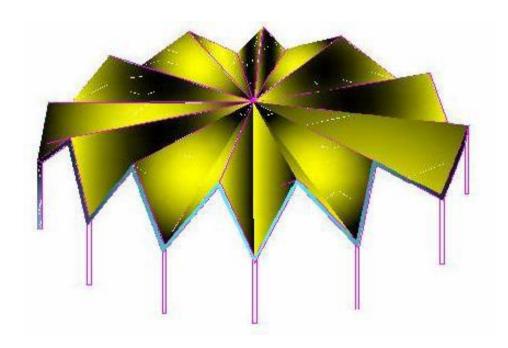
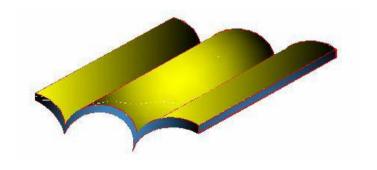
CASCARONES EN CONCRETO PARA BOVEDAS Y PLACAS PLEGADAS



ALBA C. MARTINEZ P. BLADIMIR J. PORTO G.



CASCARONES EN CONCRETO PARA BOVEDAS Y PLACAS PLEGADAS

ALBA C. MARTINEZ PEREZ BLADIMIR J. PORTO GOMEZ

UNIVERSIDAD DE SUCRE FACULTAD DE INGENIERIA PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL SINCELEJO 2006

CASCARONES EN CONCRETO PARA BOVEDAS Y PLACAS PLEGADAS

ALBA C. MARTINEZ PEREZ BLADIMIR J. PORTO GOMEZ

El presente trabajo se realizo como requisito para optar el titulo de Ingeniero civil.

Director:
JUAN ELIÉCER VILLALOBOS PEREZ
Ingenier o Civil
Especialista en Análisis y Diseño de Estructuras.

UNIVERSIDAD DE SUCRE FACULTAD DE INGENIERIA PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL SINCELEJO 2006

AL INGENIERO JUAN ELIECER VILLALOBOS QUE NOS REGALO LA IDEA DE HACER ESTE LIBRO

CONTENIDO

Pág. INTRODUCCIÓN CAPITULO 1 GENERALIDADES SOBRE CASCARONES EN CONCRETO. ------10 1.1.1. Viga de bordes------12 1.1.2 Nervios y diafragmas de extremo.-----13 1.4 Usos de los cascarones en concreto.------1.5 Clasificación de los cascar ones.------1.6 Comportamiento estructural de los cascarones.-----18 **CAPITULO 2** INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑOS DE CASCARONES EN

2.1 Teoría de la membrana para cascarones en concreto22
2.2. Suposiciones básicas y simplificaciones
2.2.1. Teoría del arco
2.3. Método combinatorio entre la teoría de la membrana y la teoría de la flexión30
CAPITULO 3 BOVEDAS EN CONCRETO 32
3.1. Usos de las bóvedas
3.2 Esfuerzos en bóvedas35
3.3 Bóvedas largas
3.4. Bóvedas cortas
3.5. Bóvedas y su análisis riguroso46
3.6. Ejemplo de diseño de bóvedas para cubierta54
CAPITULO 4 CASCARONES EN CONCRETO PARA PLACAS DOBLADAS O PLEGADAS

4.1. Ventajas y comportamiento estructural de una placa plegada
4.2. Distribución de esfuerzos de una placa plegada 68
4.3. Refuerzo en una placa plegada
4.4. Secciones y dimensiones típicas de una placa plegada72
4.5. Análisis de placas plegadas73 4.5.1. El método de Yitzhaki para placas dobladas o plegadas75
4.6. Ejemplo de diseño de una cubierta con placas plegadas usando el método de Yitzhaki
CAPITULO 5
RECOMENDACIONES Y COMENTARIOS FINALES SOBRE CASCARONES DE CONCRETO101
BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCIÓN

AMIGO LECTOR, bienvenido al maravilloso mundo de los cascarones en concreto... Cuando se habla de un cascarón estructural, se hace alusión a una estructura de superficie curva que por lo general esta en la capacidad de transmitir cargas en más de dos direcciones hacia los apoyos. Para lograr una alta eficiencia estructural es necesario conformarlos, proporcionarlos y apoyarlos de tal forma que transmitan las cargas, sin doblarse ni torcerse.

Un cascarón se define por su *SUPERFICIE MEDIA*, ubicada a la mitad de la distancia entre la superficie externa (EXTRADOS) y la superficie interna (INTRADOS).

Por lo tanto, según sea la geometría de la superficie media, puede ser del tipo de domos, bóveda, cono o paraboloide hiperbólico. Su espesor es la distancia perpendicular (normal) a la superficie media, entre el extradós y el intrados.

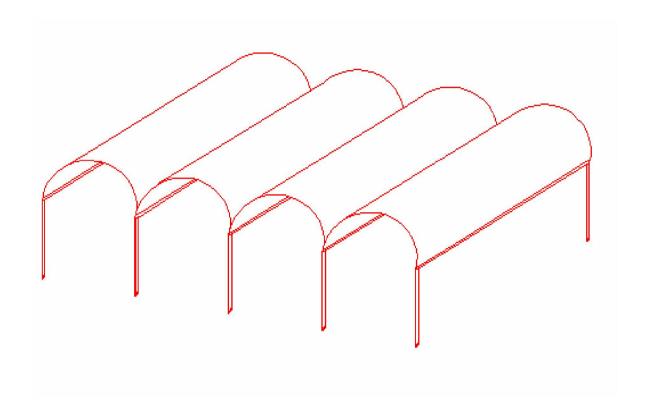
Pueden utilizarse muchas formas de cascarones en concreto, las cuales deben tener superficies que puedan expresarse en términos geométricos; en general, se supone un comportamiento elástico para el análisis estructural de cascarones, haciéndose las suposiciones pertinentes y adecuadas para lograr una aproximación al comportamiento tridimensional de los cascarones en concreto.

Para determinar los esfuerzos, se puede usar la teoría de la membrana y también la teoría de la flexión, cabe anotar que la teoría de la membrana no toma en cuenta los esfuerzos de la flexión.

Un cascarón de concreto esta sujeto a momento de flexión para cargas uniformes y simétricas así como para cargas asimétricas, estas ultimas ocasionan momento de flexión en todo el cascaron en tanto que las primeras ocasionan momentos principalmente en los bordes y apoyos, los cuales suelen ser muy grandes obligando a tomar medidas para resistirlos; las consecuencias de no tener en cuenta estos momentos son las grietas, la deformación y aumento de forma y tamaño de estas estructuras, lo cual origina grandes deflexiones que inestabilizan la estructura.

Este libro puede ser leído y entendido por estudiantes con conocimientos básicos de mecánica de resistencia de materiales, así como, fundamentos de hormigón armado.

El capitulo I trata los aspectos básicos de los cascarones en concreto, entre ellos se destaca sus usos y clasificación, el capitulo II se refiere a los aspectos de análisis y diseño, se resaltan las diferentes teorías basadas en elasticidad, los capítulos III y IV muestra casos específicos de cascarones como son las bóvedas y las placas plegadas, por ultimo el capitulo V presenta una serie de recomendaciones sobre proceso constructivo.



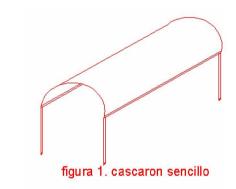
CAPITULO 1

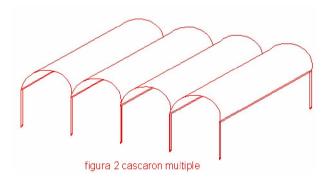
GENERALIDADES SOBRE CASCARONES EN CONCRETO

1. GENERALIDADES SOBRE CASCARONES EN CONCRETO

Para tratar los aspectos principales sobre cascarones en concreto se toma como ejemplo los de cilindros, en los cuales se muestran características comunes a los demás tipos de cascarones.

Los cascarones pueden ser de un solo claro transversal (figura 1) o de múltiples luces (figura 2).



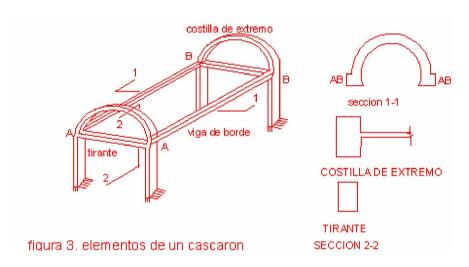


Como es lógico, el análisis arrojara una distribución de esfuerzos diferentes para un cascarón individual que para uno de arcos múltiples aunque las consideraciones de diseño son las mismas, generalmente los esfuerzos de diseño en un cascarón son muy pequeños y requieren poco refuerzo. Los cascarones como los de la figura 1 y 2, son delgados con un espesor que varia entre 10cm y 15cm, las luces longitudinales y transversales pueden alcanzar los 90m.

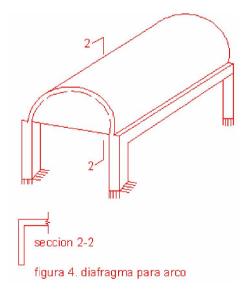
Con el fin de rigidizar la estructura se usan vigas de borde y el cascarón se engrosa en los bordes y apoyos, estos elementos se conocen como *atiezadores de borde*.

1.1 ELEMENTOS DE UN CASCARÓN

Estas estructuras constan de vigas de borde y de costillas o nervios en los extremos del arco (figura 3).



El diseñador puede en lugar de utilizar un nervio en el extremo del arco usar un diafragma de extremo (figura 4).



1.1.1. VIGAS DE BORDE

Estas funcionan como vigas normales con cargas verticales; excepto porque se aplica un esfuerzo constante adicional en la cara superior (unión con el cascarón), además se debe suponer que una parte del cascarón actúa con los elementos de apoyo (igual que el ancho del patín permitido para vigas T) de la misma manera se debe proveer en el cascarón un refuerzo transversal igual que el requerido para el patín de la viga T y se debe anclar en la viga de borde (figura 5.).

NOTA:

Recordemos que según:

NSR-98 – Capítulo C.8 – Análisis y diseño

- C.8.5.7 CONSTRUCCION CON VIGAS T En la construcción con vigas T, el ala y el alma deben construirse monolíticamente o de manera tal que se asegure su unión efectiva.
- C.8.5.7.1 El ancho de losa efectivo como ala de una viga T no debe exceder 1/4 de la luz de la viga. El ala efectiva que se proyecta hacia cada lado del alma no debe exceder:
- (a) 8 veces el espesor de la losa, ni
- (b) la mitad de la distancia hasta el alma siguiente.
- C.8.5.7.2 Para vigas con losa en un lado solamente, el ancho efectivo de ala que se proyecta no debe exceder de:
 - (a) 1/12 de la luz de la viga,
 - (b) 6 veces el espesor de losa, ni
 - (c) La mitad de la distancia libre hasta el alma siguiente.
- C.8.5.7.3 Las vigas aisladas en las cuales la forma de T se utiliza para proporcionar un ala como área adicional de compresión, deben tener un espesor de ala no menor que la mitad del ancho del alma, y un ancho efectivo de ala que se proyecta hacia cada lado del alma, no mayor que 4 veces el ancho del alma.
- C.8.5.7.4 Cuando el refuerzo principal a flexión de una losa que se considera como una viga T (con excepción de las viguetas) es paralelo a la viga, debe colocarse refuerzo perpendicular a la viga en la parte superior de la losa de acuerdo con los siguientes requisitos:
 - (a) Es necesario diseñar refuerzo transversal para sostener la carga aplicada sobre la losa que sobresale del alma, suponiendo que actúa como un voladizo. Para vigas

aisladas, debe considerarse el ancho total del ala. Para las otras vigas T, solo hay necesidad de considerar el ancho de ala efectivo que se proyecta hacia cada lado del alma.

(b) El refuerzo transversal no debe espaciarse a más de 5 veces el espesor de la losa, ni a más de 500 mm.

.

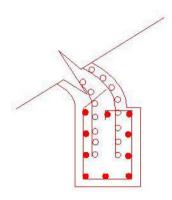


Figura 5. viga de borde

1.1.2. NERVIOS Y DIAFRAGMAS DE EXTREMOS.

Los esfuerzos en estos elementos son pequeños. El refuerzo mínimo es el mismo especificado en la N.S.R.98. Para una viga o para un diafragma o losa.

