación que de lugar a un interrogante cuya solución bucearan el maestro y el alumno, Schiefele (1963).

Con el trabajo realizado en grupos, solo será posible lograr un aprendizaje satisfactorio, si están dadas diversas condiciones, tales como una buena colaboración, una relación amistosa y el reconocimiento del trabajo que realizan los otros.

La ventaja del grupo en cuanto al rendimiento, consiste en el principio mecánico de la adición de fuerzas y en el de la compensación de errores se obtiene si se cumplen las condiciones de comunicación, de aceptación e independencia. Esto significa que dentro del grupo ha de ser posible un permanente intercambio de ideas. Además, los interrogantes tienen que aceptar suposiciones, observaciones y mediciones de cada uno de los compañeros. Finalmente debe estar garantizada la búsqueda e investigación relativamente independiente y autónoma de cada miembro de cualquier grupo, es decir, que los alumnos menos dotados no han de ser receptivos únicamente P. R Hofslatter (1957).

Una caracterización de las fronteras del entendimiento, está consignada en la obra de Vigotsky con el nombre de ``zona de desarrollo próximo'', como sigue:

... It is the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers...

En adición a esta conceptuación, es conveniente comentar que no es suficiente, aunque si necesario al parecer, que las situaciones planteadas sean percibidas en la frontera del universo semántico para que éstas sean introspectivamente consideradas como problemas por el individuo que así las percibe, faltaría ver si le es de su interés atenderlas.

Es decir, el hecho de que un individuo perciba una situación a la distancia precisa para ser considerada como un detonador epistémico (problema) de sus capacidades, no asegura que éste explote en esfuerzos para resolverlo comprometiendo su voluntad en ello. Pues como es sabido, a pesar de que el detonador es el que inicia la explosión, ésta no se asegura cuando la pólvora está mojada, Hernández (1996)

Al respecto puede decirse que a pesar de que se ubique a un individuo ante situaciones que a su propio juicio y en el sentido antes descrito éste pudiera considerarlas como problemas, no se asegura el que avance en la dirección de intento de solución. Aun más; los problemas como detonador epistémico en todo caso, están en la posibilidad causal de comprometer la voluntad humana en la dirección que éstos proponen, pero no de determinarla, ni en su concreción ni en los resultados de la acción.

En un dominio cualquiera, existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones. Este potencial de aprendizaje que se actualiza en la interacción social, define uno de los conceptos centrales de la teoría de Vygotsky: *la zona de desarrollo próximo*. La zona de desarrollo próximo es una componente crucial del proceso de desarrollo porque presagia y prepara lo que el niño más tarde realizará por sí solo: "lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro, lo podrá hacer solo mañana". (...) el aprendizaje antecede al desarrollo: la zona de desarrollo próximo asegura la vinculación entre ambos. También las interacciones con los pares más competentes, lejos de frenar el desarrollo de un pensamiento autónomo, le son necesarias, Vygotsky, (1986; citado por Moreno, 2000)

La tesis de Vygotsky significa sobre todo que las capacidades de aprendizaje de un niño no deben ser confundidas con el nivel cognitivo que tiene en un momento dado. Que la zona de desarrollo próximo está determinada por la diferencia entre el desarrollo verdadero de un aprendizaje determinado y su potencialidad para lograrlo.

Según Moreno Armella, "La actividad cognitiva no depende sólo de las propiedades intrínsecas del objeto de conocimiento, sino también de las condiciones sociales en las que tiene lugar. Pero la dimensión epistémica y la dimensión social no están desvinculadas: los objetos de nuestros aprendizajes siempre están social y culturalmente definidos. Se aprende en contextos sociales en donde no hay "objetos intrínsecos", sino objetos que tienen funciones y significaciones atribuidas por la sociedad. Además, la cognición necesita un fuerte soporte de los instrumentos de representación y mediación, como lo son el lenguaje natural y los sistemas semióticos de representación. Desde esta perspectiva, hay que ampliar la noción de cognición y no verla tan sólo como "algo que ocurre en la cabeza del individuo" sino como algo que tiene una indudable connotación sociocultural. La cognición de un individuo se articula dialécticamente con la cognición de los demás, dando lugar a aquello que podemos llamar la *mentalidad* de una sociedad".

2.2.3 Aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo

Se da un aprendizaje colaborativo con la adquisición y construcción de conocimientos o destrezas con la ayuda y la interacción con los compañeros, bien sea esta interacción en forma de críticas, comparación, discusiones sobre los distintos puntos de vistas, etc. Se ha demostrado en varias ocasiones que el trabajo en grupo es favorable al aprendizaje, ya que facilita cambios cognitivos, que conllevan a discusiones que surgen de los distintos puntos de vista de los compañeros y además, los distintos razonamientos que se exponen conllevan a un aprendizaje y una interacción constructivista. Joiner, Miyake, 1990).

De manera general, los resultados de investigación según la cual el trabajo colectivo es un factor de progreso cognitivo. Sin embargo, en ciertas ocasiones de co-acción, los aportes de cada uno de los miembros del grupo son menores que las de los sujetos cuando trabajan solos. (Figueroa y Muñoz, trabajo de grado; Problemas de optimización con Cabri, Pág. 23, 2002.)

En suma sería ilusorio pensar que el simple hecho de poner a trabajar en grupo a los alumnos nos garantiza automáticamente un progreso, si no se modifican sustancialmente las relaciones y los acuerdos de trabajo en el salón de clases. La organización de situaciones tutórales puede permitir a los estudiantes poco aventajados beneficiarse del trabajo con los alumnos más avanzados.

2.2.4 Teoría de situaciones didácticas

Para Brousseau, una situación didáctica se establece en un grupo de alumnos y un profesor que usa un medio didáctico, materiales o instrumentos, con el fin especifico de ayudar a sus alumnos a construir un cierto conocimiento. Para lograr el aprendizaje, el alumno debe interesarse personalmente por la Resolución del problema planteado en una situación didáctica.

Esta teoría pone al profesor en una interacción asimétrica con respecto a los estudiantes puesto que sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y diseño de las buenas preguntas que generen los conflictos cognitivos y socio cognitivos detonadores del aprendizaje; estas buenas preguntas constituyen las soluciones didácticas.

La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. Para Brousseau, La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a Él.
- Debe permitir que el alumno use conocimientos anteriores.

- Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nueva soluciones.
- Debe contener su propia validación.

La resolución de una situación problema supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación problema.

2.2.5 La resolución de problemas

En los años recientes, la investigación en la educación matemática ha tenido como uno de sus intereses principales demostrar que el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no son actividades individuales, aislada de los contextos socioculturales en los que tiene lugar. Que la enseñanza y el aprendizaje siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales que no sólo tienen una influencia sino que determinan la naturaleza del conocimiento construido.

Las investigaciones de Polya y Schoenfeld realizadas desde la perspectiva situada sostiene que los factores sociales y lingüísticos son básicos para el estudio de los procesos de aprendizaje. En particular del aprendizaje de las matemáticas.

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de la matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático (lineamientos curriculares, matemáticas; MEN; Bogotá DC. 1998).
En diferentes propuestas curriculares recientes (como por ejemplo: Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas) se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje principal del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar proceso de pensamiento de más alto nivel. (Figueroa y Muñoz, trabajo de grado; Problemas de optimización con Cabri, Pág. 25, 2002.)

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores Polya y Alan schoenfeld .

Para polya "resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, de salir de una dificultad, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados".
Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

Alan schoenfeld, considera que en el proceso de resolver problema, influyen los siguientes factores:

- El dominio del conocimiento, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.
- Estrategias cognoscitivas, que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir un problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el

ensayo y el error, uso de tablas, la búsqueda de patrones, y la reconstrucción del problema.

- Estrategias metacognitivas, se relaciona con el monitoreo y el control y acciones tales como planear, evaluar y decidir.
- El sistema de creencias, se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de si mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima la persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras.

Para lauren Resnick, los conocimientos almacenados sobre el contenido no son capaces por si solos, de resolver los problemas. Debe existir también un mecanismo que dirija la búsqueda mental por las redes, para recuperar la información. Y debe existir un mecanismo que permita generar y probar de forma activa las nuevas relaciones entre conceptos y estructuras, cuando la información que se necesita no está almacenada exactamente de la forma que se busca. Las teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento un repertorio de estrategias de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados, y a generar relaciones nuevas entre los ítem almacenados en la memoria por separados. Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento, y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que sea capaz de resolver la tarea planteada. Por lo tanto debemos considerar tres aspectos fundamentales que ligan tanto los tipos de estructuras matemáticas que poseen las personas, los tipos de rutinas algorítmicas como las estrategias que poseen para acceder a sus conocimientos: 1) como se presentan los problemas; 2) como se interrelacionan las características del entorno de la tarea con el conocimiento de un individuo; y 3) como se analizan los problemas y como se exploran las estructuras del conocimiento para conseguir asociar a una tarea la información que en un principio no se había relacionado con la misma.

2.2.6 Mediación instrumental y sistemas de representación

La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido nuevos órganos para la adaptación al mundo exterior. Tales herramientas tienen un valor ampliamente significativo en educación y sobre todo en matemáticas, cuando son utilizados como instrumentos.

En la actualidad las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del principio de mediación instrumental que se puede expresar de la siguiente manera: todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico. En este principio convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitavilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional Wertsch, (1993). (Seminario nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, Pág. 57-58, 2002).

En el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas Duval, (1998).

Por representaciones entendemos en el ámbito de las Matemáticas notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características más relevantes. Estas representaciones se clasifican en registros de representación según sus características Duval (1999). Por ejemplo si consideramos el concepto de función , asociado a él existen registros gráficos, algebraicos y tabulares y figural entre otros. Desde luego hay otros pero hasta hoy estos han sido los más usados en la enseñanza. En el interior de cada registro se pueden llevar a cabo procedimientos, es decir, transformaciones de las representaciones se pueden realizar conversiones, que son transformadas de una representación hecha dentro de un registro , en otra representación dentro de otro registro.

En el ejemplo de las funciones una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular de una función en una grafica.

Según concepto de Arbelaez " en un nivel primario las representaciones se forman en una conexión estrecha y de gran fiabilidad con el mundo representado, por ello lo que determina la representación primaria es la realidad percibida. Una vez formadas las representaciones a través del contacto con lo representado, pueden conformarse las representaciones secundarias, ya que las representaciones del mundo también representan lo que podría ser. Es así como una imagen o situación puede tener diferentes interpretaciones.(...) La mente representa lo que el caso es en realidad, lo que fue, lo que en el futuro podría ser, todo esto al mismo tiempo. Por lo tanto, se tienen diversos modelos mentales. Sin embargo, para planificar una acción simple hay que representar simultáneamente la situación actual y la deseada. El modelo cumple así, una función de razonamiento hipotético, representar una situación, aun cuando no se trate de una situación real[2].

Las dificultades asociadas a los cambios de registro, se debe a que en los textos de muchas disciplinas, la información se presenta poniendo en paralelo modos

---

[2] ARBELÁEZ Gómez Martha Cecilia. Las representaciones mentales. Revista De ciencias humanas. N° 29. Pereira. 2002

múltiples de representación. ¡Como si esto bastara para entregar el contenido informacional o conceptual no solo de manera mas atractiva sino también más accesible y más comprensible! En otros términos, se recurre a la actividad cognitiva de conversación de las representaciones como si fuera una actividad natural o adquirida, desde los primeros grados de la enseñanza, por todos los alumnos; como si fuera una actividad sobre la cual los aprendizajes de tratamiento y los aprendizajes conceptuales pueden apoyarse.

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puesta en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Esta comparación puede hacerse directamente o por medio de una tercera representación que "codifique" las representaciones que se quieran comparar.

De acuerdo con esto dos representaciones son congruentes si:

1. Hay la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: A cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental.
2. Univocidad semántica terminal: A cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.
3. Hay el mismo orden de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones: Las organizaciones respectivas de las unidades significantes en las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las representaciones es pertinente solo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones.

Estos tres criterios permiten determinar la congruencia entre dos representaciones semióticamente diferente y que, al menos parcialmente, representan el mismo contenido. Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, hay unidad semántica Terminal y hay el mismo orden posible de aprensión de estas unidades en las dos representaciones. Naturalmente puede no haber correspondencia porque no se cumple ninguno, dos o solo uno de los tres criterios. La no congruencia entre dos representaciones puede ser más o menos grande. La dificultad de conversión de una representación depende del grado de no congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada. (La no congruencia de las representaciones tiene efectos de otro orden: con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión y estos fracasos perduran a pesar de los aprendizajes que hallan requerido de tratamientos en los diferentes registros concernidos).

Las dificultades que se tienen por la no congruencia de la conversión puede además agravarse por el desconocimiento de uno de los registro de representación. Este es el caso particular para los diferentes registros de representación bi-dimensiónales como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas o incluso las tablas, es decir, para todos los registros en los que fácilmente se admite que es suficiente “ver” lo que las curvas, los dibujos o la organización de los números en cuatro casillas “muestran”.

2.2.7 Construcción de conceptos matemáticos

Dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. Acorde con esto para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra, y viceversa. Son éstas las que propiciarán la construcción de los conceptos matemáticos. DUVAL(1998).

Los problemas de representantes dentro de un sistema matemático, de signo y sobre los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, ha generado una nueva noción que es la de registro de representación, cuya idea está totalmente ligada a las funciones, esencialmente para toda actividad cognitiva.

Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: “un sistema semiótico puede ser un sistema de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis”

1- la presencia de una representación identificable.
2- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significada de la representación inicial.

Así sobre la construcción de conceptos matemáticos. Duval establece que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.
Hilber y Lefevre (1986). Acerca de las nociones de “conceptual y procedural knowledje”. En términos del papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas, señalan:

- Conocimiento conceptual es caracterizado como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento.
- Conocimiento procedimental es construido por dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o del sistema de representación simbólico de las

> matemáticas. La otra parte consiste de algoritmo, o reglas, para complementar tareas matemáticas. En resumen conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las conversiones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos, lo cual tiene que ver con las acciones que los individuos realizan con la manipulación de las representaciones al resolver un problema matemático.

Estos mismos autores, relativo a las dificultades que los estudiantes tienen en la resolución de un problema matemático, establecen "que el conocimiento adquirido por un estudiante está contextualizado, el conocimiento contextualizado no busca pero necesita de relaciones fuera del contexto".

2.3 MARCO CONCEPTUAL

Problema: Según Polya Tener **un problema** significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Mathematical Discovery, Polya, 1961)

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: **Un problema** es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980).

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes. En primer lugar la aceptación: el individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas o erógenas, como internas o endógenas. En segundo lugar el bloqueo: los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan. Y tercero, la exploración: el compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto, está convocado a responder. En el campo de las matemáticas una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita, tanto la conceptualización, como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de estilo matemático.

Calculo: es la matemática de los cambios: el cambio de temperatura cuando se enfría el café, el cambio en la altitud cundo subimos una montaña, en nuestro caso el cambio de altura que alcanza el liquido en un instante de tiempo, el cambio en el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente, etc. Dado que el cálculo es la matemática de los cambios nos ayuda a entender el mundo que nos rodea.

Cálculo diferencial es la rama de las matemáticas que se caracteriza por estudiar los cambios que se producen en un fenómeno, por lo cual se denomina la matemática de los cambios.

Una función es una regla matemática que asigna a cada valor de entrada un y sólo un valor de salida.
Parámetros de una función: Son cantidades que al variar afectan al valor de otra; en nuestro caso encontramos variables como: El diámetro que al aumentar o disminuir afecta a la variable tiempo que determina el tiempo de llenado del recipiente

Pendiente es la medida de la razón de cambio de una variable que se halla en función de otra.

En una función lineal la razón de cambio es constante, es decir, entre dos puntos cualesquiera es siempre la misma.

En una función no lineal la razón de cambio no es la misma a lo largo de la misma.

Pendiente de una curva en un punto está definida como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado.

Variación es el cambio que sufre una magnitud o una cantidad.

Concavidad de una función: La localizando de los intervalos en los que la función crece o decrece es útil para hallar su grafica. Además con los intervalos, donde la primera derivada de la función crece o decrece, podemos determinar en donde su curva es hacia arriba o hacia abajo, que es la noción de concavidad, podemos decir que siempre que haya puntos de inflexión

Pensamiento variacional: se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. Esto promueve en el estudiante actividades de observación, registros y utilización de lenguaje matemático, lo cual conlleva a la graficación de situaciones problemas de tipo concreto y a la identificación de variables.