NOTA:

Recordemos que según:

NSR-98 – Capítulo C.7 – Detalles del refuerzo

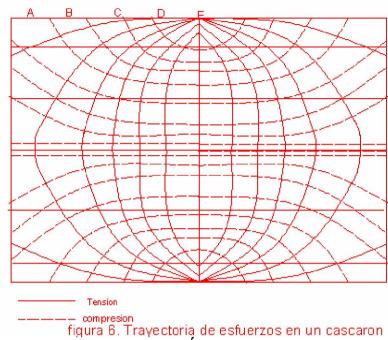
- C.7.12 REFUERZO PARA RETRACCION DE FRAGUADO Y VARIACION DE TEMPERATURA
- C.7.12.1 En losas macizas reforzadas en una dirección debe colocarse un refuerzo secundario para efectos de retracción de fraguado y temperatura, en la dirección perpendicular al refuerzo principal. La relación de área de refuerzo a área bruta de concreto debe tener, como mínimo, uno de los siguientes valores, los cuales son aplicables cuando la losa puede expandirse o contraerse libremente, o cuando se admite

que se presente fisuración sin ningún control especial, o cuando el control de
fisuración es innecesario:
Para barras lisas,o corrugadas, con resistencia a la fluencia f'y menor o igual a 350
MPa
Para barras corrugadas con f'y igual a 420 MPa, o mallas electrosoldada de alambre liso
corrugado
Para refuerzo con un punto de fluencia f'y mayor de 420 MPa, correspondiente a una
deformación unitaria de fluencia de 0.35%(0.0018x 420)/F'y (MPa)
pero no menor de 0.0014

1.2 ESFUERZOS EN CASCARONES DE CONCRETO

Los esfuerzos determinados con el análisis pueden combinarse para indicar los esfuerzos principales (tensión y compresión) en cada punto del cascarón. Si estos esfuerzos se trazan en una proyección las líneas de esfuerzos (trayectorias de esfuerzos constantes) serán curvas, las trayectorias para esfuerzos de tensión siguen un patrón en diagonal cerca de los apoyos y son casi horizontales alrededor del punto medio de la luz (figura 6).

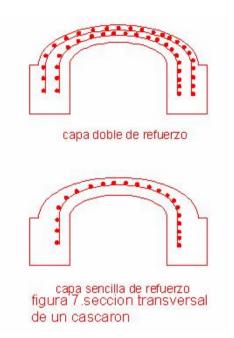
Esta grafica se elabora en base a cálculos y ensayos de laboratorio de igual forma como se traza una curva de nivel en topografía o los bulbos de esfuerzos de presiones en los estudios de suelo.



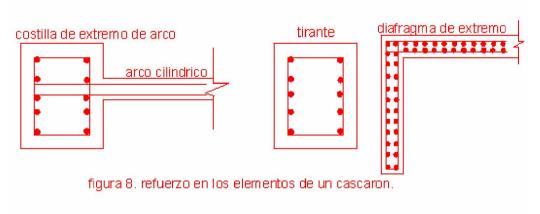
1.3 REFUERZO EN UN CASCARÓN DE CONCRETO

Las barras para resistir los esfuerzos se colocan a lo largo de las líneas principales de esfuerzos, esto es muy difícil de lograr en obra por que las varillas de diámetros grandes se deben doblar y se necesita cuidado especial al colocarlas. Se recomienda que en lo posible, el acero principal se coloque en forma de rejilla con la mayor concentración a lo largo de los bordes; para controlar las grietas por cambio de temperatura y contracción se coloca el refuerzo mínimo.

El refuerzo puede colocarse en una capa, en dos capas y hasta en tres capas (figura 7) dependiendo como sean los esfuerzos, no se puede desconocer que en cascarones muy delgados (7.5cm a 11.5cm) solo habrá espacio para una sola capa, con mayor probabilidad de agrietarse debido a deformaciones locales, algunas grietas no son perjudiciales para estructura pero permiten el paso del agua; por lo anterior, no son muy recomendable los cascarones de una sola capa de refuerzo, ahora, que si es absolutamente necesario usar este tipo de cascarones la solución es construirlo con recubrimiento impermeabilizado en la parte exterior. Si la luz de la estructura es pequeña se puede usar malla metálica en dos direcciones en lugar de varilla, siempre que la resistencia del acero a la fluencia no deba exceder 420Mpa.



El refuerzo longitudinal para un cascarón debe estar bien anclado en las costillas o nervios, debido a la transmisión de cortante entre el cascarón y las costillas, por tanto se debe comprobar los esfuerzos cortantes y proveer refuerzo (figura 8).



1.4 USO DE LOS CASCARONES DE CONCRETO

Los cascarones se utilizan para variadas estructuras, techos, cimentaciones y estructura de contenido. Su uso en la estructura de cubierta está motivado principalmente por las luces y por las razones estéticas; para cimentaciones y estructuras de contenido la razón de peso es lo económico.

Los factores de costo para estructuras de cubierta varían considerablemente con la forma y las condiciones de apoyo, ya que, el alto costo de la formaletería restringe las luces económicas, pero si se reutilizan bajan considerablemente los costos. Es lógico pensar que con la longitud de la luz también se incrementa la posibilidad de pandeo, por tanto el uso de secciones transversales tipo cajón permite usar las luces mas largas posible.

1.5 CLASIFICACION DE LOS CASCARONES EN CONCRETO

Los cascarones en concreto se clasifican de acuerdo a su curvatura Gaussiana. Los cascarones de curvatura Gaussiana positiva, llamados *SINCLASTICOS* están formados por dos familias de curvas con la misma dirección; las cúpulas esféricas y los paraboloides elípticos caen dentro de esta clasificación (figura 9).

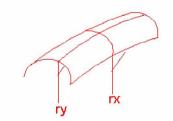


figura 9. Cascarones sinclasticos

Los cascarones de curvatura Gaussiana *NULA* o simple están formados por una familia de curvas, los cilindros, los conos y las bóvedas son de este tipo (figura 10.)

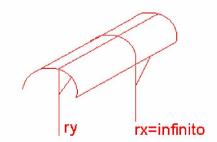


figura 10. Cascarones de curvatura nula

Los cascarones de curvatura Gaussiana negativa llamados *ANTICLASTICOS* están formados por dos familias de curvas, cada una en una dirección opuesta, ejemplo de ellos son los paraboloides hiperbólicos y las bóvedas de ojiva (figura 11.).



Matemáticamente, la curvatura Gaussiana de una superficie se define como el producto de sus curvaturas principales:

$$K = \frac{1}{r_x} * \frac{1}{r_y}$$
 (Ecuación 1)

En donde r_x y r_y son los radios principales de curvatura.

Una diferencia significativa entre los anteriores tipos de cascarones es la propagación de los efectos de borde hacia el cascarón:

- a) En cascarones de curvatura positiva, los efectos de borde tienden a amortizarse rápidamente y a confinarse en una zona estrecha cerca del borde pudiéndose por tanto usar la teoría de la membrana en toda la estructura excepto cerca al borde; ensayos en cúpulas esféricas han demostrado claramente este rápido amortiguamiento.
- b) En cascarones de curvatura nula; los efectos de borde también se amortiguan, pero tienden a extenderse mas hacia el interior del cascarón.
- c) En cascarones de curvatura negativa; el amortiguamiento es casi nulo y por tanto los efectos de borde son de gran importancia sobre regiones extensas del cascarón.

1.6 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE LOS CASCARONES

El comportamiento ideal de los cascarones, es tomando la carga a través de fuerzas en su propio plano como fuerzas de membrana, (vea esquemas en la sección 2.2) el objetivo es que estas fuerzas permanezcan aproximadamente constante en todo el cascarón, para que

este absorba fuerzas si las condiciones de apoyo son adecuadas, los cascarones de curvatura positiva reaccionan a una presión normal a la superficie con esfuerzos directos del mismo signo en cualquiera de las dos direcciones ortogonales, mientras que, las cáscaras con curvatura negativa tienen esfuerzos de signo opuesto y por consiguiente el signo de la curvatura es un indicativo del comportamiento.

Para lograr alta eficiencia estructural de un cascarón se deben relacionar formas, proporciones y apoyos para las condiciones especificas del proyecto, el espesor se debe mantener constante, pero si se debiere cambiar, usar un chaflán gradual, hay que evitar las cargas concentradas, la curvatura se debe cambiar de forma gradual y en los linderos comprobar que halla compatibilidad de las deformaciones de la cáscara con los elementos contiguos.

En la (figura 12.) se muestran algunos recursos que se pueden adoptar para satisfacer los lineamientos anteriores sobre linderos y apoyos.

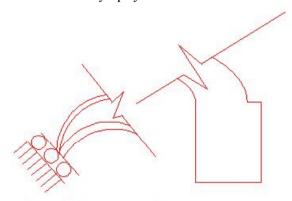
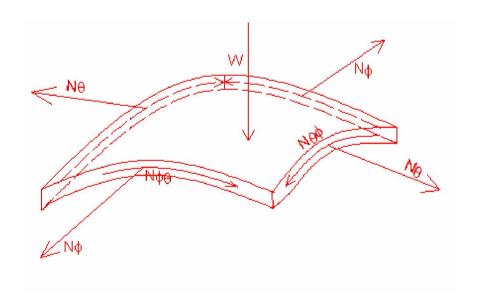


figura 12 le apoyos de cascarones.

En la (figura 12) la pendiente del soporte y la previsión para que halla movimiento normal a la superficie media asegura una reacción tangente a la superficie media.

La figura muestra un engrosamiento gradual del cascarón para reducir lo abrupto del cambio en la sección.



CAPITULO 2

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑO DE CASCARONES EN CONCRETO

2. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑO DE CASCARONES EN CONCRETO

Se conoce como cascarón a una placa con espesor pequeño en comparación con sus otras dimensiones, ahora que no debe ser tan delgado que las deformaciones sean muy grandes en comparación con el espesor. Una cáscara debe satisfacer las siguientes condiciones:

- a) Ser insignificante los esfuerzos cortantes normales a la superficie media.
- b) Los puntos en una línea normal a la superficie media antes que se deformen se encuentran en una línea recta después de la deformación.
- c) Estas líneas son normales a la superficie media deformada.

Generalmente el cálculo de los esfuerzos en un cascarón se efectúa en dos etapas principales y en ambas incluye la solución de ecuaciones diferenciales aunque de manera indirecta:

❖ Primer paso:

Se desprecia la flexión y la torsión (teoría de la membrana).

❖ Segundo paso:

Se hacen correcciones a la solución previa, con la superposición de los esfuerzos de flexión y corte que sean necesarios para satisfacer las condiciones de apoyo.

El diseño de cascarones incluye consideraciones sobre análisis, construcción y apariencia con el fin de crear formas que sean permanentes, económicas y de excelente aspecto. Un comportamiento seguro implica la necesidad de analizar como toma las cargas un cascarón; podemos identificar tres tipos de análisis:

Análisis tipo I:

Es un análisis simplificado que busca dar una visión general y es esencial para un diseño preliminar, este análisis hace énfasis solo en el equilibrio, pero el ingeniero debe considerar la capacidad de carga ultima, el pandeo, las vibraciones, los asentamientos de la cimentación y los cambios de volumen tales como flujo plástico, la contracción y la temperatura.

Análisis tipo II:

Es un análisis mas detallado, con el que se obtiene información necesaria para realizar las dimensiones de concreto y la disposición de acero de refuerzo, incluye consideraciones de equilibrio, compatibilidad y obtención de esfuerzos y deformaciones. Su meta es tomar una forma predeterminada y proporcionarla eficientemente de modo que se utilice tan poco material como sea posible, se toma como base la teoría de la membrana corregida mediante la teoría de la flexión; este libro utilizará en sus ejemplos este método.

Análisis tipo III:

Es un análisis riguroso, que se utiliza para predecir las limitaciones de los otros dos tipo de análisis y se basa en procedimientos numéricos de computador mediante el método de los elementos finitos; ejemplo de estos programas son el S.A.P 2000, Cosmos, Mulel, E.A.S.E.2. Cabe notar que el uso indiscriminado de programas de computador puede llevar a resultados erróneos, sobre todo si no se tiene en cuenta el comportamiento real del cascarón. El uso de este análisis no está entre los objetivos de este libro.

Finalmente, se expresa claramente que el diseño de los cascarones en concreto debe basarse siempre en el entendimiento claro del comportamiento de los mismos y analizar los tres aspectos de diseño más difíciles de expresar en términos generales: seguridad, construcción y apariencia.