Sistema de representación : Es la forma mediante la cual se muestra o se expresa una idea.

Sistema de representación semiótico : (según Duval) Éste es un registro de representación si permite las siguientes actividades cognitivas relacionadas con la semiósis :

1- La presencia de una representación identificable.
2- El tratamiento de una representación que es la transformación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Sistema de representación gráfico este sistema se caracteriza por representar en el plano de coordenadas una información determinada a través de una gráfica.

Sistema de representación figural entendido como el sistema que se caracteriza por mostrar una situación determinada mediante un esquema o una figura que modele dicha situación.

Formación: formar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o sustituir la visión de un objeto.

Tratamiento: es la transformación de una representación inicial en otra representación Terminal, respecto a una cuestión, un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema.

Conversión: es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro.

3. METODOLOGÍA

En la ejecución de este proyecto se trabajó con pequeños grupos, buscando que cada uno de los estudiantes tuviera la oportunidad de opinar, compartir ideas, discutir y proponer estrategias para dar solución a las diversas situaciones planteadas, referidas al concepto de función y al estudio de la variación. las cuales están enmarcadas dentro de un contexto del cual los estudiantes tienen algún conocimiento previo.

3.1 ACTIVIDADES METODOLOGICAS

- Enfrentar a los estudiantes a situaciones problemas que conduzcan a relaciones funcionales: estas se llevaron a cabo en el laboratorio de física del Gimnasio Altaír de la Sabana.
- Realizar prácticas de laboratorio en el cual se utilicen recipientes que constan de diferentes secciones con diámetros constantes y variables, y agua para realizar las representaciones graficas de altura del líquido contra tiempo y de área transversal del liquido al interior del recipiente contra tiempo
- Discutir con los alumnos los resultados obtenidos y hacer algunas aclaraciones para luego realizar de nuevo una actividad donde los propios estudiantes debían determinar y corregir sus errores.
- Desarrollar en el laboratorio por parte de los alumnos con la ayuda del profesor el llenado de un recipiente que consta de una sección constante y de una sección donde el diámetro aumenta continuamente hasta el final.
- Hacer un análisis en el aula con los estudiantes después de cada actividad.
- Realizar en el aula de modo individual por alumno el paso de un sistema de representación a otro.

Estos talleres se realizaron en el laboratorio, donde los alumnos tuvieron la oportunidad de trabajar en grupos, experimentar las situaciones en vivo, intercambiar ideas, y crear sus propias conclusiones. Con la pretensión de recopilar información que permitiera describir como los estudiantes se enfrentan a los problemas, utilizan y relacionan conceptos, realizan conjeturas, plantean alternativas de solución y generalizan entre otros aspectos.

3.2 ETAPAS DEL TRABAJO

Etapa 1. Diseño y aplicación de prueba exploratoria
Etapa 2. Análisis de prueba exploratoria y construcción de la propuesta
Etapa 3. De intervención en el aula
Etapa 4. Diseño y aplicación de Nueva prueba
Etapa 5. Análisis de resultados

3.3 TIPO DE ESTUDIO

Este trabajo está enmarcado en el enfoque cualitativo y es de carácter descriptivo, ya que se describe como los estudiantes, interpretan relaciones funcionales pasando de un sistema de representación a otro, como el paso del sistema de representación figural al gráfico y viceversa por ejemplo.

3.4 POBLACION Y MUESTRA

3.4.1 Población

La población estuvo conformada por los estudiantes de undécimo grado del Gimnasio Altaír de la Sabana. De la ciudad de Sincelejo.

3.4.2 Muestra

Para la ejecución de este trabajo se trabajará con los cursos del grado undécimo del Gimnasio Altaír de la Sabana de la ciudad de Sincelejo.

3.4.3 Técnicas e instrumentos utilizados

Las técnicas e instrumentos utilizadas en este trabajo fueron:

- Prueba exploratoria a estudiantes, esta prueba consta de dos actividades : la primera actividad, es el llenado de un recipiente de diámetro constante y la segunda, el llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura; con la finalidad de obtener información acerca de las dificultades presentadas en las relaciones funcionales.
- Prueba exploratoria a docentes, esta actividad consta de dos puntos: En el primer punto se propone el paso del sistema gráfico al figural (dibujar el recipiente que describe el gráfico al llenarse); y en el segundo punto se propone pasar del sistema figural al gráfico (realizar el gráfico que describe el área de la sección transversal del liquido a medida que se llena el recipiente); con la cual se buscaba información acerca de las dificultades presentadas en el paso de una representación figural a una representación gráfica y viceversa.
- Talleres guiados, estos se llevaron a cabo en el laboratorio de física en grupos de cinco estudiantes, en los cuales se llevaba a cabo el llenado de recipientes de distintas formas, en donde los alumnos tenían que cuantificar los cambios producidos en la altura que alcanzaba el líquido en relación al tiempo y luego construir el gráfico descrito por ésta situación, como también mostrar la representación gráfica del área transversal de la superficie del líquido a medida que se llenaban los recipientes. La intención es que a medida que los estudiantes son guiados participen en el proceso de resolución, dando respuesta a los cuestionamientos hechos por el orientador, los cuales son basados en las funciones.
- Socialización, con ello se dio aclaración a las dudas y errores presentados en los talleres guiados. Con el propósito de ir incrementando la comprensión en situaciones que involucran variación y por ende funciones.
- Taller de profundización: Aquí se le propuso al estudiante situaciones figurales y gráficas para pasar de un sistema de representación a otro y viceversa.

4. ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se describen las actividades del trabajo llevado a cabo con estudiantes del grado once del Gimnasio Altaír de la Sabana (G.A.S). En este se tiene en cuenta la actitud de los estudiantes ante cada una de las situaciones que se les plantearon. Dichos resultados corresponden a los obtenidos en la prueba piloto o exploratoria, prueba a docentes (en los anexos), talleres guiados de laboratorio, prueba final y socialización de cada una de ellas, como complemento al trabajo de campo.

De forma general se pudo observar que :

Los estudiantes confunden los parámetros de una función, y cuando los identifican, no conciben funciones de parámetros negativos, aunque al realizar el paso de una representación figural a una gráfica les resultaron curvas con parámetros negativos, lo que no pudieron explicar; son pocos los que relacionan el crecimiento o decrecimiento con la pendiente de la curva de la función en un punto, o con la velocidad de crecimiento en el contexto de la situación.

4.1 PRUEBA EXPLORATORIA

Para la realización de la prueba exploratoria se plantearon dos actividades, las cuales se realizaron en forma individual durante una sola sesión de dos horas.

Situación 1:

Desde una destroza se deja verter un líquido, para llenar un recipiente transparente que tiene un diámetro constante, como se muestra en la siguiente figura:

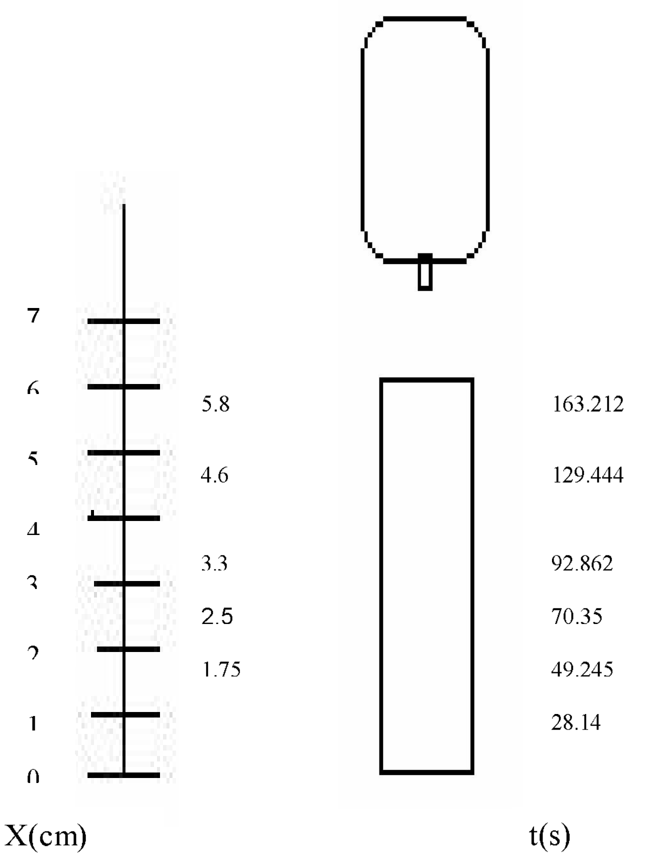


Figura 1, correspondiente a: Actividad I prueba exploratoria

a. Dibujar la gráfica de la altura X(cm) alcanzada por el líquido, contra el tiempo t(seg.), en un sistema de coordenadas, ubicando X(cm) en el eje vertical y t(seg.) en el eje horizontal.
b. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
c. ¿En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor?
d. ¿Cuál sería el tiempo de llenado a los 3 cm y 6 cm de altura respectivamente?
e. ¿Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
f. Calcula la pendiente $m = (X_2 - X_1) / (T_2 - T_1)$ Qué significado tiene este resultado?
g. ¿Qué puedes inferir acerca de esta situación?

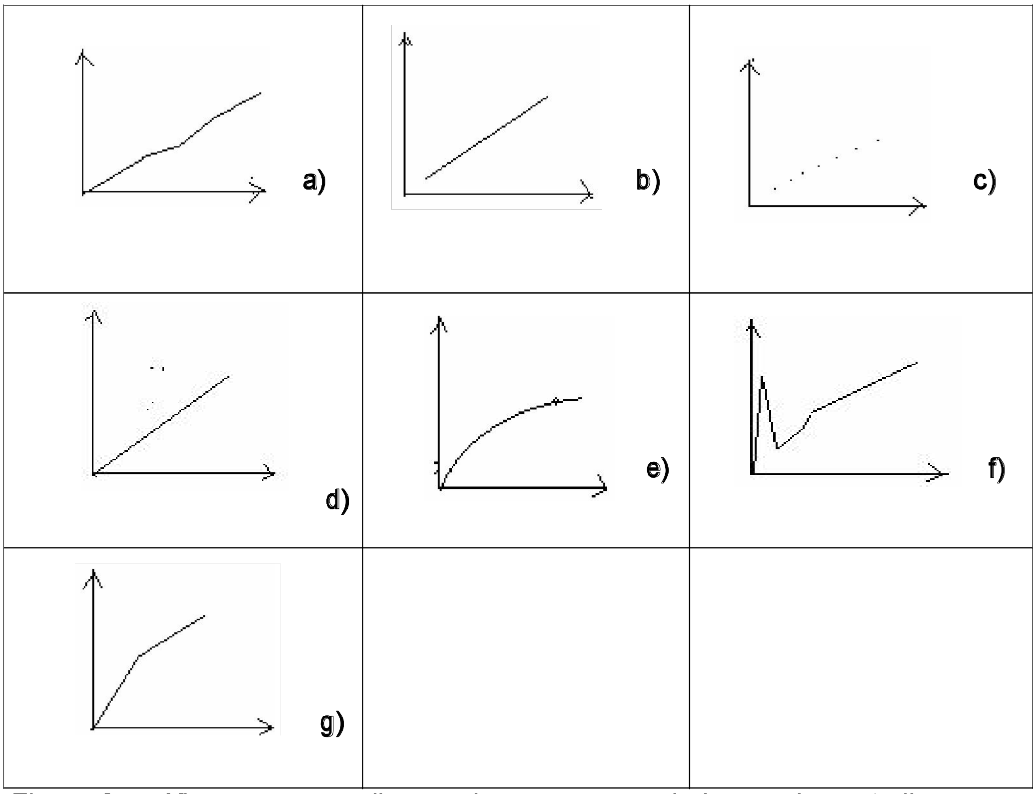


Figura 2 gráficos correspondiente a las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba exploratoria.

Todos los gráfico realizados por los estudiantes para las dos situaciones, aparecen en la Fig. 2, en donde se apreció que el 64% coincidió al graficar una serie de segmentos de recta como se muestra en la Fig. 2a, sin dar razones. El 16% dibujó una recta creciente que no parte del el origen ni de ninguno de los ejes (ver Fig. 2 b), dando como justificación que el líquido en ningún momento tiene una altura de cero centímetros y que no se tenían cero segundos, lo que podría esperarse si se tiene en cuenta lo dificultoso que resultó en la historia de las matemáticas la concepción del cero, y del cero como número relativo en este caso. Además, se pudo ver que el 8% de los estudiantes intentaron realizar el gráfico dejando indicado una serie de puntos en el plano cartesiano (ver Fig. 2c) y como el gráfico que satisface la situación planteada, el 4% realizó una recta ascendente que tiene como inicio el origen (ver Fig. 2d), justificando que cuando el tiempo es cero la altura del líquido también es cero; el 4% de los estudiantes realizó una curva cóncava hacia abajo, alegando que el recipiente tiene forma circular y por tal razón debe producir una función cuadrática (ver Fig. 2 e). Y el 4% realizó una secuencia de rectas alternándolas con pendientes positivas y negativas respectivamente, a lo cual no supo dar ninguna explicación cuando se le indagó.

Las respuestas obtenidas respecto a la pregunta del inciso b, fueron: se puede decir que la velocidad de llenado es eficiente y se mantiene estable; es más o menos constante ya que siempre se está llenando el recipiente, pero disminuye su velocidad en algunos intervalos; la velocidad de llenado cada vez que aumenta el líquido es menor porque no está entrando aire a la bolsa mientras sale el suero; la velocidad de llenado es la que se da en un determinado tiempo dentro del tiempo normal y se puede decir que es constante, es por esto que se puede hallar con la ecuación X = VT por ser un movimiento uniforme y varía, es decir, no es la misma, la velocidad aumenta cada vez más y es directamente proporcional. Al indagar por este resultado contradictorio, el propio estudiante cayó en cuenta de que estaba confundiendo la altura del liquido, con la velocidad a la que sube este.

Por las respuestas a este inciso, daba la impresión que cada grupo estuviera haciendo un experimento diferente, confundían la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el recipiente, con la velocidad con que sale el líquido de la destroza.

En lo que se refiere a la pregunta del inciso c, el 92% de los estudiantes determinaron que entre algunos intervalos había diferencia en la velocidad de llenado indicando en cual de éstos era mayor, por ejemplo respondieron que hay menor rapidez en el quinto intervalo y mayor rapidez en el segundo, porque a menor altura menor tiempo de llenado, presentando dificultad en la relación de proporcionalidad de cada sección del recipiente con su correspondiente tiempo de llenado, ya que dados dos segmentos, (de longitudes diferentes) y su tiempos de llenado correspondientes, la velocidad de llenado sería mayor en la sección de menor longitud, porque como se gasta menos tiempo, por lógica se llena mas rápido. El 8% de los estudiantes refirieron que la velocidad con que se llena el recipiente, es igual en todos los intervalos, dando como explicación que el tiempo de llenado del recipiente es de 27.671 seg. por cada 1 cm, así que la rapidez de llenado es constante; y que la rapidez en todos los Intervalos es la misma, porque al aplicar la fórmula V = X/T, se pudieron dar cuenta que son iguales las velocidades. Como se puede ver estos últimos hicieron un razonamiento pertinente a la problemática.