2.1 TEORIA DE LA MEMBRANA PARA CASCARONES EN CONCRETO

Es muy común proyectar los cascarones de tal forma que los esfuerzos cortantes, momentos de flexión y torsión normales sean muy pequeños, excepto en algunas zonas pequeñas de la estructura; en la teoría de la membrana no se tienen en cuenta estos esfuerzos, a pesar que los esfuerzos se desprecian, los esfuerzos restantes están en equilibrio a no ser en los linderos, apoyos y discontinuidades. En cualquier punto interior el número de condiciones de equilibrio es igual al de incógnitas; por ello con la teoría de la membrana un cascarón es estáticamente determinado.

La hipótesis básica de la teoría de la membrana es que el cascarón resiste las cargas impuestas por medio de esfuerzos en su plano y que por consiguiente, todos los momentos flexionantes y fuerzas cortantes fuera del plano pueden considerarse nulas.

De esta hipótesis se derivan tres consecuencias fundamentales:

- a) El estado de esfuerzos resultantes de los esfuerzos de membrana en el cascarón está completamente determinado por el equilibrio.
- b) Las condiciones de los bordes, deben ser compatibles con los esfuerzos calculados en las ecuaciones de equilibrio.
- c) Las condiciones de los bordes, deben permitir cualquier desplazamiento de translación y rotación que halla sido calculado a partir de los esfuerzos obtenidos por la teoría de la membrana.

Para el cálculo, la teoría de la membrana requiere tres condiciones de equilibrio más expresiones para los desplazamientos, en términos de los esfuerzos de membranas resultantes. La teoría de la membrana no es válida para cargas concentradas normales a la superficie media o cuando las condiciones de apoyo son incompatibles con el equilibrio.

2.2 SUPOSICIONES BASICAS Y SIMPLIFICACIONES

La idea básica de cualquier análisis simplificado de cascarones es relacionar su comportamiento con formas más elementales como anillos, voladizos, vigas y arcos. Un cascarón de concreto puede pensarse como la combinación de tales formas, pero la validez de cualquier estructura equivalente debe justificarse en alguna medida por medio de pruebas físicas; por fortuna, para nuestra generación en el pasado se han realizado análisis mas rigurosos y observaciones a escala natural de cascarones que han tenido un buen comportamiento.

Recuerde que:

El análisis de cascarones se basa en la hipótesis de que la estructura está detinida por una superficie media ubicada a la mitad de la distancia entre los bordes exterior e interior del cascaron.

En las figuras 13, 14,15 y 16 se representa un elemento de cascarones a mayor escala; puede verse en ellas la carga superficial w junto con el sistema de fuerzas internas que mantienen el elemento en equilibrio, estos esfuerzos se denominan resultantes de tensiones por que son iguales a la integral de las tensiones unitarias normales o cortantes que actúan

en los bordes del elemento. La integración se hace en todo el espesor, de manera que, uno cualquiera de los esfuerzos resultante N_{ϕ} viene expresado en unidad de fuerza por unidad de longitud a lo largo del borde del elemento por ejemplo en kilos por centímetros.

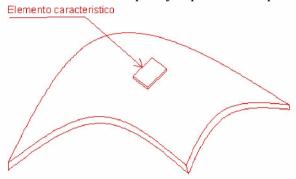


Figura 13. superficie de membrana.

En la (figura 14) pueden verse las resultantes de las tensiones de membrana, dichas resultantes actúan en un plano tangente a la membrana en el punto considerado, las resultantes de las tensiones normales de membrana N_{ϕ} y N_{θ} son normales a los bordes, mientras que las tensiones tangenciales de torsión de membrana $N_{\theta\phi}$ y $N_{\phi\theta}$ son paralelas a los mismos.

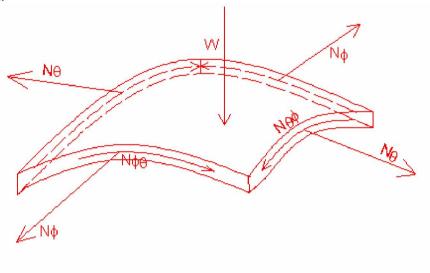


Figura 14. Cargas y resultantes de membrana.

Los esfuerzos cortantes normales Q_ϕ y Q_θ actúan perpendicularmente al plano tangente (figura 15).

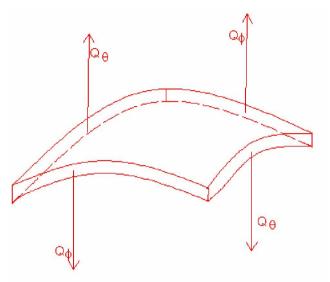


Figura 15. Esfuerzos cortantes.

Los momentos flectores M_ϕ y M_θ así como los momentos de torsión $M_{\phi\theta}$ y $M_{\theta\phi}$ se representa mediante vectores de doble vértice que actúan en el plano tangente (figura 16).

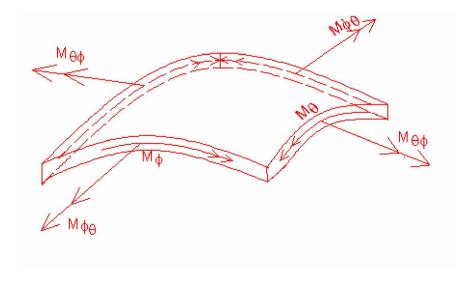


Figura 16.momentos flectores y momentos de torsión.

Puede comprobarse fácilmente que existen 11 variables independientes que son las tensiones resultantes, que deben ser tales que equilibren la carga aplicada w. Como en cualquier punto solo se puede establecer seis ecuaciones independientes de equilibrio (tres para el equilibrio de momentos y tres para el equilibrio de fuerzas), resulta evidente que la membrana es estáticamente indeterminada y que en general deben tenerse en cuenta las condiciones de compatibilidad así como las relaciones esfuerzo- deformación para obtener la solución del problema (vea sección 3.5).

2.2.1 TEORIA DEL ARCO

La utilización de arcos es el método estructural mas antiguo utilizados para puentes cuando las luces son demasiado grandes para poder utilizar vigas rectas, los arcos pueden ser considerados como elementos lineales junto con las vigas y las columnas, en el sentido de que sus dimensiones transversales son pequeñas comparadas con su longitud; sin embargo, en el caso de los arcos el eje del elemento esta curvado de manera que la línea de acción del empuje resultante de la aplicación de cargas coincide muy aproximadamente con el eje del elemento con lo que los momentos flectores y los esfuerzos cortantes transversales se reducen a un mínimo e incluso en algunas estructuras se eliminan completamente.

El comportamiento estructural y la ventaja de los arcos se ponen de manifiesto fácilmente estudiando un arco biarticulado.

La (figura 17) representa una viga simplemente apoyada cargada uniformemente en la que $M_{max} = wL^2/8$

 $V_{\text{max}} = wL/2$

El esfuerzo axial N=0.

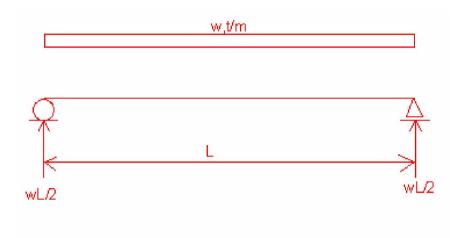


Figura 17. Viga simplemente apoyada.

Si la viga es de forma curva (figura 18)

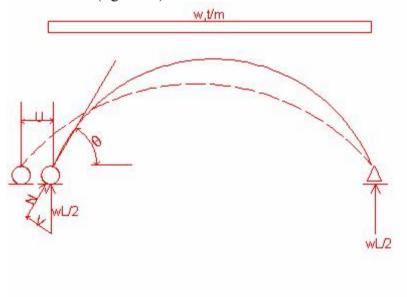


Figura 18. Viga curva

$$M_{max} = wL^2/8$$

 $Vmax = (wL/2) \cos\theta$

Además aparece un esfuerzo axial en el elemento cuyo valor en los apoyos es:

 $N=(wL/2) sen\theta$.

Al actuar la carga, esta viga curva tendera a enderezarse a causa de la flexión, resultando extendidas sus fibras inferiores y comprimidas sus fibras superiores. Este efecto da lugar a que aumente la luz del elemento según se ve en la (figura 18) para conservar la luz original la cual se mantiene invariable en un arco biarticulado cuyos apoyos son fijos (figura 19) habrá que aplicar una reacción horizontal H.

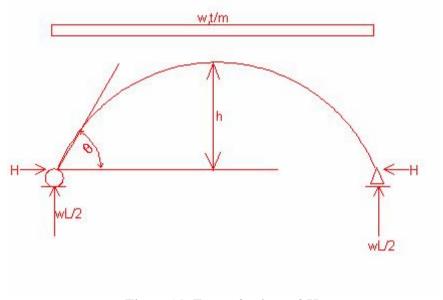


Figura 19. Fuerza horizontal H.

Se tendrá:

 $M_{\text{max}} = wL^2/8$ -Hh

 $V_{max} = wL/2cos\theta$ -Hsen θ

 $N=(wL/2) sen\theta + Hcos\theta$

Se comprueba que en comparación con la viga simplemente apoyada el momento flector y el esfuerzo cortante máximo correspondiente al arco han disminuido apreciablemente. Por otra parte en el arco aparece un esfuerzo axial de compresión N que no existía en la viga, precisamente este estado de solicitaciones es el que hay que preferir para el hormigón armado, por ser hormigón relativamente endeble cuando se halla solicitado por tracción o por esfuerzo cortante, siendo en cambio resistente a la compresión.

2.2.2 TEORÍA DE LA VIGA DE LUNDGREN

Este método esta basado en la hipótesis de que todos los puntos situados en una misma sección transversal flechan lo mismo en el sentido vertical, pero no se desplazan horizontalmente, es decir, la sección transversal del cascarón mantiene su forma al aplicársele la carga.

Para bóvedas largas (vea sección 3.3) las tensiones mas importantes pueden estimarse muy aproximadamente por medio de esta teoría, en la que el cascarón es tratado como una viga transversal curva de luz libre, igual a la longitud entre apoyos extremos, la estructura laminar se considera como una viga en la dirección L. Se determina el eje neutro de la sección curva de la figura y se halla el momento de inercia de la sección de la manera habitual Si w es la carga total que actúa sobre la unidad de longitud en la dirección de la luz, pueden determinarse el momento flector longitudinal M y el esfuerzo cortante V para la viga simple o continua por medios normales, entonces la tensión de flexión longitudinal es:

$$fx = \frac{N_x}{h} = \frac{M_x y}{I}$$

Si se desea hallar la tensión cortante, puede hacerse utilizando las ecuaciones normales de la mecánica.

$$V = \frac{N_{x\phi}}{h} = \frac{vQ}{Ib}$$

2.2.3 TEORÍA DE LA FLEXIÓN

La resistencia de los elementos sujetos a flexión puede determinarse a partir de una serie de hipótesis simplificadoras ligadas al comportamiento básico y al mecanismo de acción y reacción. Las hipótesis que se hacen comúnmente son las siguientes

- a) La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal de un elemento es plana. Esta hipótesis ha sido verificada mediante mediciones y es correcta.
- b) Se conoce la distribución de esfuerzo en la zona de compresión del elemento.

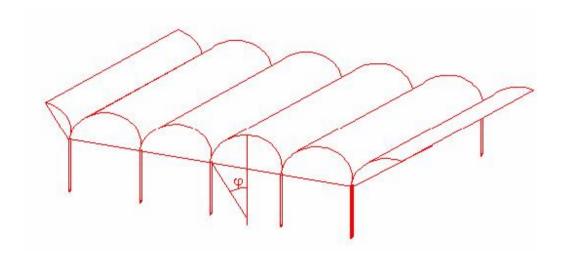
- c) No existen corrimientos relativos de consideración entre el acero y el concreto que lo rodea, es decir, se puede suponer que la deformación unitaria es la misma en el acero y en el concreto que se encuentra en el mismo nivel.
- d) El concreto no resiste esfuerzo de tensión longitudinal. El despreciar la magnitud de estos esfuerzos no influye apreciablemente en las resistencias calculadas.
- e) El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria útil en el concreto.

Al empezar a cargar el comportamiento del elemento es esencialmente elástico y toda la sección contribuye a resistir el momento exterior, cuando la tensión de la fibra mas reforzada de alguna sección excede la resistencia de concreto a la tensión empieza a aparecer grietas.

2.3 MÉTODO COMBINATORIO ENTRE LA TEORÍA DE LA MEMBRANA Y LA TEORÍA DE FLEXIÓN

El siguiente método de análisis, usa tanto la teoría de la membrana como la teoría de la flexión:

- a) Como un sistema primario, se considera que la carga es resistida completamente por los esfuerzos resultantes de la teoría de la membrana.
- b) Este sistema produce errores en las fuerzas y en los desplazamientos en los límites del cascarón que no son compatibles con las condiciones conocidas de frontera.
- c) Se deben aplicar correcciones a estas fuerzas y desplazamientos (efectos de borde) en las fronteras del cascarón para remover las incompatibilidades resultantes del sistema primario.
- d) Los valores de los efectos de borde necesario para remover los errores causados por los esfuerzos resultantes de membrana se encuentran resolviendo las compatibilidades o ecuaciones de equilibrio para las fronteras del cascarón.
- e) La solución final se encuentra superponiendo los efectos de corrección a la solución de membrana.



CAPITULO 3 BOVEDAS EN CONCRETO

3. BOVEDAS EN CONCRETO

Cuando no es necesaria una cubierta plana para satisfacer las exigencias funcionales de la estructura, generalmente una bóveda delgada resulta más económica en consumo de material. Estos sistemas no lineales ni planos deben su economía a la posibilidad de absorber las cargas aplicadas fundamentalmente por tensión directa, con intervención mínima de flexión y esfuerzo cortante. La economía que se deriva de su utilización con grandes luces resulta de transformar las cargas aplicadas en empujes de membrana, con ello los momentos flectores, de torsión y los esfuerzos cortantes transversales a la superficie se reducen o eliminan.

Los segmentos de cilindros llamados *bóvedas o cascarones de barril*, transfieren las cargas por medio de una combinación de acción longitudinal de viga y una acción transversal de arco; la acción principal del cascarón de barril con pequeñas vigas de borde es la flexión longitudinal, pero los esfuerzos de flexión se encuentran dentro del plano del cascarón. Las bóvedas se hallan sometidas a esfuerzos de compresión, de flexión y ordinariamente a esfuerzos cortantes de pequeña magnitud.

Se considera que el sistema completo del cascarón y viga de borde, se asemeja a una viga con los esfuerzos de compresión cerca de la corona y con los esfuerzos de tensión concentrados en las vigas de borde situadas a cada lado del cascarón.

La teoría simple de la flexión, que conduce a una distribución lineal de los esfuerzos, requiere que todos los puntos dentro de una sección transversal de un elemento se deflexióna exactamente en la misma medida, tal como ocurre en una viga sólida rectangular. Para una viga T con patines anchos los extremos del patín no se deflexionan igual que el alma, pero la teoría simple de la flexión aun proporciona una base razonable para el diseño.

No se puede ignorar que para el caso de una bóveda, la sección transversal de un cascarón de bóveda puede sufrir torsiones laterales, que originan que los esfuerzos longitudinales se aparten de la distribución lineal impuesta en la teoría de las vigas.

Las (figura 20 y 21), muestran algunos ejemplos diferentes de resultantes de esfuerzos longitudinales N_x en donde se varía la relación L/r, es decir, la relación de la longitud L de

la bóveda al radio de la misma r, para bóveda sencilla (figura 20) y para bóveda múltiple (figura 21).

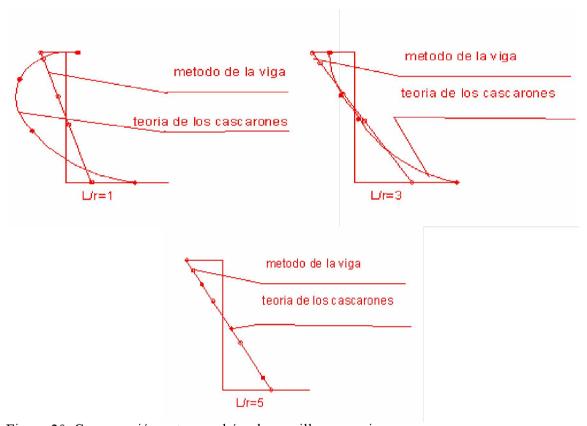


Figura 20. Comparación entre una bóveda sencilla y una viga.

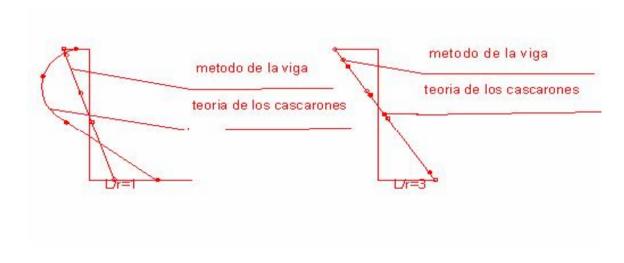




Figura 21. Comparación entre una bóveda múltiple y una viga.

En las graficas se observa las curvas de esfuerzos-deformación realizadas mediante ensayos de laboratorio para el método de la viga y para la teoría del cascarón, como se ve para bóvedas sencillas cuando L/r=1, las dos curvas distan considerablemente por tanto la teoría de la viga no se debe aplicar, en cambio cuando L/r=5, las dos curvas se superponen lo cual indica que el cascarón se comporta como una viga en sentido longitudinal y en consecuencia se puede resolver el cascarón utilizando el método de la viga.

Para el caso de bóvedas múltiples para la relación de L/r = 3 ya las curvas se superponen y por tanto se puede aplicar la teoría de la viga para resolver la estructura.

Recuerde que:

Los análisis aproximados o sin pliticados de cascarones de barril usan métodos basados en la teoría de la membrana y/o en las suposiciones globales similares al con portamiento de vigas, arcos y voladizos.

Se puede considerar cierto que: mientras más grande sea la luz en comparación con el ancho de la cuerda transversal, más se comporta la sección transversal como una viga. Tales cubiertas se llaman *bóvedas largas*; mientras menor sea el claro comparado con el ancho de la cuerda mas se comporta la estructura como un arco con una viga inclinada de apoyo en el borde, estas son las *bóvedas cortas*.

3.1 USOS DE LAS BOVEDAS EN CONCRETO

Las bóvedas cortas se usan para angares y auditorios con luces transversales hasta de 30m y con luces longitudinales hasta 16m entre diafragmas o costillas de rigidizacion. Las bóvedas largas se usan más comúnmente para bodegas y las fábricas donde se requieren luces longitudinales de 16m a 50m aproximadamente y luces transversales de 6m a 15m.

3.2 ESFUERZOS EN LAS BOVEDAS DE CONCRETO

La (tabla 1) y la (figura 22) muestran las resultantes de los esfuerzos de membrana para bóvedas cilíndricas, las condiciones de frontera son $N_x = 0$ y X=L. Obsérvese cuidadosamente en la (figura 22) como se miden los ángulos ϕ y ϕ_X desde el borde de le bóveda.

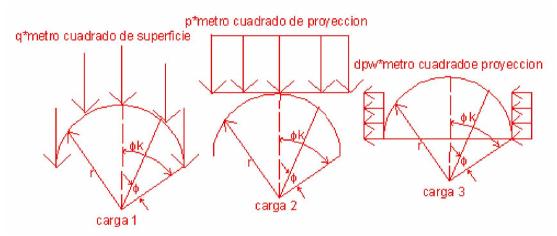


Tabla 1

Fuerzas de membrana en cascarones cilíndricos

Carga	N_ϕ'	N_X'	$N_{\phi X}'$
Carga 1	$-qr\cos(\phi_k-\phi)$	$-q\frac{x}{r}(L-x)\cos(\phi_k-\phi)$	-q(L-2x)
		Γ	$sen(\phi_k - \phi)$
Carga 2	$-pr\cos^2(\phi_k-\phi)$	$35 p \frac{X}{r} (L-x) (1-2sen^3(\phi_k-\phi))$	-35p(L-2x)
			$sen(\phi_k - \phi)\cos(\phi_k - \phi)$
Carga 3	$-p_{w} rsen(\phi_{k} - \phi)$	$-p_{\scriptscriptstyle W}\frac{x}{2r}(L-x)sen(\phi_{\scriptscriptstyle k}-\phi)$	$p_{w}\left(\frac{L}{2}-x\right)\cos(\phi_{k}-\phi)$

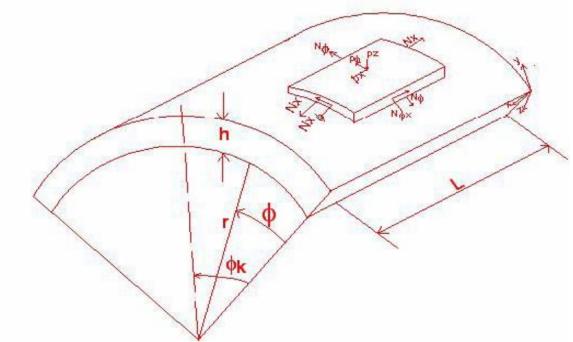


Figura 22. Esfuerzos de membrana

Las ecuaciones de la (tabla 1) se calcularon en base a la teoría de la membrana y considerando el cascarón como una viga en sentido longitudinal y como un arco en sentido transversal, como la estructura es estáticamente determinada no existe momentos flectores ni momentos de torsión, se observa que las fuerzas de membrana no dependen de las condiciones de apoyo, estas formulas se utilizan para un prediseño y se nota que el esfuerzo anular depende principalmente del ángulo y del radio de curvatura en tanto que el esfuerzo longitudinal depende de la longitud, del ángulo, del radio de curvatura y del punto objeto de análisis, la (tabla 1) es aplicable únicamente a bóvedas largas.

Las fuerzas más importantes en el diseño de una bóveda de concreto son:

- a) El esfuerzo longitudinal, N_x' que es equivalente al esfuerzo en la fibra extrema de una viga.
- b) El cortante de membrana, $N_{\phi^{\chi}}$ que es equivalente a la fuerza de corte en una viga.
- c) La fuerza anular, N_{ϕ} que es la solicitación más importante para bóvedas cortas.

De acuerdo a la relación L/r los cascarones se clasifican en largos y cortos:

Cascarones largos: cuando $\left(\frac{L}{r} \ge 5\right)$

Cascarones cortos: cuando $\left(\frac{L}{r} < 2\right)$

3.3 BOVEDAS LARGAS EN CONCRETO

El análisis de bóvedas largas es similar al de un pórtico hiperestatico, mediante la teoría de la elasticidad, en el cual se empieza eliminando los empotramientos necesarios y luego se van reintroduciendo los empotramientos y se ajustan para satisfacer las condiciones de borde del pórtico original. En el caso del cascarón se supone en primer lugar que las cargas de la superficie se transmiten a los apoyos solamente por tensión directa (tensión y compresión). Equivale a suponer que la estructura es estáticamente determinada, esta hipótesis conduce generalmente a desplazamientos y reacciones a lo largo de los bordes longitudinales que no son compatibles con las condiciones de borde reales, para corregir esta situación deben aplicarse cargas lineales a lo largo de los bordes longitudinales; las tensiones resultantes de estas cargas lineales se sobreponen a las obtenidas por la teoría de la membrana para obtener el calculo final de la bóveda.

Cuando una bóveda tiene una relación L/r>5 puede considerarse larga, en este caso los esfuerzos en el plano del cascarón son (usando el análisis simplificado):

$$fx = \frac{N_x}{h} = \frac{M_x y}{I}$$

$$V = \frac{N_{x\phi}}{h} = \frac{vQ}{Ib}$$

En donde:

Mx= momento flexionante con respecto al eje centroidal $=ql^2/8$

I= momento de inercia de la sección transversal del cascarón.

V= fuerza cortante total en la sección transversal del cascarón.

b= espesor total de la sección transversal de concreto medido horizontalmente.

Recuerde que:

El método de la viga - arco puede usarse en cascarones simétricos bajo carga uniforme en los siguientes casos:

- a) Cascarones sencillos sin vigas de borde con 1/r > 5.
- b) Cascarones sencillos con vigas de borde ordinarias si 1/t > 3.
- c) Cascarones típicos interiores de un sistema de cascarones múltiples con bordes tipo matiposa si 1/r > 2.