En lo que se refiere al interrogante del inciso d, el 48% de los estudiantes manifestó que a los 3 cm de altura el tiempo de llenado empleado era 84,4 seg. Y a los 6cm de altura el tiempo de llenado seria de 202,4 seg., el 4% dice que el tiempo de llenado a los 3cm de altura es de 83,013 seg. y que a los 6cm de altura es de 27,986 seg, sin dar explicación alguna a sus respuestas. El 36% de los estudiantes calcularon correctamente el tiempo de llenado empleando la fórmula del movimiento uniforme (T = V.X) para los 3cm y 6cm de altura, en los cuales los tiempos calculados respectivamente fueron 85,7seg y 171,42seg, dado que este estudiante calcula la velocidad con la fórmula V = X/T, y se da cuenta que la velocidad es constante para todos los intervalos de tiempo; y el 12% de los estudiantes emplearon la regla de tres para calcular el tiempo de llenado a los 3 cm de altura el cual fue 84,42seg y de la misma forma hallaron el tiempo empleado a los 6 cm de altura obteniendo como resultado 168,84seg,

Algunos resultados correspondientes al inciso e son los siguiente:

- Es un gráfico ascendente que no inicia en el origen (ver Fig. 2 b), lo que quiere decir que las variables altura y tiempo son directamente proporcional, es decir, que a medida que una asciende la otra hace lo mismo y viceversa,
- Son una serie de segmentos de recta como se muestra en la Fig. 2 a, para lo cual no dieron explicación alguna.
- Es una serie de puntos en el plano cartesiano (ver Fig. 2 c), y

- Es un gráfico o una línea recta que pasa por el origen (0,0) ya que hay una relación muy estrecha entre las dos variables y se puede decir que son directamente proporcional (ver Fig. 2 d)

En lo que apunta al inciso f, el 52% de los estudiantes calculó la pendiente escogiendo dos puntos de la gráfica de altura contra tiempo empleando la relación dada en el instructivo ($m = X_2 – X_1 / T_2 - T_1$) dándoles como resultado 1,034 cm/seg; 0,048 cm/seg., sin dar explicación alguna, mientras que el 36% de los estudiantes no calcularon la pendiente, y el 12% de los estudiantes obtuvieron como resultado: 0,03cm/seg; 0,037cm/seg; 0,035 cm/seg, justificando su respuesta al establecer que el movimiento descrito por la gráfica es un movimiento uniforme y que la pendiente representa la velocidad de llenado del recipiente.

Finalmente respecto al inciso g, el 56% de los estudiantes infirieron que cuando el líquido cae en el recipiente lo hace con mayor velocidad, pero llenando un espacio determinado en un tiempo determinado; el 24% de los afirman que a medida que pasa el tiempo la velocidad de llenado aumenta pero después sucede lo contrario; que en esta situación el tiempo y la longitud de llenado son directamente proporcionales, es decir, que a medida que una de las variables aumenta o disminuye la otra hace lo mismo; el 20% de los estudiantes infirieron que el diámetro de la estructura utilizada (recipiente ilustrado en la prueba) es constante y que por tal razón la pendiente y la velocidad de llenado del recipiente tienen valores idénticos, lo que afirma este grupo de estudiantes es que el valor de la pendiente y el de la velocidad de llenado coinciden, no que la pendiente de la recta de altura contra tiempo representa la velocidad con que se llena el recipiente.

Situación 2:

Desde una destroza se deja verter un líquido, para llenar un recipiente transparente que cambia de diámetro a cada 4cm de altura, como se muestra en la siguiente figura:

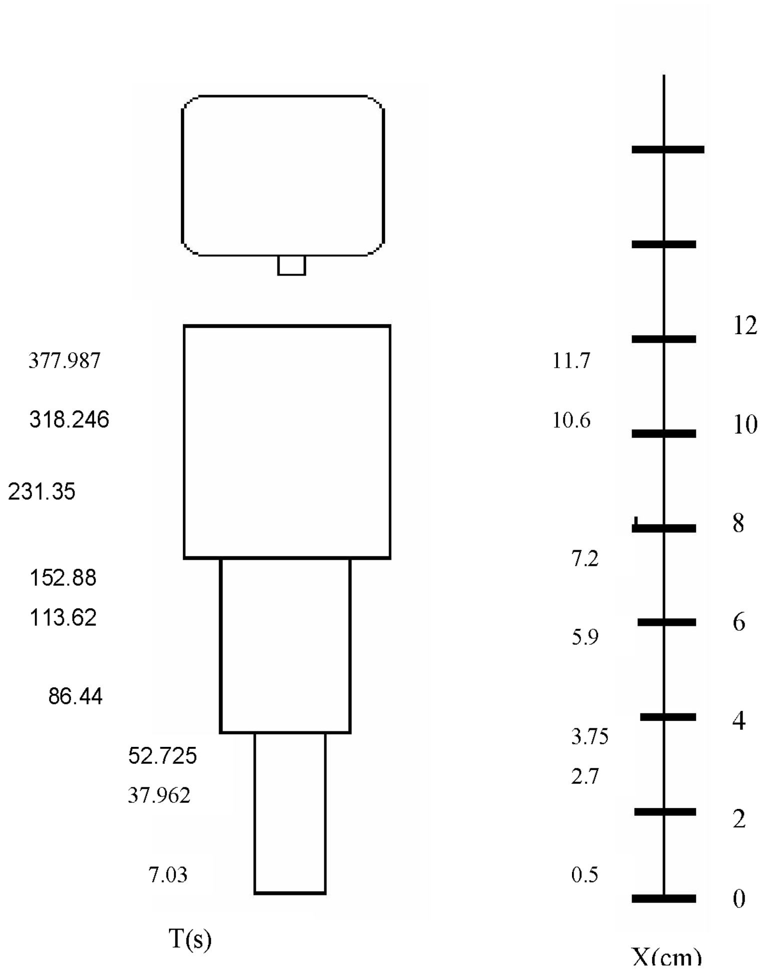


Figura 3. correspondiente a actividad II prueba exploratoria

a) Dibujar la gráfica de la altura X(cm) alcanzada por el líquido, contra el tiempo t(seg.), en un sistema de coordenadas, ubicando X(cm) en el eje vertical y t(seg.) en el eje horizontal. (usar papel milimetrado).
b) Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
c) En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? Por qué?

d) Qué tiempo tarda en llegar a los 8 cm de altura?
e) Qué tiempo tardaría en llenarse totalmente?
f) Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
g) Sería correcto hallar la pendiente entre una sección y otra del recipiente? ¿Por qué?
h) Qué puedes inferir acerca de esta situación

Referente al inciso a, el 84% de los estudiantes coincidieron en graficar una curva ascendente que parte del origen como se ilustra en la Fig. 2e, porque el recipiente no tiene forma uniforme, sino que es diferente entre secciones, haciéndose cada vez más ancho, además de todos estos casos se observo que el 12% de los estudiante realizó el gráfico que muestra una serie de rectas que parte del origen, que asciende luego desciende y por ultimo asciende (ver Fig. 2f), dando como justificación que en la primera parte se llena más rápido que en las demás y cuando llega a la otra sección empieza a bajar la rapidez de llenado y finalmente vuelve a ser mas rápido el llenado; Y el 4% realizó un grafico conformado por trozos continuos de rectas, cada vez con menor pendiente, lo que justificó diciendo, que como la pendiente representa la velocidad de llenado, en cada segmento esta es menor, entonces cada segmento cada vez debe estar menos empinado (ver Fig. 2g).

Referente al inciso b, se dieron los siguiente resultados:

- el 56% de los estudiantes opinó que a medida que el liquido llega a una sección mas grande del recipiente la velocidad varia (disminuye) y mientras se llena ese trocito del recipiente, la velocidad se mantiene constante.
- El 36% de los estudiantes coincidieron en afirmar que la velocidad de llenado es diferente en cada intervalo.
- El 8% afirma que la velocidad de llenado fue directamente proporcional al tiempo

En cuanto al inciso c, el 32% de los estudiantes respondió que en el noveno centímetro de altura hubo menor rapidez de llenado, y en el primer centímetro de altura mayor rapidez de llenado, y el 28% de los estudiantes en forma similar contestó que en el sexto intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en el primer intervalo hubo menor rapidez de llenado, porque de acuerdo a la forma del recipiente a mayor altura se gasta más tiempo de llenado, el 28% de los estudiantes señaló valores puntuales del tiempo como intervalo, por ejemplo, a los 37,92 seg hay mayor rapidez de llenado y a los 7,03 seg menor rapidez de llenado; 7,03 seg mayor rapidez de llenado y a los 377,987 seg menor rapidez de llenado; porque a menor altura menor tiempo de llenado, el 12% contestó que en la primera sección del recipiente (diámetro menor) hubo mayor rapidez de llenado y que en la tercera sección del recipiente (diámetro mayor) menor rapidez de llenado. Aquí los estudiantes parecían no tener claro el concepto de intervalo, dado que casi todas las respuestas se dieron valores puntuales, excepto un 28 %. Luego cuando se abordó la situación con ellos, identificaron claramente un intervalo en la recta real y los expresaron en diversas representaciones, lo que lleva a prensar que el problema es con el trabajo en contexto.

Respecto a la pregunta del inciso d, el 48% de los estudiantes afirmaron que el tiempo que tarda el recipiente en llegar a los 8cm de altura era de: 190 seg; 235,29 seg; 7,7seg; 192,11 seg; 74,41 seg; 450,657 seg; 159,52 seg; 190,47 seg; 318,296 seg. Al preguntárseles el porque de sus respuestas afirmaron que nunca habían realizado ese tipo de situaciones; di ese valor por darlo. El 36% afirmó que al observar la figura pensé que este podría ser el valor (159.52; 190.47), lo que muestra que daban un valor arbitrario mientras que el 16% de los estudiantes dieron una aproximación al tiempo real de llenado a los 8 cm de altura arrojando datos como: 169,8seg; 170seg; 180 seg, ya que el tiempo real de llenado del recipiente a los 8cm de altura es de 177.4 seg. Aquí aparece la escuela como condicionante, parece que en la escuela ante cualquier pregunta, siempre haya que dar un resultado.

En referencia al interrogante planteado en el inciso e, el 72% de los estudiantes arrojaron respuestas tales como: 1384,57 seg; 1378,24 seg; 987 seg, 337,987seg; 377, y 11,7 seg, es decir, que el recipiente se llena totalmente en este tiempo. Y entre los que más se aproximaron al tiempo esperado de llenado del recipiente (394,28seg), fue el 28% de los estudiantes quienes dieron aproximaciones mostrando datos como: 387,6 seg; 384,987 seg; Diciendo en sus explicaciones que estos valores fueron calculados mediante la ecuación de la pendiente, que en este caso es la misma velocidad.

Con respecto al inciso f, el 64% de los estudiantes dijeron haber obtenido un gráfico inversamente proporcional (ver Fig. 2e); porque cada vez tarda más en llenarse el recipiente, el 4% manifestó que su gráfico era de intervalos bien definidos y con variación en las rectas (ver Fig. 2f), porque hay intervalos donde el gráfico baja y después sube, mientras que la mayoría de los estudiantes manifestaron haber obtenido una línea recta que es directamente proporcional, diciendo que a medida que aumenta el tiempo también aumenta el diámetro del recipiente (véase Fig.2d), el 28% de los estudiantes hicieron un gráfico directamente proporcional que no inicia desde el origen (ver Fig. 2b), y finalmente el 4% dibujó un gráfico con dos pendientes en donde una pendiente está mas inclinada que la otra , es decir que donde termina el primer segmento, empieza el segundo y que cada uno es directamente proporcional al tiempo, en relación a cada sección del recipiente como muestra la Fig. 2g. Pero ninguno dio explicación del por que obtuvo el gráfico.

Comentario: ¿Cuantos

En cuanto a la pregunta referida en el inciso g, el 48% de los estudiantes afirmaron que sí se podía hallar la pendiente entre una sección y otra del recipiente, pero seria muy difícil ya que hay muchos datos, el 24% afirmaron que sí se puede hallar la pendiente entre una sección y otra por que tenían varios puntos y podrían hallarla mediante la formula $m = X_2 - X_1 / T_2 - T_1$; de acuerdo con esto, los estudiantes presentan dificultades para identificar bajo qué condiciones se puede utilizar la ecuación para hallar la pendiente de una recta, el 20% por su parte afirmó que no se podía hallar la pendiente entre una sección y otra del recipiente, porque la velocidad de llenado no es igual en todas las secciones, un estudiante en particular manifestó que no se puede hallar ya que da una curva y la pendiente cambia constantemente (ver Fig. 2e) y finalmente el 8% respondió; no se puede hallar la pendiente entre una sección y otra del recipiente, por que cada sección del recipiente tiene diferentes diámetros que no permiten hallar una pendiente que se pueda generalizar para la velocidad de llenado del recipiente, lo que si se puede hallar es la pendiente en cada sección del recipiente, pero no entre secciones.

Ante el inciso h, los estudiantes infirieron,:

- El 56% dice que el cambio de diámetro en cada sección del recipiente el líquido va disminuyendo su velocidad de llenado, porque a mayor diámetro menor velocidad, es decir, tarda más tiempo en llenarse a medida que pasa el tiempo.
- El 32% infirió que esta es una situación en donde se ve que el recipiente, al principio se llena mas rápido que al final por que el recipiente tiene diferentes diámetros.
- Finalmente el 12% afirmaron que la velocidad de llenado es constante.

En esta situación (la 2) hubo un grupo que no intentó resolver ninguno de los literales y otro que solo diligenciaron el primero. Entre todos los estudiantes que realizaron la prueba, varios afirmaron estar confundidos y se tornaban preocupados por lo que podía pasar si contestaban incorrectamente a la preguntas hechas a las actividades. Cabe anotar que en una entrevista posterior hecha a estudiantes que solo diligenciaron una actividad de la prueba y a estudiantes que no dieron respuesta a actividad alguna, Se hicieron las siguientes preguntas según el caso:

¿por qué solo respondió la primera actividad? A lo que estudiantes respondieron:

- Pensé que era igual la otra actividad.
- Creí que con una sola era suficiente.
- Era muy similar a la primera.
- En realidad no entendí.

¿por qué no dio respuesta a las actividades?.

- Porque yo nunca he hecho eso.
- No entendí.

4.2 TALLERES DE LABORATORIO

El objetivo de esta actividad fue incrementar en los estudiantes la comprensión del concepto de función y su relación con situaciones de la vida cotidiana que involucren funciones. Los estudiantes debían realizar el paso de un sistema de representación tabular al sistema de representación gráfico, y de igual manera el paso del sistema de representación figural al sistema de representación gráfico.

Se realizaron en grupos conformados por 3 a 6 estudiantes, en los cuales cada uno aportó sus ideas para dar solución a las situaciones planteadas, además, fueron guiados y hechos de manera práctica apoyados en el laboratorio de física.

En estos talleres los estudiantes resolvieron problemas de la vida diaria, los cuales tienen que ver con las funciones.

4.2.1 **práctica 1.** Llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

Esta práctica se realizo durante una sola sesión de dos horas en grupos de 3 a 6 estudiantes.

Consistió en colocar una dextrosa con equipo a cierta altura, de tal forma que el líquido cayera con una velocidad constante en un recipiente transparente, y luego se tabuló los datos obtenidos al desarrollar la actividad y posteriormente se grafican los datos tabulados de las variables involucradas como lo fue **h vs. t, A vs. t** para luego ver la relación que existe entre la forma del recipiente y la gráfica obtenida, con las tres variables involucradas.

Para esta práctica de laboratorio se les pidió a los estudiantes: realizar un gráfico de altura (h) contra tiempo (t) y de A(cm^2) vs. t(s), en el papel milimetrado (colocando t en el eje horizontal y h en el eje vertical y se plantearon preguntas como:

a) Varía la rapidez de caída del líquido ¿ Qué puedes decir con respecto a lo anterior?.
b). Qué tipo de gráfico obtuviste? ¿por qué?.
c) Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?
d) En qué sección hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? ¿Por qué?
e) Será que el área de la sección transversal del líquido es la misma a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?
f) Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal de líquido a medida que se llena el recipiente)
g) Por qué crees que obtuviste este gráfico?
h) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?
i) Realiza tus propias conclusiones.