Para el caso del análisis de las bóvedas largas quedan implícitas las hipótesis relativas al análisis de viga - arco, como son:

- a) Todos los puntos de una sección transversal sufren la misma deflexión vertical y ninguna horizontal (arco infinitamente rígido axialmente).
- b) Pueden despreciarse los cortantes radiales, los momentos flexionantes longitudinales $M_{x,b}$ los momentos torcionantes $M_{x,b}$ y las deformaciones por cortante en el plano.

La comparación es buena para $\frac{r}{L}$ =0.2, para bóvedas de longitud corta , los esfuerzos máximos de tensión son considerablemente mayores que los calculados con las ecuaciones.

El análisis con la ecuación $f_x = \frac{M_x y}{I}$ es rápido y sencillo, sin embargo el análisis de arco suele ser un tanto mas complejo, por eso se presenta la (tabla 2) que se basa en las ecuaciones de viga - arco, en la cual se muestran los valores numéricos que se usan para cascarones interiores de sistemas múltiples de bóvedas y para bóvedas sencillas, sin vigas de borde o con vigas de borde relativamente flexibles.

La (tabla 2) se tiene en cuenta únicamente la teoría de la membrana por tanto ocurrirán errores en los esfuerzos calculados cerca de los bordes por tanto se deben corregir para desplazamientos tanto transversales como longitudinales producto de la supuesta articulación que se supone en la teoría de la membrana. La (tabla 2) es muy practica ya que permite obtener los diferentes esfuerzos en función de la carga, del radio de curvatura, del ángulo y de la longitud del cascarrón, además permite calcular el esfuerzo en diversos puntos del cascarón e inclusive esta dividida tanto para carga viva como para carga muerta en una gama de ángulos que varia desde 22.5º hasta 60º.

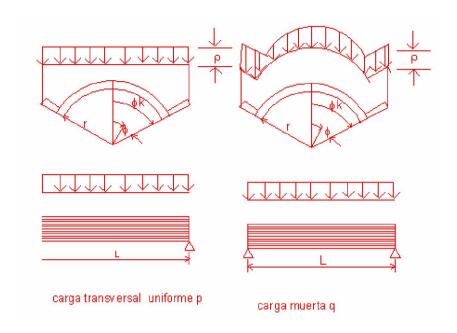


Tabla 2		cascar	ones cilí	indricos	interiore	s cargado	s siméti	icament	e
		car	ga transve	rsal uniform	ер		carga de pe	eso muerto q	
φ grados	φt/φk	Nφ/(pL²/r)	Nø/Pr	"- Nxø/PL"	Mø/Pr²	Nx/(qL²/r)	Nø/qr	"-Nxø/qL"	Mø/qr²
22,5	1	-6,01	-1,411	0	-0,00292	-6,167	-1,433	0	-0,00309
	0,75	-4,875	-1,189	2,211	-0,00112	-5,003	-1,205	2,269	-0,00118
	0,5	-1,482	-0,614	3,533	0,00232	-1,521	-0,615	3,626	0,00245
	0,25	4,137	0,049	3,064	0,00235	4,245	0,065	3,165	0,00249
	0	11,927	0,361	0	-0,00662	12,239	0,384	0	-0,00702
25	1	-4,855	-1,402	0	-0,00353	-5,012	-1,43	0	-0,00378
	0,75	-3,937	-1,183	1,985	-0,00135	-4,064	-1,202	2,049	-0,00145
	0,5	-1,193	-0,612	3,17	0,0028	-1,232	-0,613	3,273	0,00300
	0,25	3,342	0,044	2,765	0,00282	3,451	0,064	2,855	0,00304
	0	9,617	0,347	0	-0,00797	9,929	0,374	0	-0,00657
27,5	1	-4	-1,393	0	-0,00417	-4,158	-1,426	0	-0,00453
	0,75	-3,42	-1,175	1,799	-0,00159	-3,370	-1,199	1,869	-0,00173
	0,5	-0,98	-0,609	2,871	0,00331	-1,018	-0,61	2,985	0,00360
	0,25	2,755	0,038	2,503	0,00332	2,863	0,063	2,602	0,00363
	0	7,098	0,331	0	-0,00938	8,220	0,363	0	-0,01025
30	1	-3,35	-1,383	0	-0,00482	-3,508	-1,422	0	-0,00533
	0,75	-2,714	-1,166	1,643	-0,00183	-2,842	-1,195	1,72	-0,00203

i			1	1	1 1		1	1	1 1
	0,5	-0,817	-0,606	2,622	0,00384	-0,856	-0,607	2,746	0,00424
	0,25	2,308	0,032	2,284	0,00383	2,417	0,061	3,392	0,00426
	0	6,608	0,314	0	-0,01082	6,920	0,352	0	-0,01204
32,5	1	-2,844	-1,372	0	-0,00548	-3,002	-1,418	0	-0,00618
	0,75	-2,303	-1,158	1,511	-0,00207	-2,431	-1,191	1,595	-0,00235
	0,5	-0,691	-0,603	2,41	0,00438	-0,729	-0,603	2,544	0,00492
	0,25	1,96	0,026	2,098	0,00434	2,069	0,06	2,215	0,00492
	0	5,596	0,297	0	-0,01227	5,908	0,339	0	-0,01393
35	1	-2,442	-1,361	0	-0,00615	-2,601	-1,414	0	-0,00707
	0,75	-1,977	-1,148	1,397	-0,00232	-2,105	-1,186	1,484	-0,00268
	0,5	-0,591	-0,599	2,227	0,00491	-0,629	-0,6	2,372	0,00565
	0,25	1,684	0,019	1,938	0,00484	1,793	0,058	2,064	0,00561
	0	4,794	0,278	0	-0,0137	5,105	0,326	0	-0,01591
37,5	1	-2,118	-1,349	0	-0,00679	-2,278	-1,409	0	-0,00800
	0,75	-1,174	-1,138	1,298	-0,00255	-1,842	-1,181	1,396	-0,00302
	0,5	-0,51	-0,596	2,069	0,00544	-0,548	-0,596	2,224	0,00340
	0,25	1,461	0,012	1,798	0,00532	1,571	0,057	1,933	0,00632
	0	4,146	0,26	0	-0,01509	4,458	0,312	0	-0,01796

		caso	carones c	ilíndric	os interiore:	scargado	s simétri	camente	•	
		car	ga transve	rsal unifo	orme p	carga de peso muerto q				
40	1	-1,853	-1,335	0	-0,00742	-2,013	-1,404	0	-0,00897	
	0,75	-1,498	-1,127	1,211	-0,00277	-1,627	-1,176	1,315	-0,00337	
	0,5	-0,443	-0,592	1,929	0,00595	-0,482	-0,592	2,095	0,00719	
	0,25	1,279	0,005	1,675	0,00578	1,389	0,055	1,819	0,00705	
	0	3,616	0,241	0	-0,01641	3,928	0,297	0	-0,02006	
45	1	-1,449	-1,307	0	-0,00853	-1,610	-1,393	0	-0,01096	
	0,75	-1,17	-1,104	1,065	-0,00316	- 1,299	-1,165	1,183	-0,00408	
	0,5	-0,343	-0,585	1,694	0,00684	-0,381	-0,583	1,882	0,00883	
	0,25	1,001	-0,011	1,468	0,00657	1,112	0,052	1,63	0,00854	
	0	2,809	0,202	0	0,01872	3,120	0,266	0	-0,02437	
50	1	-1,16	-1,276	0	-0,00939	-1,322	-1,38	0	-0,01301	
	0,75	-0,935	-1,079	0,947	-0,00344	-1,065	-1,152	1,079	-0,00480	
	0,5	-0,271	-0,578	1,504	0,00762	-0,308	-0,574	1,713	0,01054	
	0,25	0,81	-0,029	1,3	0,00714	0,914	0,049	1,481	0,01002	
	0	2,232	0,164	0	-0,02052	2,543	0,234	0	-0,02871	

55	1	-0,946	-1,242	0	-0,00989	-1,109	-1,367	0	-0,01506
	0,75	-0,761	-1,053	0,849	-0,00358	-0,892	-1,139	0,995	-0,00549
	0,5	-0,217	-0,572	1,347	0,00807	-0,255	-0,563	1,578	0,01227
	0,25	0,655	-0,048	1,161	0,00742	0,767	0,045	1,36	0,01144
	0	1,805	0,128	0	-0,0213	2,115	0,201	0	-0,03293
60	1	-0,783	-1,205	0	-0,00992	-0,947	-1,352	0	-0,01705
	0,75	-0,629	-1,025	0,776	-0,00355	-0,761	-1,124	0,927	-0,00613
	0,5	-0,177	-0,566	1,213	0,00815	-0,214	-0,552	1,467	0,01398
	0,25	0,543	-0,068	1,043	0,00734	0,656	0,042	1,261	0,01275
	0	1,481	0,095	0	-0,02118	1,790	0,167	0	-0,03688

La tabla 2. Es tomada de Parme y H. W Conner

Para un cascaron simplemente apoyado en sentido longitudinal, los valores de N_x , N_ϕ yM_ϕ serán máximos en X=L/2, mientras que el valor de $N_{\phi X}$ será máximo en los extremos en donde X=0 y X=L y usualmente en $\frac{1}{2}\phi_{KI}$

Los valores de la (tabla 2), pueden corregirse para tener en cuenta la deflexión horizontal de borde, usando las (tabla 3 y tabla 4). Esta corrección es producto del método combinatorio entre la teoría de la membrana y la teoría de la flexión para tener en cuenta el estado real de los bordes.

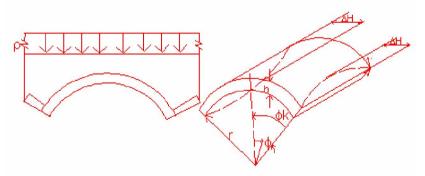


	TABLA 3	TABLA 3 DESPLAZAMIENTO DELTA HORIZONTALES DE BORDE									
φk grados		r/L									
	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2				
	Eh	<u>Eh</u>	<u>Eh</u>	Eh	Eh	Eh	<u>Eh</u>				
	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225	0,25				
22,5	91,83	38,37	18,88	10,37	6,16	3,87	2,52				
25	123,8	51,79	25,54	14,09	8,42	5,33	3,52				
27,5	161,58	67,67	33,43	18,49	11,09	7,07	4,71				
30	205,26	86,02	42,55	23,59	14,2	9,08	6,09				

32,5	254,82	106,85	52,91	29,38	17,72	11,38	7,66
35	310,1	130,69	64,47	35,84	21,66	13,94	9,42
37,5	370,84	155,63	77,17	42,94	23,99	16,77	11,37
40	436,65	183,31	90,94	50,65	30,7	19,83	13,47
45	581,48	244,21	121,26	67,61	41,05	26,59	18,13
50	739,5	310,68	154,34	86,14	52,37	33,98	23,22
55	904,36	380,03	188,87	105,47	64,18	41,7	28,54
60	1068,79	449,2	223,31	124,77	75,97	49,41	33,85

La tabla 3. Es tomada de Parme y H. W Conner

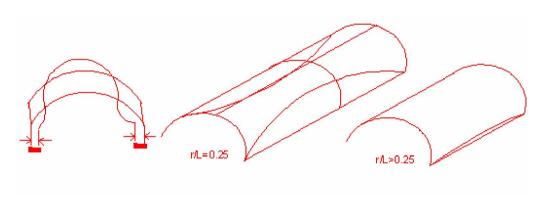


TABLA 4	EFE	CTOS I	DEL DES	PLAZAMIE	NTO H	DRIZONT	AL UNITARIO
	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2	qr^2
	Eh	Eh	Eh	<u>Eh</u>	Eh	Eh	<u>Eh</u>
φκ grados	φt/φk	Nφ	Мф	φk grados	φt/φk	Nφ	Мф
22,5	1	2463	62,82	37,5	1	199,2	13,92
	0,75	2451,1	50,96		0,75	196,5	11,26
	0,5	2415,6	15,49		0,5	188,6	3,35
	0,25	2356,9	-43,34		0,25	175,7	-9,6
	_		- -				
	0	2275,5	124,66		0	158	-27,24
25	1	1461,9	45,95	40	1	145,5	11,53
	0,75	1453,2	37,26		0,75	143,3	9,32
	0,5	1427,2	11,3		0,5	136,7	2,76
	0,25	1384,3	-31,63		0,25	126	-7,96
	0	1324,9	-91,02		0	111,4	-22,5
27,5	1	912,9	34,65	45	1	82,2	8,2

	0,75	906,4	28,09		0,75	80,7	6,62
	0,5	886,8	8,49		0,5	76	1,94
	0,25	854,4	-23,86		0,25	68,4	-5,66
	0	869,8	-68,5		0	58,2	-15,89
30	1	594,6	26,8	50	1	49,6	6,06
	0,75	589,5	21,71		0,75	48,4	4,88
	0,5	574,3	6,54		0,5	44,9	1,41
	0,25	549,3	-18,46		0,25	39,3	-4,19
	0	514,9	-52,56		0	31,9	-11,65
32,5	1	401,2	21,17	55	1	31,5	4,62
	0,75	397,2	17,14		0,75	30,6	3,72
	0,5	385,2	5,14		0,5	27,9	1,66
	0,25	365,4	-14,59		0,25	23,7	-3,2
	0	338,4	-41,66		0	18,1	-8,81
35	1	279	17,03	60	1	20,9	3,62
	0,75	275,8	13,79		0,75	20,2	2,91
	0,5	266,1	4,12		0,5	18,1	0,82
	0,25	250,3	-11,74		0,25	14,8	-2,51
1	0	228,6	-33,43	1	0	10,5	-6,84

La tabla 4. Es tomada de Parme y H. W Conner

Las correcciones se hacen añadiendo a los valores de la (tabla 2), el producto del desplazamiento horizontal (tabla 3) por el correspondiente coeficiente (tabla 4).para la corrección basta multiplicar los valores de la (tabla 3 y tabla 4) por la expresión

correspondiente al desplazamiento $\frac{qr^2}{Eh}$.