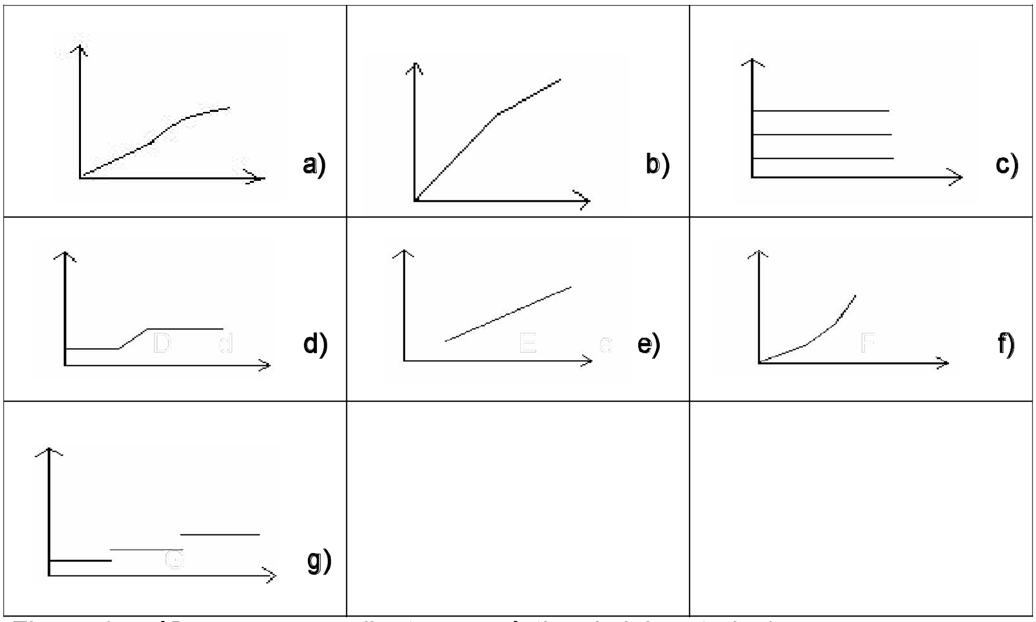


Figura 4. gráficas correspondientes a práctica de laboratorio 1

Los estudiantes al dar respuesta a la pregunta del inciso a, respondieron ; Se seguiría dando una relación directamente proporcional, donde la variable independiente es la altura y tiempo la variable dependiente y además La rapidez no varía en todo el proceso. También dieron argumentos como: Sucederá lo mismo que a sucedido al pasar de la primera sección a la segunda sección, porque se dan diferentes velocidades entre secciones y que al pasar a la sección siguiente, el recipiente necesita más líquido y más tiempo para llenarse debido a que el diámetro se hace mayor, es decir, la velocidad con que se llena la siguiente sección se hace menor.

Todos los gráfico realizados por los estudiantes aparecen en la Fig. 4, en donde se apreció que de acuerdo a la respuesta del inciso b, cuatro grupos obtuvieron al inicio un gráfico directamente proporcional, y luego una curva ascendente, semejante a la descrita por el movimiento retardado. Esto se debe a que las variables van en aumento y porque al llegar a la segunda sección tiende a inclinarse, ya que el diámetro se hace mayor (ver Figura 4 a), de igual manera dos grupo dibujaron un gráfico con dos segmentos de rectas, que parte desde el origen, donde la pendiente del primer segmento es mayor (ver Figura 4b), argumentando que al pasar de una sección a otra el tiempo y el diámetro aumentan haciéndose directamente proporcional ya que las variables van en aumento y los tiempos son diferentes, y esta situación es muy similar a la del primer taller; y cuatro grupos obtuvieron una curva que empieza desde el origen, la cual cada vez se hace menos inclinada porque tarda cada vez más en llenarse en cada sección, es decir, la altura aumenta el tiempo también aumenta. Aquí cuando se les pidió una explicación acerca de porque creían que al aumentar la altura, también aumentaba el tiempo, dijeron que no era cierto, que se habían equivocado diciendo altura en vez de diámetro.

Cuatro grupos de estudiantes ante el inciso c, dieron respuestas como; La relación es directamente proporcional porque a medida que aumenta la altura, aumenta el tiempo. De manera similar tres grupos refirieron que a mayor altura se necesita más tiempo porque el diámetro aumenta en cada sección y finalmente tres grupos dieron como respuesta que deben ser directamente proporcional en cada sección recorrida, es decir, durará un tiempo siendo proporcional y luego cambiará siendo nuevamente proporcional, durante otro intervalo de tiempo en cada sección.

A la pregunta del inciso d, respondieron ; En la primera sección, porque el diámetro es menor y en la tercera es mayor así mismo respondieron que en la primera sección de (0cm a 4cm) habrá mayor rapidez de llenado y en la tercera sección de (8cm a 12cm) habrá menor rapidez, debido a que tarda más tiempo en alcanzar la altura de 8cm a 12cm que la altura de (0cm a 4cm). En particular un grupo de estudiantes explicaron que en cada sección siguiente el diámetro se hace mayor, lo que indica que se necesita más líquido para llenarse, y como éste cae a velocidad constante también se necesitará más tiempo.

De acuerdo a la pregunta del inciso e, los estudiantes contestaron que el área de la sección transversal del liquido no era la misma a medida que se llena el recipiente porque el diámetro de éste aumenta a cada 4cm y por consiguiente el área de la segunda sección es mayor que la primera, al igual que el área de la tercera sección tiene mayor diámetro que la segunda.

Los gráfico realizados por los estudiantes aparecen en la Fig. 4, en donde se apreció que de acuerdo a la respuesta del inciso f, tres grupos dibujaron un gráfico que consta de tres secciones constantes una sobre otra que parten desde el mismo instante de tiempo, lo cual indica que se dan áreas distintas en el mismo instante de tiempo.(ver Figura 4c), aquí se pensó que este era el gráfico correspondiente, ya que las secciones del recipiente están ubicadas una sobre la otra. Dos grupos dibujaron un gráfico en el que pudo observarse dos secciones constantes y una sección directamente proporcional entre estas dos, (ver Fig. 4d), lo cual justificaron diciendo que el área se mantiene igual durante un instante luego aumenta durante algún tiempo para mantenerse constante después.

También se pudo apreciar que un grupo realizó un gráfico directamente proporcional, que no inicia desde cero, como se muestra en la figura 4e. De antemano el grupo sabia que el gráfico no comenzaba desde cero, sin embargo, dijeron no haber tenido en cuenta la variación del área a medida que se llenaba el recipiente en función del tiempo. Dos grupos dibujaron un gráfico ascendente, compuesto por los tres segmentos de rectas, donde cada segmento siguiente tiene mayor pendiente, como se ilustra en la figura 4f (lo cual indica que en cada sección el área aumenta con mayor rapidez). y finalmente a diferencia de los demás grupos, dos grupos dibujaron un gráfico con tres secciones constantes, una sobre otra, pero la siguiente comienza donde acaba la anterior. (ver Fig. 4g) lo que hace pensar que se hizo el análisis concerniente de las variables inmiscuidas en esta situación, por tanto pudieron representar satisfactoriamente el equivalente en el sistema gráfico.

Al parecer todas las dificultades presentadas por los estudiantes suceden porque no se hace un análisis de las variables incluidas o tal vez el error cometido radica en que conservan la tendencia a graficar acorde a las situaciones de h vs. t.

Referente a la pregunta del inciso g Tres grupos Obtuvieron un gráfico directamente proporcional, diciendo que a menor tiempo menor área, Tres grupos refirieron, obtuvimos un gráfico que indica que el recipiente tiene en la primera sección un área menor que en la segunda y en la segunda un área menor que en la tercera, debido que a medida que el liquido aumenta cierta altura, aumenta a su vez el diámetro. Dos grupos afirmaron obtener un gráfico constante a cada 4cm. Porque se relaciona el tiempo con el área, además también se encontraron argumentos como, tres líneas paralelas al eje X, pero a distinta distancia del eje Y (estas líneas parten al mismo instante), como muestra la Fig. 4c Porque el diámetro es diferente y constante en cada sección y un grupo dijo que su gráfico era escalonado, esto se debe a que hay tres diámetros diferentes; y finalmente un grupo, realizó un gráfico compuesto por tres líneas paralelas al eje X, una sobre otra, pero la siguiente comienza donde termina la anterior.(ver Fig. 4g). Porque de 0 a 4cm, el área transversal es constante y aquí aumenta siendo constante hasta los 8cm, y no pueden comenzar en el mismo instante porque cuando comienza a llenarse la siguiente sección, ya ha transcurrido un tiempo.

Referente a la pregunta del inciso h, tres grupos dicen que se relaciona con tres funciones constantes, también tres grupos afirman que por la gráfica parece una función lineal, mientras dos grupos dijeron que se relaciona con la función constante, y finalmente dos grupos afirmaron que se relaciona con una función escalonada.

Algunos grupos de acuerdo a la pregunta del inciso i:

- dijeron nos gustó mucho trabajar de este modo, pues es una forma agradable y práctica a la hora de trabajar las funciones,

- nunca habían hecho este tipo de ejercicios, pero en realidad son muy productivos porque nos obligan a pensar; e inclusive la profesora responsable del curso también concluyó; “primera vez que observo este estilo para trabajar en matemáticas y en realidad considero que es muy bueno y motiva a los estudiantes”.

Después de ver los resultados se puede decir que las dificultades estriban en que no se diferencia entre las variables, dependientes e independientes, se confunde entre crecimiento con relación directamente proporcional, ya que se afirma que dos variables son directamente proporcionales cuando ambas están en aumento, y relacionan decrecimiento con inversamente proporcional, porque se dice que dos variables son inversamente proporcionales cuando una disminuye y otra aumenta., no se identifica la variación de las variables incluidas, se conserva la tendencia a graficar las situaciones de A vs. t acorde a las situaciones de h vs. t y además no se realiza una descripción pertinente de la información plasmada gráficamente.

Las dificultades que presentaron los estudiantes fueron muy similares a las presentadas por los profesores, lo que coincide con lo establecido por Hitt al afirmar que es de suponerse que algunos profesores de matemáticas pudieran tener problemas en el aprendizaje de temas de matemática y trasmitírselos a sus alumnos (...) Aunque cabe anotar que las dificultades relacionadas con el aprendizaje de tal concepto, están relacionadas con algunos aspectos tales como la madures que algunos profesores de matemáticas consideran necesaria para el entendimiento de ese concepto.

Esta prueba tuvo éxito, porque los estudiantes a la hora de desarrollar la actividad se mostraron muy interesados, debido a que interactuaban con la realidad, decían así es más agradable trabajar y más fácil de entender. Eschefiele establece que cuando los alumnos trabajan situaciones de la vida tratan de dar todo de sí, buscando todas las opiniones para llegar a una respuesta.

Algunos grupos no contaban con todos los utensilios para llevar a cabo la práctica; como por ejemplo: un grupo no tenía un soporte universal para suspender la dextrosa, pero terminaron colgándola en una ventana en clavos que se hallaban en la pared. Otro grupo olvidó llevar la dextrosa y llenó una bolsa con agua, le adaptó una manguera y ese fue su equipo de trabajo.

El interés de los estudiante para desarrollar la experiencia aumentó cuando se les manifestó que el estilo de ejercicios de las pruebas de estado es similar a éste, a que en ellas como en este caso tendrían que interpretar gráficos. De igual manera para mantener la participación activa se lanzaron interrogantes como: ¿qué tendría que hacer para que la velocidad de llenado sea igual en la primera y segunda sección del recipiente? A lo que muchos al instante respondieron, se tendrá que dejar caer el líquido más rápidamente en la segunda sección, lo que conlleva a pensar que se hizo un análisis pertinente y se tuvo un nivel de abstracción adecuado de la situación. Por otro lado la profesora encargada del curso se mostró satisfecha con el trabajo, afirmando no haber visto antes a los estudiantes con tantos deseos de trabajar las matemáticas; en otra instancia también dijo, sería bueno seguir enseñando esta materia de este modo no solo con estos temas, posteriormente solicitó los materiales para llevar a cabo la experiencia con otro grupo.

- Varias conclusiones expresadas por los estudiantes:
  - Trabajar así es chévere, tiene que ver con cosas de la vida diaria.
  - De este modo aprendemos las cosas mejor.
  - Hemos aprendido otro modo de estudiar las matemáticas.

- Algunos aprendizajes:
  - Si un líquido cae a velocidad constante en un recipiente que tiene diámetro constante, la rapidez de llenado es la misma en todo el recipiente.

- Realizada la experiencia varias veces, los gráficos muestran que para cuando el recipiente se llena más rápido siempre la gráfica estará por encima.

4.2.1.1 Socialización de la práctica 1.

Al inicio de cada laboratorio se les informó a los estudiantes que se resolvería cada una de las situaciones planteadas en la guía, para que ellos hicieran la respectiva confrontación y las correcciones pertinentes; lo que a la vez se contempló como una actividad de retroalimentación. Para esto nuevamente se conformaron los grupos de acuerdo a los resultados obtenidos en el laboratorio. Atendiendo a la importancia y a las ventajas que posee el trabajo en equipo según Vigotsky. Los estudiantes, se mostraron atentos a la actividad haciendo las comparaciones correspondientes entre sus respuestas a la actividad y las respuestas aportadas por los proponentes. Esta experiencia dio gran fruto, pues los estudiantes aclararon muchas de sus dudas, tales como: cuando dos variables son directamente proporcional y cuando no lo son. Dos estudiantes se mostraron muy participativos y demostraron comprender y manejar con bastante soltura estas situaciones, y hasta propusieron situaciones con recipientes hipotéticos, que aumentaban o disminuían de diámetro a cada 4cm de altura pero invertido y en cada ocasión realizaron las actividades en el tablero, dando la explicación pertinente.

- Algunas de las conclusiones referidas por los alumnos fueron:
  - Hemos aclarado muchas dudas.
  - Pensé que lo que habíamos hecho estaba del todo bien.

4.2.2 Práctica 2.

El objetivo de esta actividad fue incrementar en los estudiantes la comprensión del concepto de función y su relación con situaciones de la vida cotidiana que involucren funciones. Los estudiantes debían realizar el paso de un sistema de representación tabular al sistema de representación gráfico, y de igual manera el paso del sistema de representación figural al sistema de representación gráfico, como en la actividad anterior.

De igual modo que en la práctica anterior, se procedió a llenar un recipiente transparente en forma de embudo con una escala de medida preestablecida; al igual que en la práctica anterior, se colocó una dextrosa con equipo a cierta altura de tal forma que el líquido se vertiera con una rapidez constante en el recipiente. Se tomaron algunos datos, se tabularon y se les pidió a los estudiantes graficar los datos tabulados de **h vs. t, A vs. t, V vs. t;** y ver la relación que existe entre la forma del recipiente y la gráfica obtenida para cada par de variables; Dicha práctica fue desarrollada con grupos de 3 a 6 estudiantes. Y se plantearon los siguientes interrogantes:

a) Qué puedes decir si se varía la rapidez de caída del líquido?
b) Realiza un gráfico de altura h(cm) contra tiempo t(seg) en el papel milimetrado (coloca t en el eje horizontal y h en el eje vertical).
c) Qué tipo de gráfico obtuviste? ¿ Por qué?
d) Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?
e) Qué puedes decir acerca de la rapidez de llenado?
f) Qué sucede con el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?
g) Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente a través del tiempo)
h) Qué tipo de gráfico obtuviste y por qué?
i) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?
j) Realiza un gráfico con los datos obtenidos para el volumen.
k) Como es la relación entre V y t ?
l) Qué tipo de gráfico obtuviste y por qué?
m) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?

n) Realiza tus propias conclusiones.

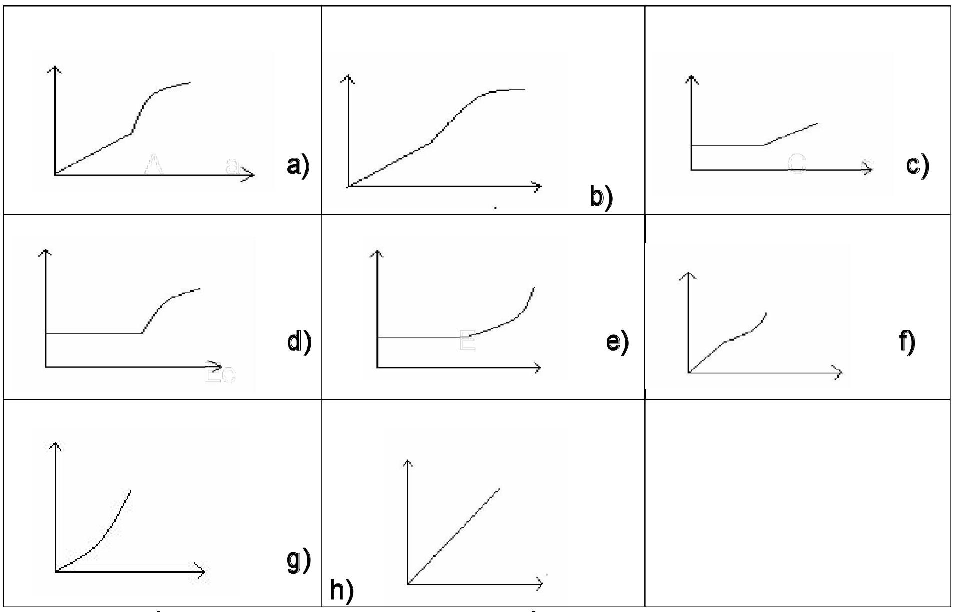


Figura 5. gráficas correspondientes a la práctica de laboratorio 2.

En lo que se refiere a la pregunta del inciso a, cuatro grupos de estudiantes afirmaron, que si la velocidad del liquido se varía no afecta el grafico que se obtenga, porque la velocidad de llenado del recipiente se mantiene constante, obteniendo el mismo gráfico pero con diferentes datos, además, tres grupos establecieron que si se cambia la velocidad de caída del líquido, también cambia la velocidad de llenado del recipiente y finalmente tres grupos refirieron que no importa que se varíe la velocidad de caída del líquido, el recipiente seguirá necesitando la misma cantidad de liquido para llenarse.

Todos los gráfico realizados por los estudiantes para esta práctica aparecen en la Fig. 5, en donde se apreció que, un grupo dibujó un gráfico ascendente, que parte desde el origen diciendo que en el primer tramo existía proporcionalidad directa entre la altura y el tiempo de llenado, y luego cambia a una curva que indica que el líquido gana altura gastando cada vez más tiempo en subir (ver figura 5a). A diferencia del laboratorio I, en éste los datos obtenidos se ubicaron correctamente por parte de todos los grupos en el sistema de coordenadas rectangulares.

Para la pregunta del inciso c, siete grupos dieron respuestas muy similares al decir que se obtuvo un gráfico directamente proporcional al inicio y luego una curva que cada vez crece meno, como muestra la Fig. 5a y 5b. Los otros grupos no dieron explicación a sus respuestas

Referente al inciso d, cuatro grupos de estudiantes respondieron, que cuando aumenta la altura aumenta el tiempo, es decir, que ambas van en aumento, tres grupos refirieron además, que la relación entre **h** y **t** es directamente proporcional hasta cierto punto, dando como explicación; que en la primera sección es directamente proporcional, pero en la segunda el tiempo de subida es cada vez mayor.

Con relación a la pregunta del inciso e, se puede observar que los estudiantes dieron respuestas bastante acertadas al responder como:

- La rapidez de llenado del recipiente disminuye a medida que aumenta la altura
- No es la misma en todo el proceso
- Demora cada vez más donde el diámetro va aumentando
- Se llena más rápido en la primera sección
- Un grupo en particular dijo que en la primera sección es igual entre centímetro y centímetro y en la segunda sección aumenta, diciendo que la rapidez de llenado depende del diámetro porque donde el diámetro es constante la relación es directamente proporcional y donde el diámetro se hace cada vez mayor más demora en llenarse el recipiente.

Para la pregunta del inciso f , todos los grupos dieron respuestas muy satisfactorias, ya que cuatro argumentaron, que el área es constante hasta cierto punto y después aumenta; dos grupos en forma similar ratificaron que el área es constante en donde el diámetro lo es y en la segunda sección cambia porque el diámetro aumenta continuamente hasta el final del recipiente, de igual modo dos grupos afirmaron, que en donde el diámetro es constante el área es constante, y aumenta donde el diámetro aumenta, debido a que el área depende del radio que en este caso tenga el recipiente.

Referente a la pregunta del inciso g se pudo apreciar que los estudiantes realizaron un gráfico directamente proporcional (desde el origen) y luego una curva ascendente como la descrita por el movimiento uniformemente desacelerado (ver Figura 5b), quizás influenciados por la pregunta del inciso b. Otros realizaron un trozo de gráfico constante el cual no inicia del origen y luego recta; Como se ilustra en la figura 5c; un gráfico al inicio constante y finaliza con una curva, lo que justificaron diciendo que el área aumenta gastando cada vez mayor tiempo.(ver Figura 5d) y un grupo realizo un gráfico que inicia con una sección constante, y luego una curva como la rama de una parábola de parámetro positivo, como se muestra en la figura 5e. De acuerdo a todo esto, resaltamos que no se hace un análisis de la forma como varían las variables, es probable que se conserve más la tendencia a graficar acorde a las situaciones de H vs. T, cabe decir que la mayoría de los estudiantes identifican en que parte el área es constante y en que parte el área es muy variable sin precisar en que forma.

De acuerdo con la pregunta del inciso h, los estudiantes contestaron:

- Al inicio una gráfica directamente proporcional y después una curva
- Un gráfico constante y después directamente proporcional
- Una gráfica al inicio constante y después una curva creciente.
- Un grupo aclaró que la curva parecía a la descrita por el movimiento uniformemente retardado. para este aspectos todos los estudiantes coincidieron con la explicación, la cual es, porque el diámetro se mantiene constante y después aumenta.

Los estudiantes con respecto a la pregunta del inciso i, contestaron que: Se relaciona con la función constante y con la función directamente proporcional, otros en su respuesta afirmaron que se relaciona con la función lineal (ya que era una recta), en cambio hubo grupos que dijeron que se relaciona con la función constante y con una función que describe una curva, y un grupo de estudiantes, la relacionó con la función constante y función cuadrática, diciendo que es lo que describe la situación en el llenado de un recipiente trasparente que tiene forma de embudo con diámetro constante al principio y luego aumentando continuamente hasta el final del recipiente.

Cinco grupos realizaron de acuerdo a la pregunta del inciso j, un gráfico que al inicio es directamente proporcional y luego continua con una curva ascendente (ver figura 5f), dos grupos al dibujar el gráfico obtuvieron una ligera curva ascendente que inicia del origen describiendo que el recipiente se llena mas rápido en la segunda sección, en donde el diámetro aumenta continuamente; Como se muestra en la figura 5g, y dos grupos finalmente esbozaron un gráfico directamente proporcional (véase figura 5h). Al parecer las fallas se presentan debido a que: se conservó una ubicación inadecuada de los datos en el sistema de coordenadas cartesianas, o tal vez esto se deba a errores experimentales o a que no se hizo un análisis adecuado de la situación, predominando la intuición.

Referente a la pregunta del inciso k, no fueron las más adecuadas pues dieron argumentos como:

- Hay veces que el líquido demora menos tiempo en alcanzar un volumen, es decir en partes es directamente proporcional, a medida que aumenta el volumen aumenta el tiempo, y al inicio la relación entre el **V** y el **t** es directamente proporcional.
- La relación existente entre el volumen y el tiempo es directamente proporcional, ya que independiente de la forma del recipiente, el volumen aumenta con el paso del tiempo, mientras la velocidad siga siendo constante la relación de proporcionalidad va a ser directa.

De acuerdo con la pregunta del inciso l contestaron:

- Obtuvimos al inicio una recta y después una curva que asciende porque al inicio el recipiente es uniforme y después varia continuamente.
- Obtuvimos una curva ascendente, porque a medida que pasa el tiempo el volumen aumenta
- Obtuvimos un gráfico directamente proporcional, pero a diferencia de los demás no dieron explicación alguna del por que obtuvieron el gráfico.

Con relación a la pregunta del inciso m, aseguraron que:

- Se relaciona con la función lineal y con una función curva ascendente,
- Relaciona con la función lineal, ya que la relación existente entre el volumen y el tiempo es directamente proporcional.

Referente a la pregunta del inciso n, fueron pocas las ideas referidas ya que solo uno de los grupos la contestó diciendo, no solo se puede estudiar la velocidad de llenado sino también el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente y de la misma forma se puede hacer el mismo estudio para el volumen.

En esta practica, las fallas se hicieron visibles más que todo en el aspecto concerniente al área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente al volumen, ya que se siguió haciendo una incorrecta interpretación de las variables que hacen parte de la situación, y en los otros aspecto se notaron en menor grado las fallas con relación a la práctica antes realizada, ya que menos alumnos siguen ubicando inadecuadamente los datos en el sistema de coordenadas cartesianas, lo cual indica que se pueden estar superando las falencias presentadas al inicio, esto es, las habilidades para la resolución de este tipo de problemas.

En esta práctica se mostraron igualmente motivados que en la anterior y se tienen mejores nociones acerca de las funciones, haciéndose a su vez un aprendizaje significativo del cálculo porque los estudiantes vivenciaron situaciones donde se aplican conceptos del cálculo. Al inicio algunos estudiantes comentaron “otra vez lo mismo” pero al ver el recipiente que se iba a llenar, se escuchó, este es diferente al anterior, éste es más chévere.

Varios estudiantes antes de comenzar la práctica, intentaron realizar el gráfico de cada una de las situaciones planteadas y decían “ya tenemos los gráficos hechos” y preguntaban que si estaban correctos, respuesta que no se quisieron dar al instante para que no se perdiera el interés por el trabajo, además, era mejor que se convencieran por si mismos. Se debe resaltar que la mayoría de las dificultades en éste caso fueron presentadas en el paso del sistema de representación figural al gráfico en el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente y en el volumen.

4.2.2.1 Socialización de la práctica 2.

En esta socialización se dieron aspectos muy similares a la socialización de la práctica I , pues varios estudiantes que creían haber contestado correctamente vieron sus equivocaciones y aclararon sus dudas, nuevamente se dio el intercambio de ideas, llegando finalmente a un acuerdo. Se plantearon como en la primera practica de laboratorio nuevas situaciones, las cuales fueron resueltas conjuntamente entre los alumnos, la profesora encargada del curso y los proponentes del trabajo.

- Algunas conclusiones

  - Si el diámetro es constante, el área es constante.
  - El área no comienza desde cero porque en este instante no hay caída de agua.
  - El volumen siempre es proporcional al tiempo, si la velocidad es constante.

4.3 PRUEBA FINAL

El objetivo de esta actividad fue incrementar en los estudiantes la comprensión del concepto de función y su relación con situaciones de la vida cotidiana que involucren funciones. Los estudiantes debían realizar el paso de un sistema de representación figural al gráfico y en la siguiente situación realizar el proceso contrario. Esta prueba se realizó individualmente por cada uno de los estudiantes y se efectuó en forma de taller.

1. Dibuja los gráficos que describen las siguientes situaciones:

a) El llenado del recipiente (abajo) con un líquido que cae a velocidad constante

b) El área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente.

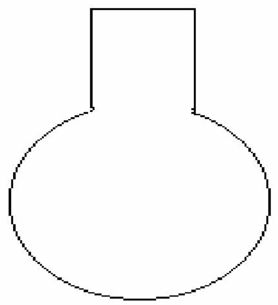


Figura 6a, paso del sistema figural al gráfico.

2. dibuja la forma del recipiente que describe el gráfico que se presenta a continuación, que resulta de llenarlo con un líquido que cae a velocidad constante y se realiza el gráfico de altura contra tiempo.

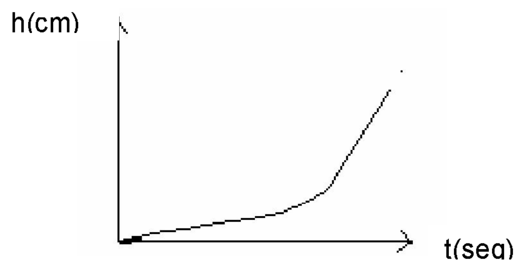


Figura 6b, paso del sistema grafico al figural.

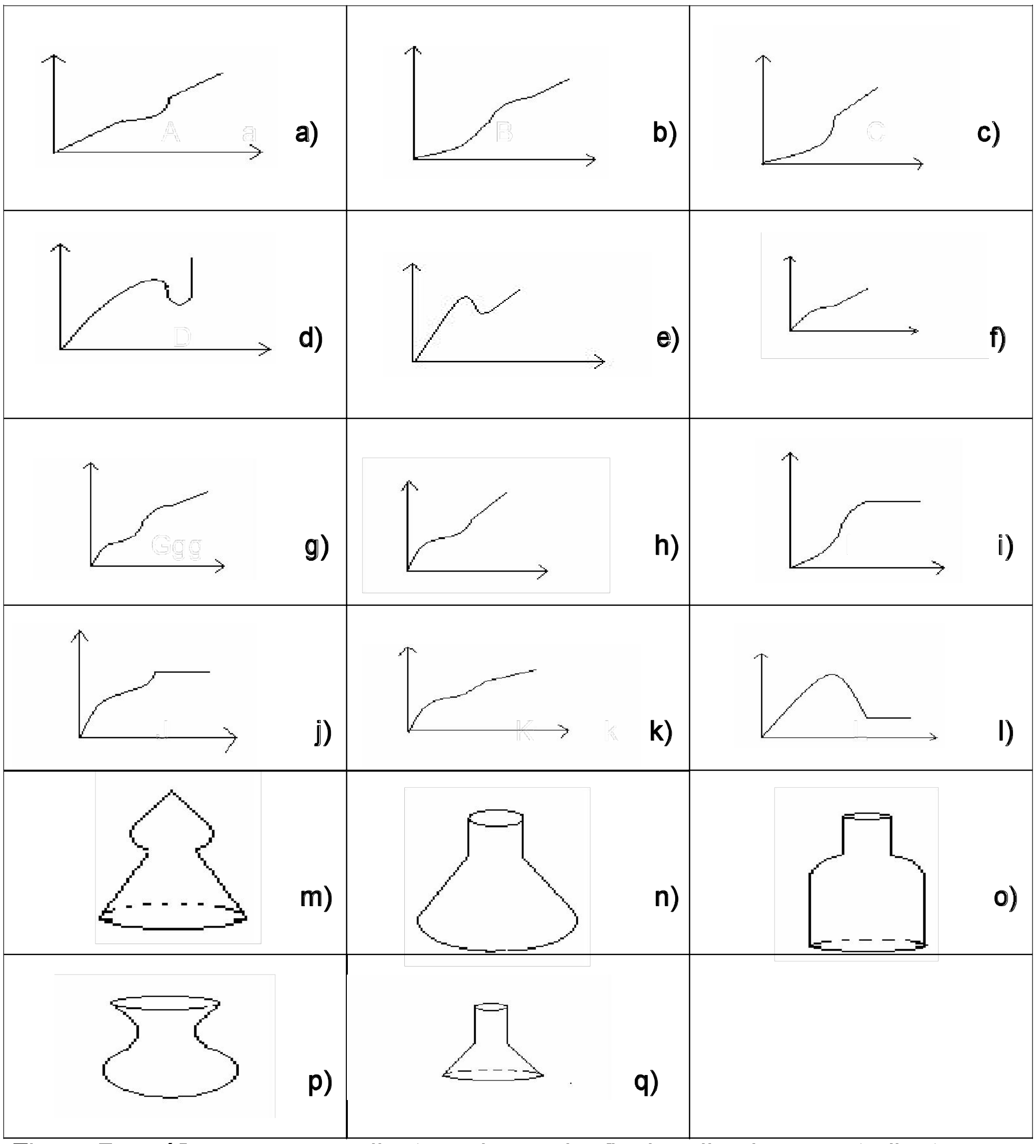


Figura 7. gráficos correspondientes a la prueba final realizada por estudiantes.

Todos los gráfico realizados por los estudiantes aparecen en la Fig. 7, de acuerdo a la situación 1 a, en donde se apreció que el 34% de los estudiantes comenzó el gráfico con una recta que inicia en el origen (ver figura 7 a), sigue con una curva ligeramente cóncava hacia arriba y luego sigue recta ascendente, lo que justificaron diciendo que el recipiente al comenzar a llenarse presenta un diámetro constante, luego aumenta y posteriormente vuelve a ser constante. El 22% al intentar dar respuesta coincidieron con un gráfico (véase figura 7b), que inicia con una curva que indica que el líquido gana altura gastando cada vez menos tiempo de un centímetro a otro, luego la curva cambia indicando que el líquido gana altura gastando cada vez más tiempo y finalizan con una sección directamente proporcional, así mismo el 14% realizó el gráfico (ver figura 7c), que inicia con una curva que dicta que el líquido gana altura de un centímetro a otro gastando cada vez menos tiempo y cambia a una sección directamente proporcional con la que finaliza; el 8% manifiesta gráficamente que el líquido tiene la misma altura en un instante de tiempo; sin embargo uno de ellos inicia el gráfico con la curva correspondiente, la cual muestra que el líquido gana altura de centímetro a centímetro, gastando cada vez más tiempo y finaliza con una sección directamente proporcional, (ver figura 7e). El 6% realizó el gráfico donde es lineal, es decir una recta perpendicular al eje horizontal (lo que indica que la pendiente no existe); Como se muestra en la figura 7d. También el 6% realizó un gráfico que inicia con una curva que describe que el líquido gana altura gastando cada vez más tiempo, como es correcto, y cambia a una sección directamente proporcional, omitiendo así la sección en la que el líquido gana altura gastando menos tiempo (ver figura 7f), el 6% graficaron al inició una curva que indica que el líquido gana altura gastando cada vez más tiempo, luego cambia a una curva donde el líquido gana altura gastando menos tiempo, cambiando nuevamente a una curva como la primera en mención y finaliza con una sección directamente proporcional.(ver figura 7g) y finalmente el 4% dibujó el gráfico que describe la situación de llenado del recipiente con un líquido que cae a velocidad constante, ya que iniciaron con una curva creciente la cual indica que el líquido gasta cada vez más tiempo a medida que gana altura, después esta cambia a una curva donde el líquido gana altura gastando cada vez menos tiempo y luego cambia a una gráfica directamente con lo cual finaliza.(ver figura 7h). Este ultimo gráfico es correcto.