El Pórtland Cement Asociación da las dimensiones típicas de bóvedas en concreto en la (tabla 5)

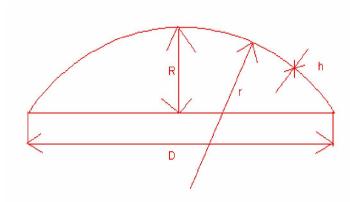


TABLA 5 DIMENCIONES TIPICAS DE CASCARONES DE BARRIL

Luz Li (mm)	D (mm)	R (mm)	r (mm)	h (mm)	Refuerzo (Kg/m)
24385	9144	2438	7620	76	5,22
30480	9144	3048	9144	76	5,96
36576	10668	3658	9144	76	6,71
42676	12192	4267	10668	76	7,45
48768	13716	4877	10668	89	9,69

La tabla 5 es tomada de la Pórtland Cement Association

La tabla 5 se muestra con claridad las ventajas de construir cascarones en concreto debido al ahorro de material ya que se puede alcanzar luces de hasta 48.8m con espesores de apenas 8.9cm y pequeña cantidad de refuerzo.

3.4 BÓVEDAS CORTAS

Aquellas bóvedas en las cuales L/r < 2 se consideran *cortas* y toman las cargas por acción de arco y por lo general se construyen siguiendo las líneas de presiones, debido al valor grande de L/r con respecto a L, el espesor del cascaron queda determinado por el pandeo y no por la resistencia. La mayor parte de la carga de la cubierta es llevada a los elemento transversales de soporte por acción de viga solo cerca de los bordes longitudinales, entonces el arco queda sujeto a empujes externos y por lo tanto tendrá una pequeña

compresión y tensión cerca de la corona, el cascarón adyacente esta sometido a compresión lo cual puede originar incompatibilidad de deformaciones.

Para las bóvedas cortas la teoría de la viga no es aceptable, porque el borde libre tiende a deformarse hacia abajo y hacia adentro con respecto a la clave. Este movimiento relativo tiende a aumentar las tensiones de tracción longitudinal en el borde libre, de manera, que las tensiones presentes son mayores a las predichas por la teoría de la viga. (La figura 23) muestra la distribución de tensiones de flexión y cortantes para los cascarones que poseen relaciones L/r de 5 y 2. Mientras que para L/r =5 se obtiene una distribución casi lineal, queda claro que para una membrana corta con L/r= 2, la teoría de la viga conduce a predicciones de tensiones que están gravemente equivocadas, los estudios comparativos conducen a la conclusión de que no debe aplicarse la teoría de la viga a cascarones sencillos de relación L/r inferior a 5, ni en cascarones múltiples con L/r inferior a 2. Se recomienda solucionar las bóvedas cortas mediante un análisis riguroso de elementos finitos, el cual escapa a las intenciones de este libro.

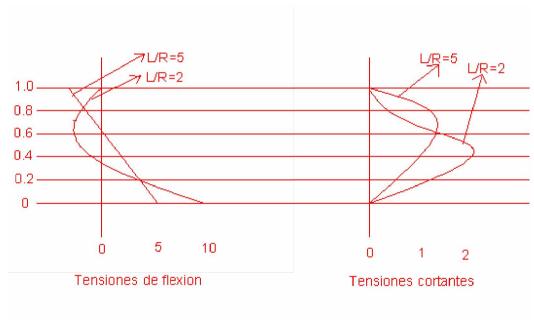


Figura 23. Distribución de tensiones de flexión y cortante.

3.5 BOVEDAS Y SU ANÁLISIS RIGUROSO

Para este caso, se usa la teoría de los cascarones basándose en la teoría de la elasticidad y en las simplificaciones, tal como se usa en el análisis de placas planas. El conjunto completo de las fuerzas internas que actúan en un elemento del cascarón se muestran en la (figura 24)

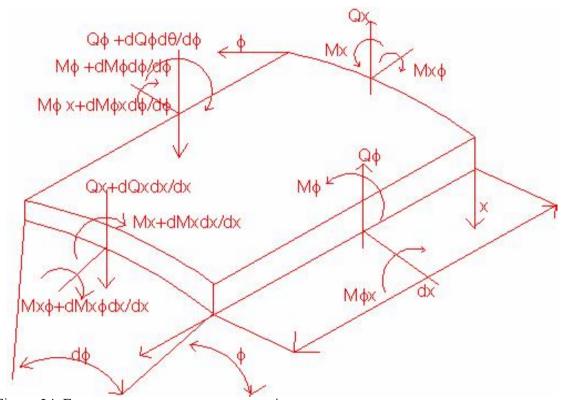


Figura 24. Fuerzas y momentos en un cascarón.

De la figura se pueden plantear las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial N_X}{\partial_X} r + \frac{\partial N_{\phi X}}{\partial_{\phi}} + p_X r = 0$$
 (Ecuación 6)*

$$\frac{\partial Q_X}{\partial_X} + \frac{\partial Q_{\phi}}{\partial_{\phi}} + N_{\phi} + P_Z r = 0$$
 (Ecuación 7)*

$$\frac{M_Z}{\partial_X} + \frac{\partial M_{X\phi}}{\partial_{\phi}} - Q_X r = 0$$
 (Ecuación 8)*

$$\frac{\partial N_{\phi}}{\partial_{\phi}} + \frac{\partial N_{X\phi}}{\partial_{X}} - Q_{\phi} + p_{\phi}r = 0$$
 (Ecuación 9)*

$$-\frac{\partial M_{\phi}}{\partial_{\phi}} + \frac{\partial M_{X\phi}}{\partial_{X}} r + Q_{\phi} r = 0$$
 (Ecuación 10)*

La resultantes de los esfuerzos son expresados en términos de los desplazamientos considerando la compatibilidad de deformaciones y las propiedades de lo materiales.

$$N_X = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_X + \mu \varepsilon_y \right) = \kappa \left[\frac{\partial_u}{\partial_x} + \mu \left(\frac{\partial_v}{r \partial_\phi} - \frac{W}{r} \right) \right]$$
 (Ecuación 11)*

$$N_{\phi} = \frac{Eh}{1 - \mu^{2}} \left(\varepsilon_{\phi} + \mu \varepsilon_{x} \right) = \kappa \left[\frac{\partial_{v}}{r \partial_{\phi}} - \frac{w}{r} + \mu \frac{\partial_{u}}{\partial_{x}} \right]$$
 (Ecuación 12)*

$$N_{\phi X} = N_{X\phi} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{X\phi} = \kappa (1-\mu) \left(\frac{\partial_u}{r \partial_{\phi}} + \frac{\partial_v}{\partial_X} \right)$$
 (Ecuación 13)*

Los momentos son definidos por los cambios en curvatura y torcedura.

$$M_{x} = -D(\chi_{x} + \mu \chi_{x})$$
 (Ecuación 14)

$$M_{\phi} = -D(\chi_{\phi} + \mu \chi_{x})$$
 (Ecuación 15)

$$M_{Xb} = -M_{bX} = D(1-\mu)\chi_{Xb}$$
 (Ecuación 16)

Sustituyendo los valores apropiados obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$M_X = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial_v}{\partial_\phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right]$$
 (Ecuación 17)*

$$M_{\phi} = -D \left[\frac{\partial_{v}}{r^{2} \partial_{\phi}} + \frac{\partial^{2} w}{r^{2} \partial_{\phi}^{2}} + \mu \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} \right]$$
 (Ecuación 18)*

$$M_{X\phi} = M_{\phi X} = D(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 w}{r \partial_x \partial_\phi} + \frac{1}{2r} * \frac{\partial_v}{\partial_x} \right]$$
 (Ecuación 19)*

El resultado es un conjunto de 11 ecuaciones (resaltadas con asterisco *), que tienen 8 fuerzas internas y tres desplazamientos. Estas ecuaciones pueden resolverse usando la teoría de los cascarones huecos o por medio de otra solución rigurosa. Resolver bóvedas con un análisis riguroso escapa a la intención de este libro, se dejan las ecuaciones para quien desee profundizar con ellas, sin embargo, para ilustración del lector se presentan a continuación los resultados obtenidos usando un análisis riguroso de bóvedas.

El cascarón de la (figura 25), esta cargado con una carga distribuida de 390Kgf/m² en la superficie del cascaron.

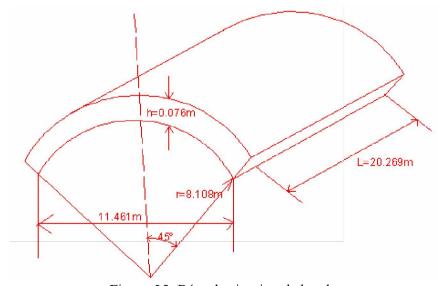


Figura 25. Bóveda sin viga de borde.

Los esfuerzos resultantes se calcularon con el S.A.P 2000 y se muestran en la (tabla 6).

ESFUERZOS RESULTANTES EN EL CASCARÓN SIN VIGA DE TABLA 6 BORDE

Grados desde el borde	Mø (Kgf*m/m)	Nø(Kgf/m)	N x (Kgf/m)	Nøx(Kgf/m)
	X = L/2	X = L/2	X = L/2	X = 0, L
45	-1188	-5312	-506	0
40	-1165	-5219	-3333	-164
30	-952	-5163	-21308	-2678
20	-530	-4092	-33798	-9166
10	-68	-1681	3035	-13927
0	0	0	147356	0

Obsérvese en la tabla, que la tensión es alta en los bordes y el momento transversal es grande en la corona; por lo tanto, se recomienda usar viga de borde. La (tabla 7) muestra los resultados con vigas de bordes.

ESFUERZOS RESULTANTES EN EL CASCARÓN CON TABLA 7 VIGA DE BORDE

φ Grados desde el borde	M φ(Kgf*m/m)	N \(\psi(Kgf/m) \)	Nx(Kgf/m)	Nøx(Kgf/m)
	X = L/2	X = L/2	X = L/2	X = 0,L
45	-272	-4419	-3541	0
40	-272	-4419	-4523	-431
30	-190	-4285	-11189	-2053
20	-503	-3705	-19363	-5461
10	95	-2351	-20132	-10014
0	0	-223	-10535	-12990
Borde de viga	0	0	+	0

(La figura 26) muestra el cascarón con viga de borde.

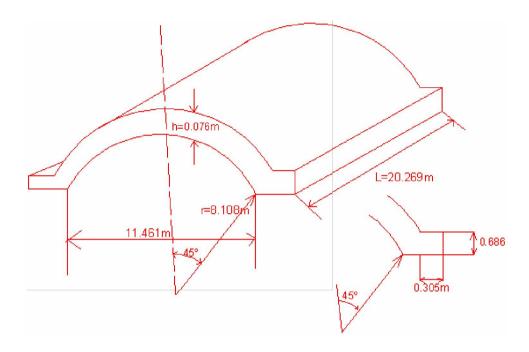


Figura 26. Cascarón con viga de borde.

(La figura 27) muestra la trayectoria de los esfuerzos.

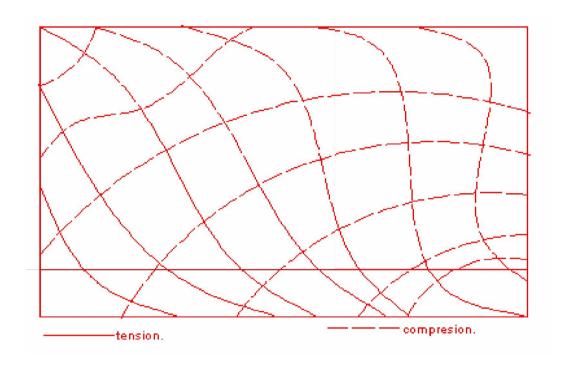


Figura 27. Trayectoria de los esfuerzos.

De la figura, es claro que la flexión transversal es reducida considerablemente por las vigas de borde, mientras que la tensión longitudinal en el centro de la luz desaparece quedando toda la tensión confinada en el borde.

(La figura 28) muestra el esquema del refuerzo del cascarón de bóveda con vigas de borde.

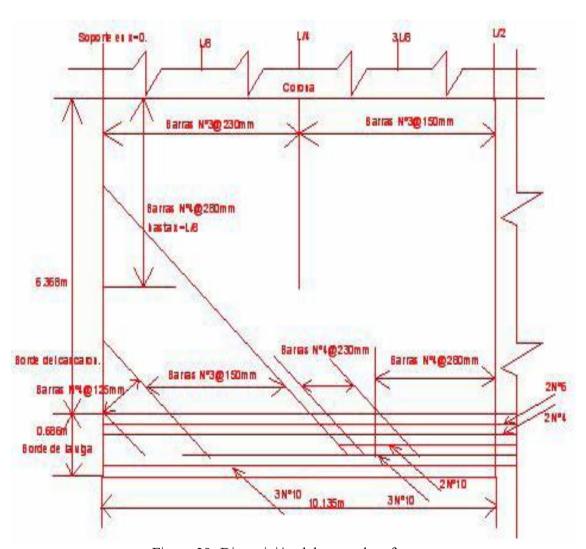


Figura 28. Disposición del acero de refuerzo.

El refuerzo se suministra para tomar todos los esfuerzos principales de tensión y puede colocarse ya sea en la dirección de las trayectorias de los esfuerzos o en dos direcciones usualmente ortogonales. Los esfuerzos principales se calculan a partir de los valores de las resultantes de esfuerzos N_ϕ y N_X

En las esquinas en donde el cortante es máximo, el refuerzo se coloca a 45°, el refuerzo transversal anular consiste en las barras N° 3 y se basa en M_{ϕ} y se desprecia a N_{ϕ}

Ahora bien, si la rigidez lateral y torsional de la viga de borde se desprecian en el análisis, $M_{\phi} = 0$ en el borde.

De todas formas por seguridad, se debe proporcionar algo de refuerzo por momento positivo, causado por la rigidez de la viga de borde, para tal fin se coloca el refuerzo de tensión principal en una área cerca al lado interior del cascaron (ver en la figura las barras N° 4 @ 280mm).

El diseñador puede recomendar un refuerzo mínimo de 0.0035 espaciado a no mas de 5 veces el espesor del cascaron en cada una de las direcciones de las áreas de tensión y 0.0018 en otras áreas, este refuerzo puede colocarse en forma de malla.

Mostramos algunos cálculos:

0.0035*100*7.6= 2.63cm² /ml, es decir, barras N° <u>3@270mm</u> o barras N°4@365mm, también malla electro soldada.

0.0018*100*7.6=1.368cm²/ml esto es barras N° 3 @375mm o malla electrosoldada.

Recuerde que:

El refuerzo de una viga de borde, se determina en sunción de la suerza de tensión en la viga, esto puede hacerse calculando los essuerzos en las paredes superior e inserior de la viga, los expertos acons, jan colocar la mayor parte de resuerzo cerca del sondo (tigura 25)

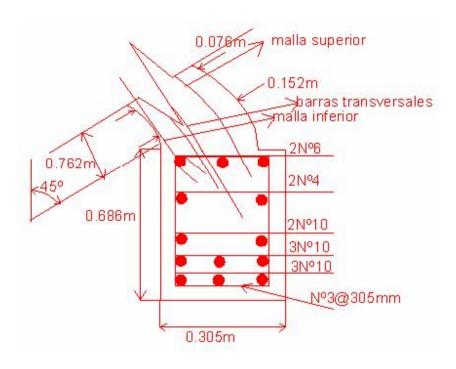


Figura 29. Refuerzo de la viga de borde.

3.6 EJEMPLO DE DISEÑO DE BÓVEDAS EN CONCRETO

Se desea construir una bóveda como cubierta para una bodega de una importante industria en Bogota, el propietario solicita una bóveda con bordes tipo mariposa, lo mas delgada posible; el diseñador recomienda el mínimo espesor de 7.5cm. (La figura 30) muestra las dimensiones y el radio de la bóveda de barril. Donde $Fy = 1700 \text{Kg/cm}^2$ y $F'c = 210 \text{Kg/cm}^2$.

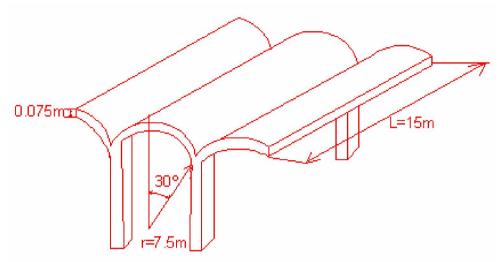


Figura 30 cascarón con bordes tipo mariposa.

Solución:

Paso 1:

Definir si el cascarón, es cascarón largo o corto calculando la relación L/r.

L/r = 15/7.5 =2, es un cascarón corto pero se puede aplicar perfectamente la teoría de bóvedas largas y por tanto utilizar las tablas 2,3 y 4 ya que el borde tipo mariposa la hace comportarse como una bóveda continua.

Paso 2:

Realizar un análisis de carga:

Peso propio	$= 50 \text{Kgf/m}^2$	2
Carga total	$=310 \text{Kgf/m}^2$	

Se debe tener en cuenta que el peso propio y el techado están distribuidos uniformemente sobre la superficie del cascarón, en tanto que el granizo se considera aplicado en la proyección horizontal de la superficie.

Paso 3:(tabla 2)

Se supone que los bordes longitudinales están libres, se consideran las fuerzas N_{ϕ} , N_{X} , $N_{\phi X}$ y el momento flector M_{ϕ} que son importantes para el dimensionanmiento del cascarón.

Pasa 4:

Encuentro las correcciones para p (tabla 3 y 4)

$$N_{\phi} = \frac{pr^2}{Eh} * K_{Fabla3} * K_{Tabla4N_{\phi}}$$

$$M_{\phi} = \frac{pr^2}{Fh} * K_{\iota abla 3} * K_{tabla 4M_{\phi}}$$

Paso 5 (tabla 2, tabla 3 y tabla 4)

Planteamiento de ecuaciones

$$N_X = N_{XP} + N_{Xq} = K_{qN} * \frac{qL^2}{r} + K_{FN} * \frac{qL^2}{r}$$
 Sin correctiones

$$N_{\!\scriptscriptstyle{\phi}} = N_{\!\scriptscriptstyle{\phi_{7}}} + N_{\!\scriptscriptstyle{\phi^{D}}} + correction N_{\!\scriptscriptstyle{\phi_{7}}} + correction N_{\!\scriptscriptstyle{\phi^{D}}}$$

$$N_{\phi} = K_{q\phi} qr + K_{P\phi} pr + rac{qr^2}{Eh} * K_{Tabla3} * K_{Tabla4N_{\phi}} + rac{pr^2}{Eh} * K_{Tabla4N_{\phi}} * K_{Tabla4N_{\phi}}$$

$$-N_{X\phi} = N_{X\phi q} + N_{X\phi P}$$
 Sin correcciones

$$-N_{X\phi} = K_{\varphi\phi X} qL + K_{F\phi X} pL$$

$$M_{\phi} = M_{\phi q} + M_{\phi P} + correction M_{\phi q} + correction M_{\phi P}$$

$$M_{\phi} = K_{qM\phi} qr^2 + K_{FM\phi} pr^2 + \frac{qr^2}{Eh} * K_{Iatla3} * K_{Iatla4M_{\phi}} + \frac{pr^2}{Eh} * K_{Iatla3} * K_{Tabla4M_{\phi}}$$

Los coeficientes K, se obtienen en las tablas 2,3 y 4 para los valores de $N_{X_i}N_{\phi}$, $N_{\phi X}$ y M_{ϕ} en función del ángulo ϕ_{X_i} de $\frac{\phi}{\phi_{X_i}}$ y de r/L. La corrección para todas las solicitaciones

anteriores son despreciables ya que r/L = 0.5 es mucho mayor que 0.25 que es el valor máximo de la tabla 3, esto lo que indica es que los desplazamientos horizontales de borde son aproximadamente cero.

Los cálculos se encuentran tabulados en la (tabla 8), para la corona, el centro y el borde.

Tabla 8	VALORES DE ESFUERZOS
---------	----------------------

	φ/φ k	Nx en X = L/2	$N\phi$ en $X = L/2$	$M\phi$ en $X = L/2$	$Nx\phi$ en $X = 0,L$
		(Kgf/m)	(Kgf/m)	(Kgf*m/m)	(Kgf/m)
Corona	1	-32244	-3283	-90,6	0
	0,75	-26122	-2760	-34,5	-7905
Centro	0,5	-7867	-1410	72,1	-12619
	0,25	22215	124	72,3	-10992
Borde	0	63606	795	-162,3	0

Se muestran algunos ejemplos de calculo de la tabla anterior en $\frac{\phi}{\phi_K} = 1$, con $\phi_K = 30^\circ$

$$N_X = \left\lceil \left(\frac{qL^2}{r} \right) * K_2 + \left(\frac{pL^2}{r} \right) * K_2 \right\rceil$$

$$N_X = \left\lceil \left(\frac{230 * 15^2}{7.5} \right) * -3.508 + \left(\frac{80 * 15^2}{7.5} \right) * -3.350 \right\rceil = -32244 \frac{Kgf}{m}$$

$$N_{\phi} = \left[qrK_2 + prK_2 \right]$$

$$N_{\phi} = [(230*7.5*(-1.422)) + (80*7.5*(-1.383))] = -3283 \frac{Kgf}{m}$$

$$N_{X\!p} = [qLK_2 + pLK_2]$$

$$N_{X\phi} = [230*15*0+80*15*0] = 0$$

$$M_{th} = \left| qr^2 K_2 + pr^2 K_2 \right|$$

$$M_{\phi} = [(230 * 7.5^{2})(-0.00533) + (80 * 7.5^{2})(-0.00482)] = -90.6 \frac{Kgf \cdot m}{m}$$

De acuerdo con la teoría de la membrana, observe que los valores de la tabla son únicos y se colocan en las posiciones mas desfavorables esto es, X=0, X=L/2 y X=L.

La fuerza de corte N_{X_5} es máxima en el centro, se toma como ya se dijo con refuerzo colocado en diagonal a 45° desde los apoyos transversales hacia los valles del cascarón, por tanto para los bordes en X=0

$$\frac{\phi}{\phi_K} = 0.5$$
, se tiene que:

$$\tau_{x\phi} = \frac{N_{\phi x}}{h} = \frac{12619}{0.075} = 168253 \frac{Kg}{m^2} \cong 16.83 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$A_{S} = \frac{\tau hb}{fy}$$

$$A_S = \frac{16.83 * 7.5 * 100}{1700} = 7.43 \frac{cm^2}{m}$$

Usar barras N° 5 con $A_S = 2 cm^2$

 N° de barras = 7.43/2 = 3.71 por metro y la separación 100/3.71 = 26cm.

Usar barras N° 5 @ 25cm.

La fuerza de tensión total del acero de refuerzo puede calcularse aproximadamente suponiendo una variación lineal desde el valle del cascarón hasta el eje neutro

$$\bar{y} = \frac{rsen\phi_K}{\phi_K} - r\cos\phi_K = \frac{7.5 * sen30}{\frac{30 * \pi/2}{90}} - 7.5\cos30 = 0.667m$$
 Desde el borde del valle.