Referente a la pregunta del inciso 1b se pudo apreciar que : El gráfico realizado por el 38% de los estudiantes es una curva ascendente, que determina que hasta cierto punto el área aumenta y finaliza en una sección donde el área es constante.(ver figura 7i,7j). El 32% realizaron un gráfico que inicia con una curva ascendente y finalizaron con una sección directamente proporcional.(ver Fig. 7k), y finalmente el 30% realizaron un gráfico que inicia con una curva que indica que el área aumenta cada vez más despacio, hasta cierto punto, luego muestran un cambio de curvatura que indica que área empieza a disminuir hasta cierto punto y finaliza con una sección donde el área es constante, (ver figura 7l)

Acorde a los gráficos presentados en estas situaciones, podemos pensar que las dificultades se presentan a la hora de analizar el comportamiento de las variables incluidas en la problemática, o tal vez porque no se cuenta al parecer con un proceso de abstracción. Y en lo que se refiere al área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente se conserva la tendencia a graficar acorde a las situaciones de H vs. T.

En la realización referente a la situación 2 se observó que el 26% de los estudiantes dibujaron un recipiente con tres secciones, donde el diámetro disminuye hasta cierto punto (como indica la Fig. 7m) pero dibujo otra sección donde el diámetro nuevamente aumenta para luego volver a disminuir hasta el final del recipiente, el 18% dibujaron un recipiente que tiene como característica el aumento de su diámetro hasta cierto punto, para luego empezar a disminuir hasta cierta altura donde se mantiene constante.(ver figura 7n), además el 16% dibujaron un recipiente que inicia con un diámetro constante, luego el diámetro disminuye y finalmente una sección donde este es constante. (ver figura 7o), el 16% dibujaron un gráfico con forma esférica, lo cual indica que el diámetro aumenta y luego disminuye y finalizan con una sección donde el diámetro disminuye y luego aumenta.(como se ilustra en la figura 7p), y finalmente el recipiente correcto, lo dibujaron el 24%, el cual consistía en dos secciones, donde en la sección inferior el diámetro disminuye hasta cierta altura, para luego mantenerse constante, (ver figura 7q).

Como se puede ver se siguen presentando las dificultades en la interpretación de la variación de las variables involucradas en la situación. Aunque algunos estudiantes tenían una idea bastante acertada del comportamiento de las variables las falencias fueron porque no se identificó como era la concavidad de la curva, Por tanto no se saca la información pertinente presentada de modo gráfico, estas han sido las causas o problemas más relevantes que dejan ver los alumnos.
Esta prueba fue realizada de modo individual, notándose en los estudiantes cierta preocupación por querer resolver correctamente la actividad. Durante la experiencia, varios estudiantes se mostraron inseguros, pues realizaban los ejercicios y preguntaban si eran así, se les dijo que revisaran y analizarán más detenidamente la situación, y debido a esto, construyeron nuevas respuestas preguntando si en esta oportunidad estaban correctas. Quizá en razón a los desaciertos detectados por ellos mismo en la socialización de las dos pruebas anteriormente realizadas (practica de laboratorio I y II). En particular un alumno ante la pregunta ¿cómo obtuvo estos resultados? Contestó, se la vi a mi compañero.

- Algunos aprendizajes:
  - Si el llenado del recipiente va a velocidad constante, el gráfico es directamente proporcional, en donde el diámetro no cambia.
  - Las funciones están incluidas en muchos aspectos

- Algunas conclusiones:
  - Me parece que es más difícil hacer el gráfico que dibujar el recipiente.
  - El recipiente tiene partes donde las áreas son iguales.

4.3.1 Socialización prueba final

En esta socialización se dio la solución de los ejercicios o situaciones planteadas, lo cual generó una vez mas una serie de comentarios como:

En el caso del área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente fue el aspecto más importante, debido a la participación de los estudiantes, en particular de dos. Mostramos aquí sus argumentos:

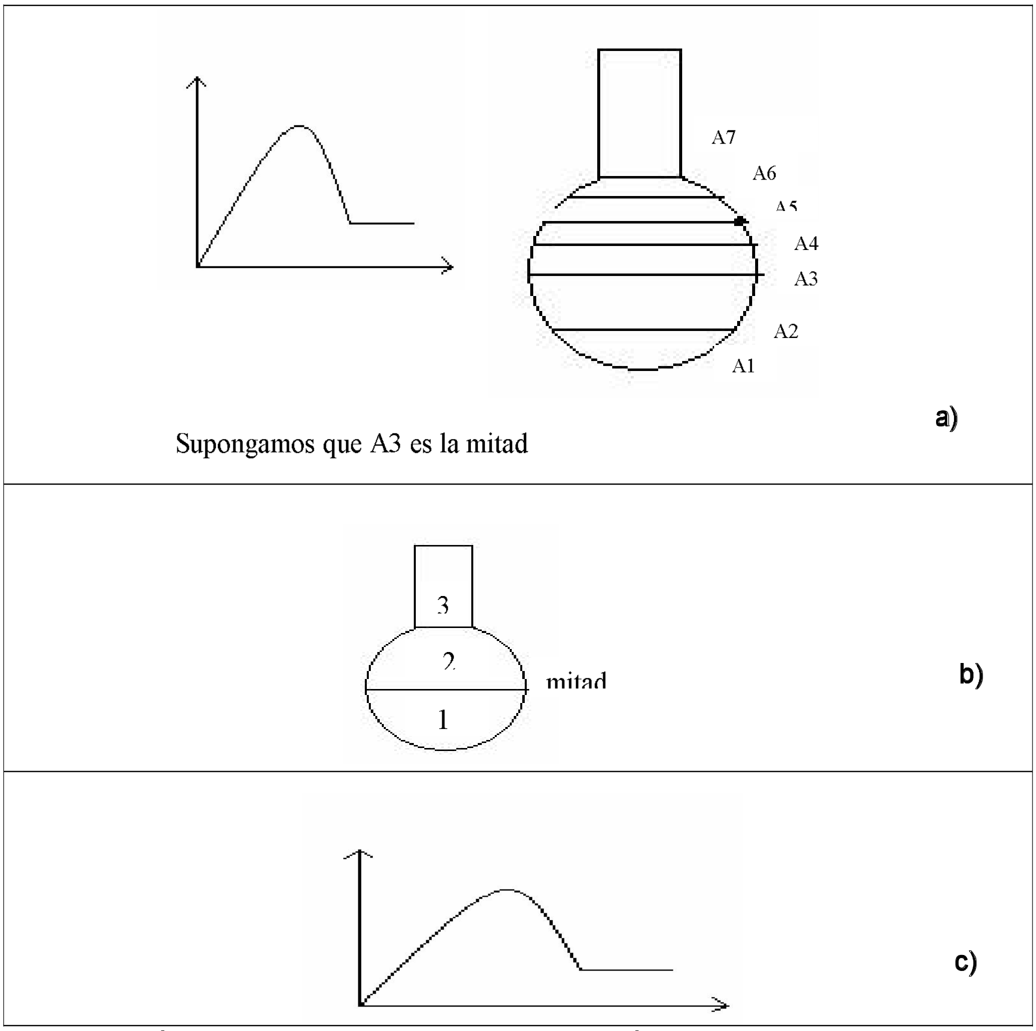


Figura 8. gráficos correspondientes a la socialización prueba final.

En el recipiente, en sector A1 y A2, el llenado se hace cada vez más lento hasta llegar a A3, y luego comienza a aumentar la velocidad de llenado y el área se va haciendo cada vez más pequeña, por eso es que la curva baja de A3 hasta A6 y es constante en todo A7, (ver figura 8a). Otro estudiante argumentó que en la sección 1, hay sitios donde el diámetro es igual a sitios de la sección 2, lo que indica que de acuerdo con el recipiente, estas áreas son iguales y menores que en la mitad. (ver figura 8b). Tres estudiantes opinaron que en la sección 1 el diámetro aumenta y el área también, en la sección 2 el diámetro empequeñece y de igual forma el área, y finalmente en la sección 3 el diámetro y el área son constantes, por todo esto consideramos que el gráfico es el que se ilustra en la figura 8c.

5. CONCLUSIONES

La experiencia obtenida en la ejecución de este trabajo nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

- El estudio de las funciones, haciendo uso de situaciones cotidianas, mediante prácticas o experimentos de laboratorio, genera en los estudiantes gran motivación por el estudio de las matemáticas.

- El trabajo con situaciones reales del contexto cotidiano posibilita en los estudiantes la comprensión del concepto de función antes de entrar en detalles con la formalización matemática de su concepto y el trabajo algebraico con ella.

- El paso del sistema de representación figural al gráfico y viceversa ayuda al desarrollo de procesos de abstracción y generalización.

- La mayor dificultad presentada por los estudiantes fue la poca capacidad argumentativa.

- El trabajo en grupos permitió la participación de la totalidad de los estudiantes en cada una de las actividades.

- El enfrentamiento a situaciones que conducen a relaciones funcionales facilitó la comprensión de conceptos tales como: Dependencia e independencia de variables, variación y relación directamente proporcional, además ayudó tanto a transmitir como a interpretar algunas ideas matemáticas.

- Los estudiantes al querer dibujar la grafica de las actividades planteadas, efectuaron una ubicación incorrecta de los puntos en el plano cartesiano, dando origen a la Interpretación inadecuada del significado de la pendiente.

- Para los estudiantes resultaron interesantes las actividades planteadas por ser algo nuevo para ellos, ya que consideraban que consideraban que cada actividad ayudaba a resolver la siguiente, pero dejando ciertas inquietudes y también pudieron comprender la relación entre la pendiente de cada curva y su velocidad de llenado.

6. RECOMENDACIONES

La experiencia obtenida en el trabajo de campo nos permite dar algunas recomendaciones; Para los que deseen algún día realizar trabajos de aula como el presente con las situaciones y el paso de un sistema a otro.

- En el momento de definir las situaciones a tratar, escoger aquellas que tengan que ver con conocimientos previos de los estudiante.

- Abordar el estudio de las funciones utilizando las representaciones semióticas

- Hacer grupos de trabajo no muy numerosos, estos deben estar conformados por estudiantes de distintos niveles de avance para originar una buena participación e intercambiar ideas entre sus miembros.

- A los docentes en ejercicio que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas empleando nuevas y mejores formas de enseñar en cuanto a temas particulares como es el estudio de funciones.

- A los docentes que combinen los sistemas de representación algebraico, grafico y figural entre otros para el estudio de funciones.

7. ACTIVIDADES PROPUESTAS

PRESENTACIÓN

Las actividades desarrolladas en este trabajo han sido planteadas como una herramienta didáctica, buscando una mejor presentación y desarrollo del concepto de función, en este se buscó abordar este tema explorando algunos sistemas de representación y pasando de un sistema de representación a otro, como por ejemplo, del figural al gráfico y viceversa con experiencias de la vida diaria, con el fin de que los estudiantes se sintieran a gusto con las actividades planteadas; dichas actividades fueron realizadas por los estudiantes en el laboratorio de física, las cuales estuvieron guiadas por los proponentes del trabajo.

El cuerpo de las actividades o prácticas realizadas, se muestran a continuación

ACTIVIDAD I

Ilustración gráfica del procedimiento en el llenado de un recipiente con diámetro constante y un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

El objetivo de esta actividad permite involucrar a los estudiantes con el concepto de función, la dependencia e independencia entre variables y el paso del sistema de representación figural al gráfico; en esta se hace necesario que los estudiantes recuerden conceptos previos. La prueba es esencialmente un taller, el cual se les presenta para que los estudiantes resuelvan en forma individual.

MATERIALES:

- Hoja milimetrada, regla, sacapuntas
- Lápiz, borrador, calculadora

MONTAJE

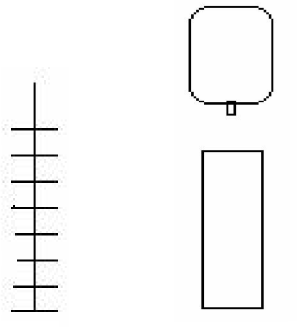


Figura 9.

Procedimiento: en esta actividad se describen dos situaciones; el **llenado de un recipiente con diámetro constante** en la cual desde una dextrosa se deja verter un liquido a determinada velocidad en un tiempo establecido para cierta altura del recipiente y tabular los datos que se muestran en las escalas establecidas en una tabla como se muestra a continuación:

Tiempos t(seg.)	Alturas h(mm)
.	.
.	.
.	.
. . .	. . .
.	.

Para esta situación se le hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes:

- Dibujar la gráfica de la altura alcanzada por el liquido en el sistema de coordenadas, ubicando X en el eje vertical y T en el eje horizontal
- Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
- En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor?

- Cuál sería el tiempo de llenado a los 3 cm y 6 cm de altura?
- Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
- Calcula la pendiente $m = (X_2 - X_1) / (T_2 - T_1)$ Qué significado tiene este resultado?
- qué puedes inferir acerca de esta situación?

MONTAJE:

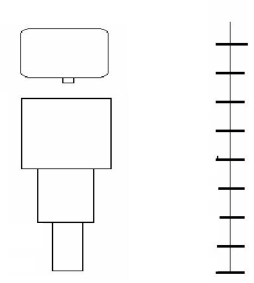


Figura 10, un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura

La situación dos de la actividad I es la ilustración grafica del **llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura**, en el cual se deja caer con una determinada velocidad desde una dextrosa un liquido en un tiempo establecido para llenar el recipiente por secciones y tabular los datos que se muestran en las escalas establecidas en una tabla como se muestra a continuación:

Tiempos t(seg.)	Alturas h(mm)
.	.
.	.
.	.
. . .	. . .
.	.

Para esta situación se le hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes:

- Dibujar la gráfica de la altura alcanzada por el líquido en el sistema de coordenadas, ubica X en el eje vertical y T en el eje horizontal(usar papel milimetrado).
- Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
- En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? Por qué?
- Qué tiempo tarda en llegar a los 8 cm de altura?
- Qué tiempo tardaría en llenarse totalmente?
- Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
- Sería correcto halla la pendiente entre una sección y otra del recipiente? ¿Por qué?
- Qué puedes inferir acerca de esta situación

Actividad II.

Llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

El objetivo de esta actividad es incrementar en los estudiantes la comprensión del concepto de función y su relación con situaciones de la vida cotidiana que involucran funciones; mediante el llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

Esta práctica se debe desarrollar colocando una dextrosa con equipo a cierta altura, de tal forma que el líquido caiga con una velocidad constante en el recipiente, se obtiene cierta información y luego se grafican los datos tabulados de **h vs. t, A vs. t** (y cualquier otra combinación de variables que se conciba con claridad) para luego ver la relación que existe entre la forma del recipiente y la gráfica obtenida; Dicha práctica se desarrolla en grupos de 3 a 6 estudiantes.

MATERIALES:

- Dextrosa con equipo, soporte universal
- Lápiz, regla, borrador, papel milimetrado, cronómetro, calculadora.
- Recipiente que cambia de diámetro a cada 4cm de altura (puede fabricarse con jeringas de diferentes capacidades, para incrementar el diámetro).

PROCEDIMENTO:

- Coloque la dextrosa a una altura a la cual el líquido pueda verterse con facilidad (a una altura fija, de tal forma que el líquido no sea obstruido al bajar).
- Deje verter el líquido en el recipiente con velocidad constante.
- Con el cronómetro mida:
  - El tiempo de llenado desde la parte mas baja hasta donde comienza el segundo nivel de altura.
  - El tiempo de llenado del inicio al final del segundo nivel de altura en la jeringa .
  - El tiempo de llenado desde el inicio hasta el final del i-ésimo nivel de altura en la jeringa.
  - Sigue el proceso hasta el último nivel de altura en la jeringa.
  - apunta los datos obtenidos en una tabla como la siguiente:

Tiempos t(seg.)	Alturas h(mm)	Área transversal A(mm^2)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
. . .	. . .	. . .
.	.	.

.	.	.

A los estudiantes se les pidió realizar los siguientes interrogantes

a) Qué puedes decir si se siguiera el proceso hasta llenar el recipiente?
b) Varía la rapidez de caída del líquido ¿ Qué puedes decir con respecto a lo anterior?. Explica como lo lograste.
c) Realiza un gráfico de altura (h) contra tiempo (t) en el papel milimetrado (coloca t en el eje horizontal y h en el eje vertical).
d) Qué tipo de gráfico obtuviste?
e) Por qué crees qué obtuviste este gráfico?
f) Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?
g) En qué sección hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? ¿Por qué?
h) Será que el área de la sección transversal del líquido es la misma a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?
i) Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal de líquido a medida que se llena el recipiente)
j) Qué tipo de gráfico obtuviste?
k) Por qué crees que obtuviste este gráfico?
l) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?
m) Realiza tus propias conclusiones.

MONTAJE:

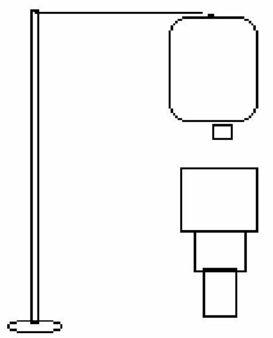


Figura 11, Llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

ACTIVIDAD III:

Llenado de un recipiente que consta de diámetro constante hasta cierta altura y después aumenta continuamente hasta el final.

El objetivo de esta práctica es incrementar en los estudiantes la comprensión de situaciones de la vida diaria que involucran funciones; mediante el llenado de un recipiente en forma de embudo con una escala de medida establecida; Esta práctica se desarrollo colocando una dextrosa con equipo a cierta altura de tal forma que el liquido cayera a una velocidad constante en el recipiente en intervalos de tiempo para luego graficar los datos tabulados de **h vs. t, A vs. t, V vs. t;** y ver la relación que existe entre la forma del recipiente y la gráfica obtenida en cada situación; Dicha práctica fue desarrollada por grupos de 4 a 6 estudiantes.

MATERIALES:

- Dextrosa con equipo,
- Lápiz, regla, borrador
- Papel milimetrado, curvigráfo,
- Cronómetro, calculadora,
- Recipiente que consta de diámetro constante hasta cierta altura y después aumenta continuamente hasta el final (Embudo).
- Soporte universal

PROCEDIMENTO:

- Coloque la dextrosa a una altura a la cual el líquido pueda verterse con facilidad (a una altura fija, de tal forma que el líquido no sea obstruido al bajar).
- Deje verter el líquido en el recipiente con velocidad constante.
- Con el cronómetro mida:

- El tiempo de llenado desde la parte mas baja hasta el inicio del segundo nivel de altura.
- El tiempo de llenado desde el inicio hasta el final del segundo nivel de altura.
- El tiempo de llenado desde el inicio hasta el final del tercer nivel de altura.
- Sigue el proceso hasta llegar al final del sexto nivel de altura.
- apunta los datos obtenidos en una tabla como la siguiente:

Tiempos t(seg.)	Alturas h(cm)	Área Transversal (cm^2)	Volumen V(cm^3)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
. . .	. . .	. . .	. . .
.	.	.	.

1. Qué puedes decir si se siguiera el proceso hasta llenar el recipiente ?
2. Varía la rapidez de caída del líquido ¿ Qué puedes decir con respecto a lo anterior?.

A los estudiantes se les pidió realizar los siguientes interrogantes:

a) Realiza un gráfico de altura (h) contra tiempo (t) en el papel milimetrado (coloca t en el eje horizontal y h en el eje vertical).
b) Qué tipo de gráfico obtuviste?
c) Por qué crees qué obtuviste este gráfico?
d) Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?
e) Qué puedes decir acerca de la rapidez de llenado
f) Qué sucede con el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?

g) Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal de líquido a medida que se llena el recipiente)
h) Qué tipo de gráfico obtuviste?
i) Por qué crees que obtuviste este gráfico?
j) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?
k) Realiza un gráfico con los datos obtenidos para el volumen.
l) Como es la relación entre v y t?
m) Qué tipo de gráfico obtuviste?
n) Por qué crees que obtuviste este gráfico?
o) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?
p) Realiza tus propias conclusiones.

MONTAJE

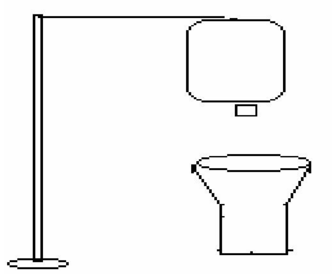


Figura 12, Llenado de un recipiente que consta de diámetro constante hasta cierta altura y después aumenta continuamente hasta el final.

ACTIVIDAD I V:

El paso de un sistema figural al grafico y viceversa en el llenado de un recipiente transparente.

El objetivo de esta prueba buscaba mirar en los estudiantes la capacidad de comprensión de situaciones que involucran funciones que podrían presentárseles en la vida cotidiana; el cual consistía en primera instancia en realizar los gráficos de h vs. t y A vs. t; en donde el recipiente como se muestra a continuación:

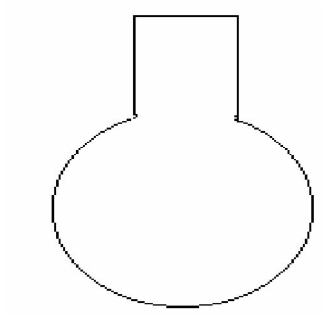


Figura 13, paso del sistema figural al gráfico.

se llena con un liquido que cae a velocidad constante, y en la cual se le pide a los estudiantes realizar los siguientes gráficos:

- Altura de llenado del recipiente en función del tiempo
- El área de la sección transversal del liquido a medida que se llena el recipiente.

En segunda instancia se mostró la gráfica:

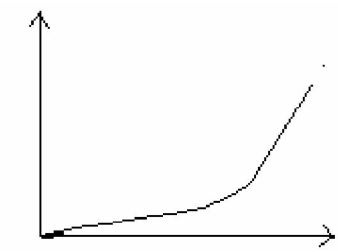


Figura 14, paso del sistema gráfico al figural.

para dibujar el recipiente que describe el gráfico al llenarse con un liquido que cae a velocidad constante; y esta prueba fue realizada individualmente por cada estudiante.

MATERIALES:

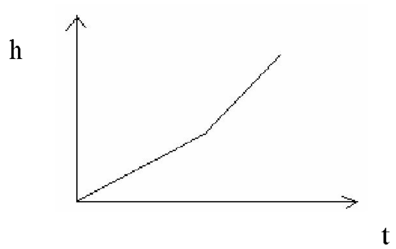
- Lápiz, Borrador, regla, curvigráfo

- Papel milimetrado, guía de prueba final.

ACTIVIDAD V:

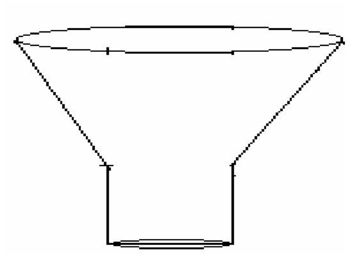
Paso del sistema de representación gráfico al figural y viceversa.

Esta prueba tuvo como objetivo observar que tanto trabajan este aspecto los docentes a nivel de la secundaria y a nivel universitario la cual estuvo comprendida por dos situaciones en las que se planteo en primera instancia el paso del sistema de representación gráfico al sistema de representación figural, mediante la ilustración de una gráfica, relacionando la altura en función del tiempo en la cual se le pide al docente que analice la siguiente gráfica:



y luego dibuje un recipiente que al llenarse con un líquido que cae a velocidad constante se relacione con la gráfica

En la segunda instancia se planteo el procedimiento contrario, es decir se pasa del sistema figural al gráfico; se le muestra al docente un recipiente en forma de embudo como el siguiente:



Luego se le pide realizar el gráfico del área de la sección transversal de llenado del recipiente en función del tiempo (área de la superficie del agua) a medida que se va llenando el recipiente.
Y por ultimo se le pide al docente que explique su respuesta y de algunas sugerencias de la prueba.

esta vez se relaciono el área en función del tiempo.

MATERIALES:

- Lápiz, borrador, regla
- Prueba a desarrollar.

8. BIBLIOGRAFIA

CASTEL NUOVO Emma; Didáctica de la Matemática Moderna, Serie de Matemáticas; Trillas; Segunda Edición México 1999.

CHARLES CROOK; Ordenadores y Aprendizajes Colaborativo; Ediciones Morata; Ministerio de Educación Nacional; Primera edición; Madrid España 1998.

DOLORES FLORES Crisologo, CATALAN Alfonso; Formación del concepto de Derivada a través de la variación; investigación en Matemática educativa, Vol. 2 México 1997

DOLORES FLOREZ, Crisologo . Una introducción a la derivada a través de la variación grupo editorial iberoamericana, México 1997.

Hernández , M. Víctor. Algunas conjeturas sobre la noción de problema, lingüística y educación matemática y las perspectivas del uso de tecnología. México. 1996.

HITT, Fernando. PÁEZ MURILLO, Rosa. Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. Revista Uno, No. 32. México. 2003.

HITT, Fernando. Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambiente con tecnología, Boletín de la asociación matemática Venezolana, Vol. X. México. No 2, 2003.

LINEAMIENTOS CURRICULARES (Matemáticas) Ministerio de Educación Nacional; Editorial Magisterio; Santa Fe de Bogota, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Matemáticas lineamientos curriculares, Pág. 74, Bogotá 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas, Lineamientos curriculares, p 25, Bogotá 1999.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Seminario nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie memorias, Pág. 110, Bogotá 2001.

MORENO ARMELLA, Luis. Waldegg , Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México. 2000.

POLYA, George; Como Plantear y Resolver Problemas; Serie de Matemáticas Trillas México 2001.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel; Principios y Métodos de l a resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas; Segunda Edición; Grupo Editorial Ibero Americano MEXICO 1997.

SCHIEFELE, H (1963).

WENZELBULGER, Elfriede. Didáctica Cálculo Diferencial, grupo editorial iberoamericana, México. 1994.

ANEXOS

ANEXO A: Llenado de un recipiente con diámetro constante y otro que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

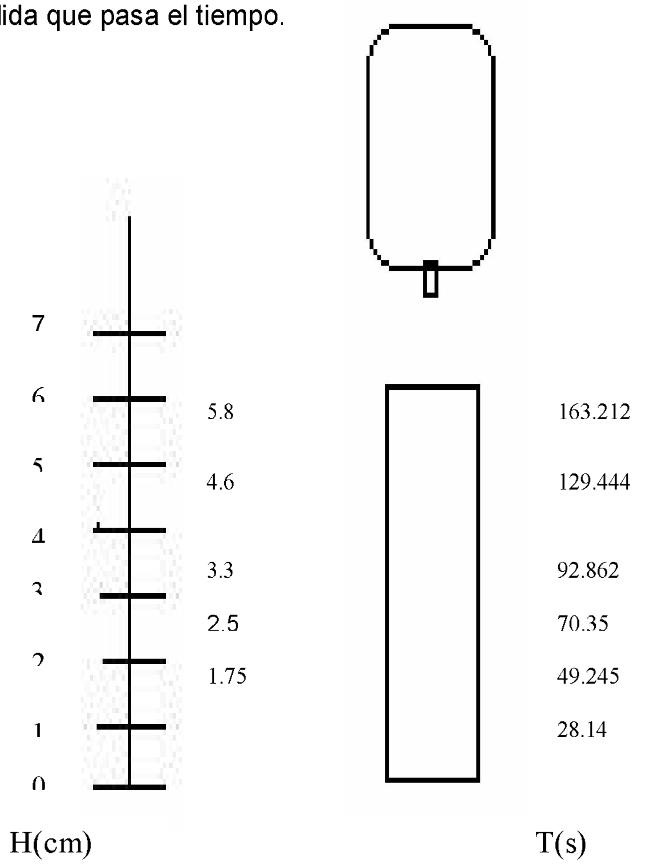
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

GRADO 11 GRUPO___________________ FECHA______________________

La siguiente actividad tiene como objeto: adquirir información que será usada en el desarrollo de nuestro trabajo de grado, por tanto solicitamos y a la vez agradecemos sean lo más objetivo posible en la realización de esta prueba.

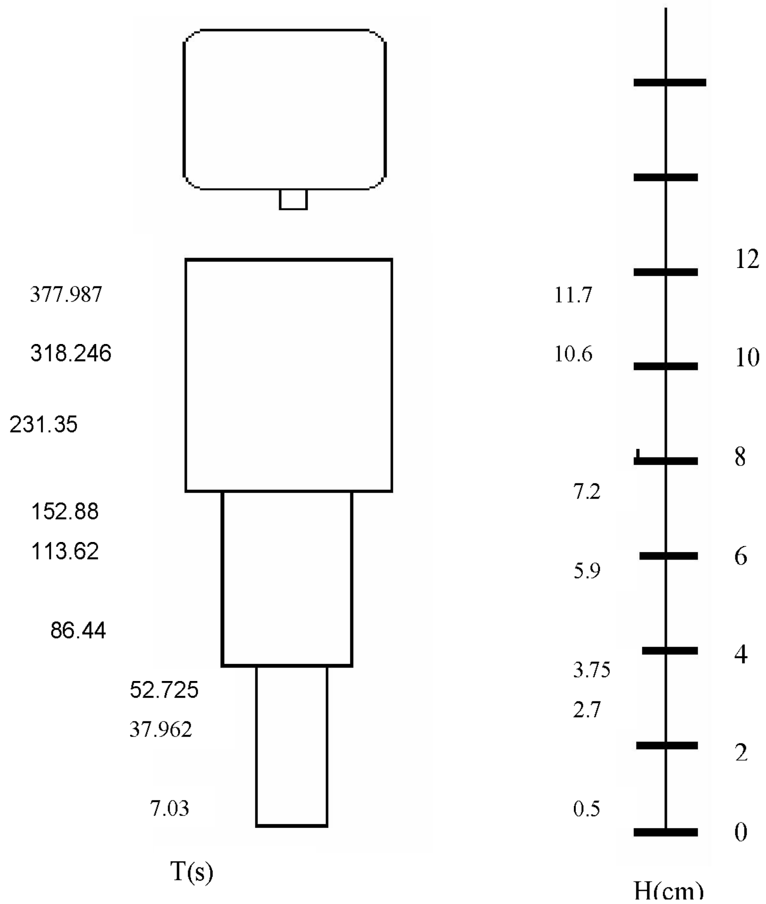
Desde una dextrosa se deja verter un líquido, para llenar un recipiente que tiene un diámetro constante (ver figura). En el diagrama vemos que nivel ha alcanzado el líquido a medida que pasa el tiempo.



- Dibujar la gráfica de la altura alcanzada por el líquido en el sistema de coordenadas, ubica X en el eje vertical y T en el eje horizontal(usar papel milimetrado).
- Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
- En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor?
- Cuál sería el tiempo de llenado a los 3 cm y 6 cm de altura?
- Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
- Calcula la pendiente m Qué significado tiene este resultado?
- qué puedes inferir acerca de esta situación?

Situación 2. Desde una dextrosa se deja verter un líquido, para llenar un recipiente, en el cual el diámetro se mantiene constante en cada sección de éste (ver figura).

En el diagrama vemos que nivel ha alcanzado el líquido a media que pasa el tiempo.



a) Dibujar la gráfica de la altura alcanzada por el líquido en el sistema de coordenadas, ubica X en el eje vertical y T en el eje horizontal(usar papel milimetrado).

b) Qué puedes decir acerca de la velocidad de llenado?
c) En qué intervalo hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? Por qué?
d) Qué tiempo tarda en llegar a los 8 cm de altura?
e) Qué tiempo tardaría en llenarse totalmente?
f) Qué tipo de gráfico obtuviste? Por qué?
g) Sería correcto halla la pendiente entre una sección y otra del recipiente? ¿Por qué?
h) Qué puedes inferir acerca de esta situación

ANEXO B: Paso del sistema de representación gráfico al figural y viceversa.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

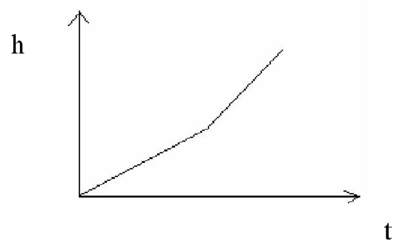
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

INSTITUCION: ______________________________ FECHA: ______________

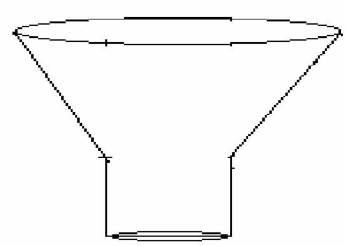
La siguiente actividad tiene como propósito observar que tanto se trabaja este aspecto a nivel universitario y a nivel de secundaria.

1. Dada la siguiente grafica :



Dibuje un recipiente que al llenarse con un líquido que cae a velocidad constante, describa una gráfica de altura contra tiempo (como la anterior).

2. Si se tiene el siguiente recipiente:



realiza una gráfica del área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente en función del tiempo. (área de la superficie del líquido). Explica tu respuesta.

ANEXO C: Llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

GRADO 11. GRUPO: ______________________
FECHA:__________________

INTEGRANTES : _____________________ ,
____

_____________________ , ____________________________

_____________________, ____________________________

PRACTICA DE LABORATORIO 1.

NOMBRE DE LA PRACTICA: Llenado de un recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

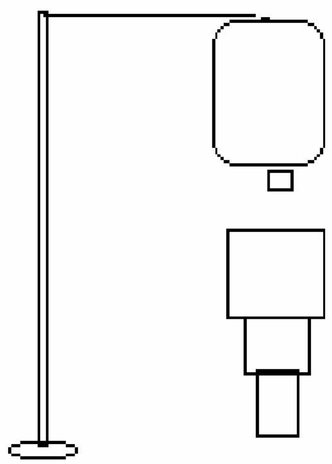
1 OBETIVO: Incrementar en los alumnos la comprensión de situaciones que involucran funciones.

2 MATERIALES: Lápiz, regla de 30 cm, borrador, papel milimetrado, cronómetro, dextrosa con equipo, recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

3 PROCEDIMENTO:

- Coloque la dextrosa a una altura a la cual el líquido pueda verterse con facilidad.
- Deje verter el líquido en el recipiente con velocidad constante.
- Con el cronómetro calcula:
- El tiempo de llenado hasta el primer nivel de altura.
- El tiempo de llenado desde el primer nivel al segundo nivel de altura.
- El tiempo de llenado desde el segundo nivel al tercer nivel de altura.
- Sigue el proceso hasta el sexto nivel de altura.
    a. Qué puedes decir si se siguiera el proceso hasta el final?

b. Varía la rapidez de caída del líquido ¿ Qué puedes decir con respecto a lo anterior?.



4 DESARROLLO

a) Realiza un gráfico de altura (h) contra tiempo (t) en el papel milimetrado (coloca t en el eje horizontal y h en el eje vertical).

b) Qué tipo de gráfico obtuviste?___________________________________

____

c) Por qué crees qué obtuviste este gráfico? _________________________

____

____

d) Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?

____

____

e) En qué sección hubo mayor rapidez de llenado y en cuál hubo menor? ¿Por qué?____

____

f) Será que el área de la sección transversal del líquido es la misma a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?______________________________

____

____

g) Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal de líquido a medida que se llena el recipiente)

h) Qué tipo de gráfico obtuviste?____________________________________

____

____

i) Por qué crees que obtuviste este gráfico?___________________________

____

____

j) Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?_____________

____

k) Realiza tus propias conclusiones.

ANEXO D: Llenado de un recipiente de diámetro constante hasta cierta altura y después aumenta continuamente hasta el final.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

GRADO 11. GRUPO: ____________________
FECHA:________________
INTEGRANTES : ____________________ , ___________________________

____________________ , ___________________________

____________________, ___________________________

PRACTICA DE LABORATORIO 2

NOMBRE DE LA PRACTICA: Llenado de un recipiente que consta de diámetro constante hasta cierta altura y después aumenta continuamente hasta el final.

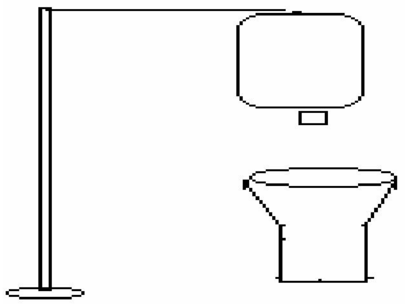
1 OBETIVO: Incrementar en los alumnos la comprensión de situaciones que involucran funciones.

4 MATERIALES: Lápiz, regla de 30 cm, borrador, papel milimetrado, cronómetro, dextrosa con equipo, recipiente que cambia de diámetro a cada 4 cm de altura.

5 PROCEDIMENTO:

- Coloque la dextrosa a una altura a la cual el líquido pueda verterse con facilidad.
- Deje verter el líquido en el recipiente con velocidad constante.
- Con el cronómetro calcula:
- El tiempo de llenado hasta el primer nivel de altura.

- El tiempo de llenado desde el primer nivel al segundo nivel de altura.
- El tiempo de llenado desde el segundo nivel al tercer nivel de altura.
- Sigue el proceso hasta el sexto nivel de altura.
- Qué puedes decir si se siguiera el proceso hasta el final?
- Varía la rapidez de caída del líquido ¿ Qué puedes decir con respecto a lo anterior?.



4 DESARROLLO

a. Realiza un gráfico de altura (h) contra tiempo (t) en el papel milimetrado (coloca t en el eje horizontal y h en el eje vertical).

b. Qué tipo de gráfico obtuviste?___________________________________

c. Por qué crees qué obtuviste este gráfico? _________________________

____

d. Qué puedes concluir acerca de la relación entre t y h?

____

e. Qué puedes decir acerca de la rapidez de llenado.

____

f. Qué sucede con el área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente? ¿Por qué?_____________________________

____

g. Dibuja el gráfico que describe esta situación (área de la sección transversal de líquido a medida que se llena el recipiente)
h. Qué tipo de gráfico obtuviste?____________________________________

____
i. Por qué crees que obtuviste este gráfico?___________________________

____
j. Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?______________

____
k. Realiza un gráfico con los datos obtenidos para el volumen.
l. Como es la relación entre v y t?

m. Qué tipo de gráfico obtuviste?____________________________________

____
n. Por qué crees que obtuviste este gráfico?___________________________

____
o. Con qué tipo de función(es) tiene relación esta situación?______________

____
p. Realiza tus propias conclusiones.

ANEXO E: El paso de un sistema figural al grafico y viceversa en el llenado de un recipiente transparente.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

GRADO: ______________ GRUPO: _____________ FECHA: _______________

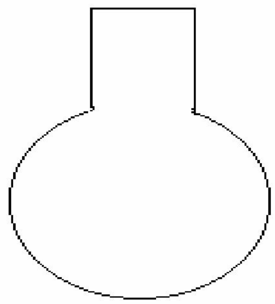
OBJETIVO: Incrementar la capacidad de comprensión de situaciones que involucren funciones.

PRUEBA 3

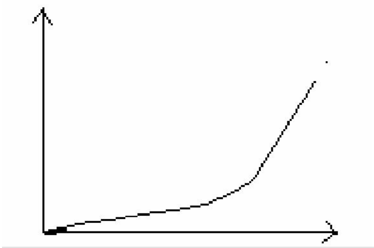
1. Dibuja los gráficos que describen las siguientes situaciones:

a. El llenado del recipiente (abajo) con un líquido que cae a velocidad constante

b. El área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente.



2. dibuja el recipiente que describe el gráfico (abajo) al llenarse con un líquido que cae a velocidad constante.



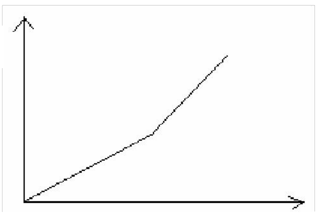
.

ANEXO F: **Análisis de prueba realizada por docentes**

Para la realización de la prueba aplicada a docentes se plantearon dos actividades, las cuales se realizaron durante una sola sesión de treinta minutos.
Esta prueba tuvo como objetivo observar que tanto trabajan este aspecto los docentes a nivel de la secundaria y a nivel universitario.

Primera actividad:
En esta actividad se le pidió al docente que dada la figura, dibuje un recipiente que al llenarse con un líquido que cae dentro de él se obtenga como resultado esta gráfica:

h



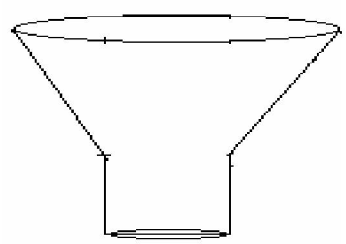
t

En sus explicaciones los docentes refirieron:
Hice esta figura (ver Figura 15 a), ya que no se me está especificando que la figura deba cambiar en un determinado tiempo o intervalo de éste.
Las pendientes según la gráfica son distintas, así que hasta cierta altura tendrá un tiempo t_1 y después un tiempo t_2. (ver Figura 15b y 15c); en su explicación el

profesor resaltó que esto sucedía porque para él no era común éste tipo de ejercicios; por lo menos nunca lo había pensado, aunque manifestaba que no era difícil de realizar.
El desempeño de este docente frente a esta situación parece indicar que no tuvo una idea clara respecto al paso del sistema de representación gráfico al sistema de representación figural ya que e le dificulto en cierto modo realizar la actividad (ver Figura 15d), manifestando no haber entendido en realidad la prueba.

Algunos docentes mostraron haber hecho un razonamiento correcto sobre la información planteada gráficamente, lo cual conllevó a una representación satisfactoria en el sistema figural, como se muestra en la figura 15e, y en sus explicaciones los docentes esbozaron que la gráfica determina que hay dos pendientes, las cuales indican la rapidez con que se llena el recipiente y se puede ver que después de un tiempo, éste empieza a llenarse más rápido, a medida que la pendiente se hace menos inclinada.

Segunda actividad
El paso del sistema de representación figural al sistema de representación gráfico, Mediante la ilustración de un recipiente transparente como se muestra a continuación:



Se pide a los Docentes realizar la gráfica del área de la sección transversal del líquido a medida que se llena el recipiente en función del tiempo. (área de la superficie del líquido), y explicar el por que de su respuesta.

Cinco Docentes diligenciaron erróneamente el grafico, debido a que parece haber reinado la intuición de que el área de la sección transversal del líquido después de ser constante aumenta continuamente hasta el final del recipiente, pero no se determino la variación de una variable con respecto a la otra en la situación.

Un docente explico que obtuvo el gráfico figura 15f porque el área de la sección transversal del líquido, en el primer intervalo de tiempo es constante y esta no puede empezar de cero, sino del valor que tenga el primer área; y además que en el fondo tal sección transversal es diferente de cero y en el segundo intervalo observó que el área varía (es decir, aumenta). Mientras otro docente refirió que al inicio el área es constante y mayor que cero y luego el área aumenta continuamente hasta el final, sustentó sus argumentos con la Figura 15g.

De manera muy diferente otro docente, dibujo para la primera sección del recipiente donde el diámetro es constante tres gráficos de comportamiento constante, los cuales parten al mismo tiempo, lo que puede hacer pensar que existen tres áreas constantes y distintas para la misma situación. Y para la segunda sección en donde el diámetro va aumentando dibujo una serie de parábolas con parámetros positivos, es decir, abren hacia arriba, las cuales comparten el mismo eje (ver Figura 15h, 15i). El docente enfatizó que sólo sabía que este tipo de problemas tenían relación con la física, y que no eran complicados de analizar, pero que lo habían tomado fuera de base. Por otro lado, un docente refiere que al inicio el área es constante y mayor que cero y luego aumenta continuamente hasta el final. Este docente, realizó correctamente el gráfico que describe el área de la sección transversal del liquido a medida que se eleva en el recipiente, ya que para la primera sección esbozó un gráfico constante y para la segunda sección dibujo una curva ascendente (ver Figura 15j) como la rama de una parábola que tiene parámetros positivos, teniendo un razonamiento acorde a la situación planteada al pasar del sistema figural al sistema gráfico, lo que le permitió dar la solución deseada; En su explicación el docente afirma que el área para la primera sección es constante y mayor que cero y para la segunda aumenta cada vez más rápidamente, ya que el área está dada por una ecuación cuadrática y el líquido cae a velocidad constante.

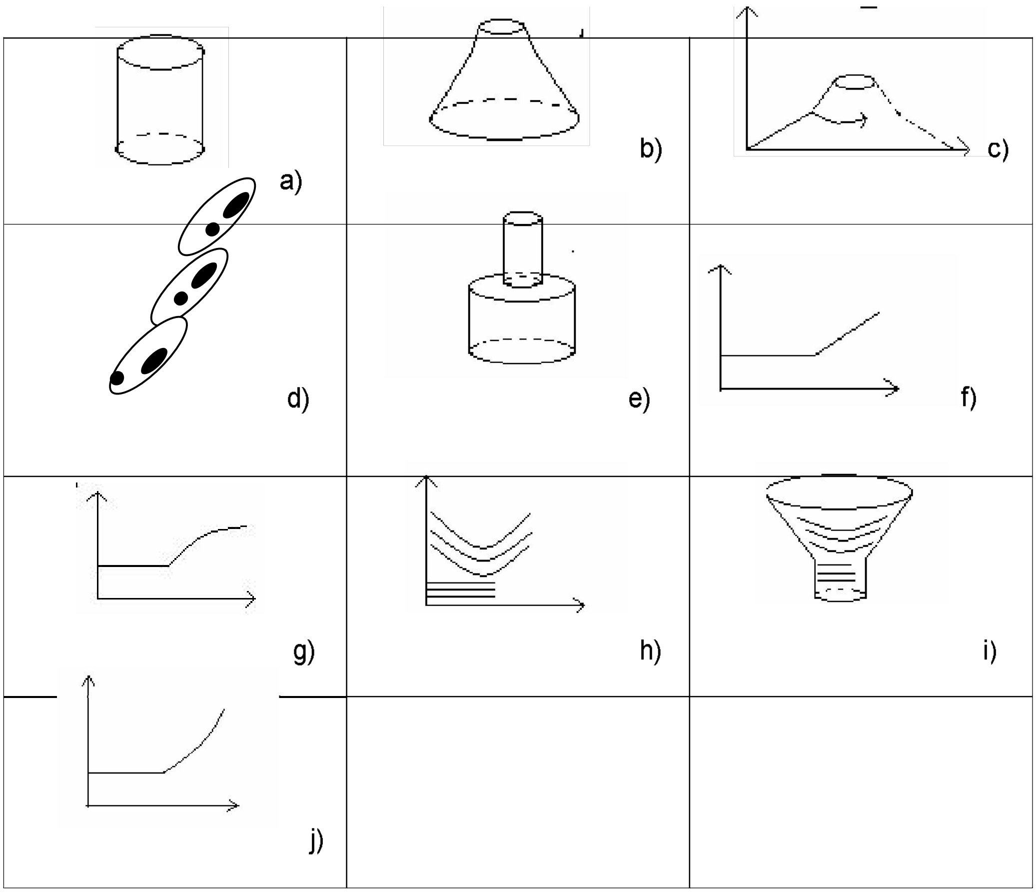


Figura 15. Gráficos correspondiente a la prueba aplicada a docentes.

Las dificultades presentadas en el desarrollo de esta prueba realizada a docentes. observadas por los proponentes del trabajo se dieron, debido a que este tipo de situaciones no son comúnmente trabajadas a nivel de la básica y/o media , cometiendo de esta manera errores de interpretación a la hora de analizar una información presentada de manera gráfica y figural, los cuales según Duval (1998, Pág. 24) "son sistemas en los que se deben apoyar los docentes para la construcción de conceptos", ya que no se analiza de modo correcto la variación de una variable con respecto a otra que es función de ésta, se presta más atención a la forma del gráfico que a la información que realmente contiene, o tal vez porque en la enseñanza de las matemáticas la mayoría de los docentes privilegian el sistema algebraico, lo que en estos momentos hace resaltar el punto de vista teórico de **Hielber y Lefevre** acerca de que el conocimiento adquirido debe ser contextualizado.

Al igual que las dificultades presentadas pudimos observar que los docentes al enfrentarse a la prueba hacían comentarios tales como:

- Ahora mismo estoy ocupado, no tengo tiempo.
- Si me lo dejas te lo resuelvo.
- Me parece algo interesante, esto en realidad se necesita, pues obliga a pensar.