 $\phi_{\mathcal{K}}$ en radianes

Esto representa una zona de tensión (figura 31)

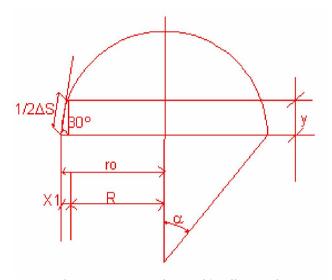


Figura 31. Zona de tensión diagonal.

$$r_0 = r\cos(90 - \phi_K) = 7.5 * \cos(90 - 30) = 3.75 m$$

$$b = r - \frac{r_0}{\tan \phi_{\mathcal{K}}} = 7.5 - \frac{3.75}{\tan 30} = 1m$$

$$s = 2r\phi_K = 2*7.5*\left(\frac{\pi*30}{180}\right) = 7.854m$$

$$x_1 = \frac{\overline{y}}{\tan 30} = \frac{0.667}{\tan 30} = 1.155 m$$

$$R = r_0 - x_1 = 3.75 - 1.155 = 2.594 m$$

$$2R = 5.188m$$

$$R = 2.594 = 7.5\cos(90 - \alpha)$$

$$\alpha = 20.24^{\circ}$$

$$s' = 2r\alpha = 2*7.5*\left(\frac{\pi*20.24}{180}\right) = 5.299m$$

$$\Delta s = s - s' = 7.854 - 5.299 = 2.555 m$$
, por lo tanto

 $\frac{\Delta s}{2}$ = 1.278 m De longitud de arco desde el valle de la zona de tensión un estimativo conservador de la fuerza total a tensión en cada extremo se puede calcular como:

$$T_S = \left(\frac{N_X}{2}\right) * \left(\frac{\Delta S}{2}\right) = \frac{63606 * 1.278}{2} = 46644.23 Kg$$

$$A_{s} = \frac{46644.23 \, Kgf}{1700 \frac{Kgf}{cm^{2}}} = 23.9 cm^{2}$$
 En total, usar barras N°5

Es decir, barras N°5@90mm en el ancho de 1.278m y en la parte inferior del cascarón, cumpliendo los límites de espaciamiento y recubrimiento necesarios.

NOTA:

Recordemos que:

- NSR-98 Capítulo C.7 Detalles del refuerzo.
- C.7.6 SEPARACION ENTRE BARRAS
- C.7.6.1 La distancia libre entre barras paralelas colocadas en una fila (o capa), no debe ser menor que el diámetro de la barra, no menor de 25 mm ni menor de 1.33 veces el tamaño del agregado grueso.
- C.7.6.5 En losas macizas y muros, las barras de refuerzo a flexión deben tener una separación máxima de 3 veces el espesor de la losa o muro, pero no mayor de 500 mm, excepto en las secciones críticas de losas en dos direcciones, donde no debe exceder 2 veces el espesor de la losa. Cuando se trate de refuerzo de temperatura la separación debe ser menor de 5 veces el espesor de la losa o muro, pero no mayor de 500 mm.
- NSR-98 Capítulo C.7 Detalles del refuerzo.
- C.7.7 RECUBRIMIENTO DEL REFUERZO
- C.7.7.1 CONCRETO VACIADO EN SITIO (NO PREESFORZADO) Las barras del refuerzo deben tener los recubrimientos mínimos dados a continuación. En ambientes agresivos deben utilizarse recubrimientos mayores que los mencionados, los cuales dependen de las condiciones de exposición.

Recubrimiento mínimo

En cascarones y losas plegadas

El refuerzo debido a N_X se calcula con el máximo valor que es en el borde:

$$N_X = \frac{63606}{0.075} = 848080 \frac{Kg}{m^2} = 84.8 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$A_S = \frac{84.8 \frac{Kg}{cm^2} * 7.5 cm * 100 cm}{1700 \frac{Kg}{cm^2}} = 37.41 cm^2, \text{ usar barras N°5}$$

Por lo tanto, barras N°5@50mm en la dirección larga del cascarón.

El refuerzo debido a N_{ϕ} se calcula con el máximo valor que es en la corona:

$$N_{\phi} = \frac{3283}{0.075} = 43773 \frac{Kg}{m^2} = 4.38 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$A_S = \frac{4.38 \frac{Kg}{cm^2} * 7.5 cm * 100 cm}{1700 \frac{Kg}{cm^2}} = 1.93 cm^2, \text{ usar barras N°5}$$

Es decir, barras N°5@250mm en la dirección corta del cascaron para cumplir el espaciamiento.

El refuerzo para el momento M_{ϕ} se calcula con el máximo valor que es en el borde:

$$M_{\phi} = -162.3 \, Kgf - m$$

$$K = \frac{M}{b*h^2} = \frac{162.3}{1*0.075^2} = 28853$$

$$m = \frac{Fy}{\phi*F'c} = \frac{1700}{0.85*210} = 9.52$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2*m*K}{\phi Fy*1000}} \right] = \frac{1}{9.52} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2*9.52*28853}{0.9*1700*1000}} \right] = 0.020$$

$$As = \rho * b * h = 0.02 * 7.5 * 100 = 15 cm^2$$
, usar barras N°5

Es decir, barras Nº 5@130mm

El acero de los bordes tipo mariposa es igual al del cascarón

(La figura 32) muestra la disposición final del acero en el cascarón en una vista en planta y corresponde al cascarón sin los bordes tipo mariposa. Las reacciones en las columnas de apoyo viene dada por el máximo cortante que puntualizado en la longitud del cascaron y

repartido entre las dos columnas de apoyo $V = \frac{12619*15}{2} = 94.64$ *Toneladas* y un

momento de 162.3 Kg-m, debe considerarse que el elemento de apoyo es infinitamente rígido en propio plano y el alto valor de la reacción la hace trabajar a compresión siendo despreciable la acción del momento flector, el diseño del elemento de apoyo se hace siguiendo un procedimiento igual al utilizado en columnas (figura 33).

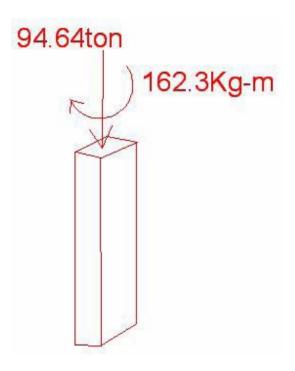


Figura 33. Reacciones en los apoyos.

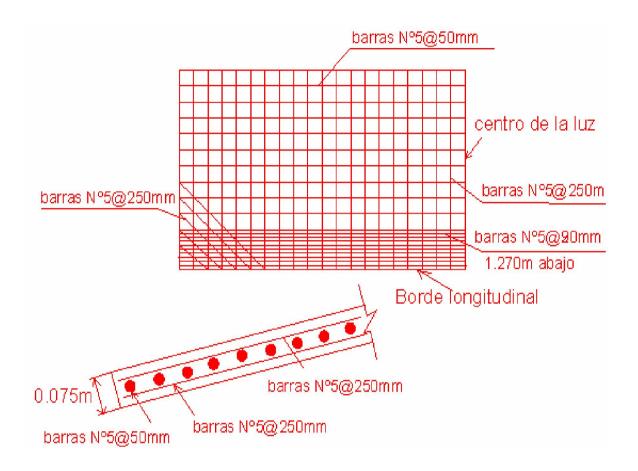
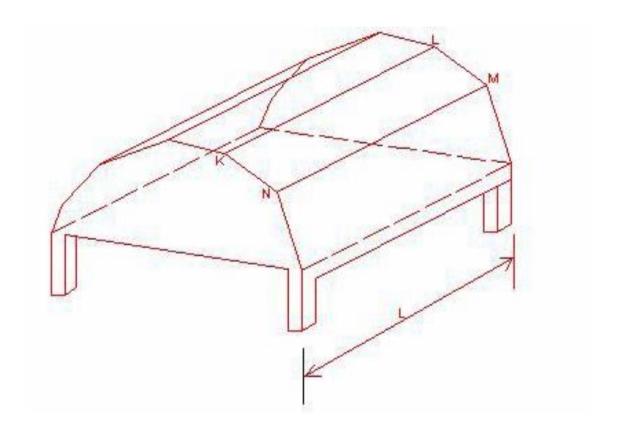


Figura 32. Refuerzo de la bóveda.



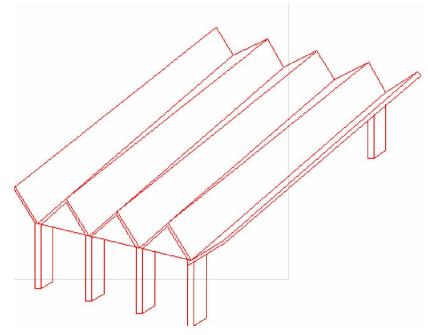
CAPITULO 4

CASCARONES EN CONCRETO PARA PLACAS DOBLADAS O PLEGADAS

4. CASCARONES EN CONCRETO PARA PLACAS DOBLADAS O PLEGADAS.

Con la finalidad de simplificar el encofrado pero conservando la mayoría de las ventajas de las superficies curvas se ha desarrollado la estructura en lamina plegada. Estas superficies tienen una forma con ondulaciones profundas similares a las bóvedas pero utilizando elementos planos que se cortan en *líneas de plegado* paralelas a la luz cubierta. Se han construido estructuras en lámina plegada utilizando losas muy delgadas con luces superiores a los 60m.

Consta de varios elementos planos delgados o placas planas conectadas entre si a lo largo de sus bordes. Su uso se recomienda especialmente para grandes luces, siendo muy económica por la acción de viga que desarrollan y por el apoyo mutuo de las diversas placas; en sentido longitudinal, las placas pueden ser continuas sobre sus apoyos y en sentido transversal puede haber varias placas en cada nave (figura 34 y figura 35) sus bordes y pliegues transmiten momentos y fuerzas cortantes o bien solamente fuerzas cortantes.



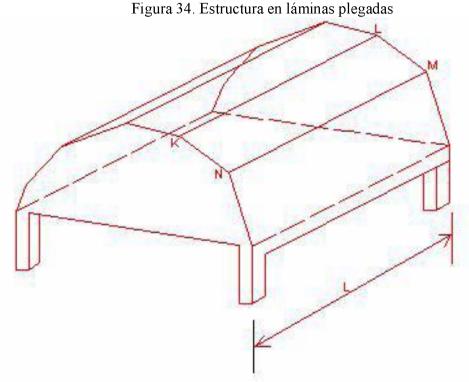


Figura 35. cubierta en placas plegadas.

4.1 VENTAJAS Y CORPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE UNA PLACA PLEGADA

La ventaja estructural de este tipo de cascarones es que hay mas material trabajando en una determinada luz para soportar los esfuerzos en comparación con una viga (figura 36).

En la figura 36-a, se muestra cortes transversales de sistemas estructurales alternos de la misma luz, como se ve una sección es para placas plegadas, mientas que la otra esta conformada por dos vigas macizas. La distribución de esfuerzos en las vigas macizas se muestra en la figura 36-a, es claro que solo la fibra de los extremos de la viga están esforzados al máximo, mientras que el resto de la sección transversal esta sometido a esfuerzos muchos menores. También se observa que los esfuerzos en placas plegadas (figura 36-b) están distribuido mucho mas uniformemente en la altura de la placa, como consecuencia una estructura de laminas plegadas necesita menos material que las vigas y como es lógico resulta mas económica

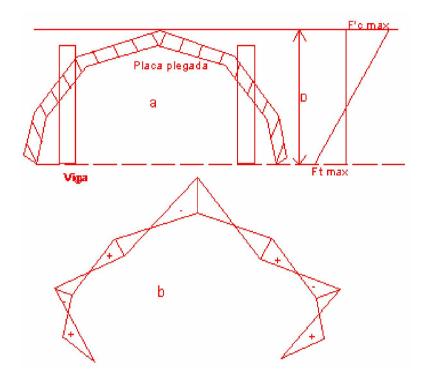


Figura 36. Comparación de esfuerzos entre una placa plegada y una viga.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la distribución longitudinal de una estructura de placas plegadas que abarca una longitud L no expresan en forma precisa la teoría de las vigas simplemente apoyadas esto es, los esfuerzos en sentido longitudinal no varían linealmente.

La viga es una de las formas estructurales de menor rendimiento. Normalmente solo una de las secciones transversales de una viga esta sometida al máximo momento del proyecto y por ello si el elemento es prismático solamente una de sus secciones transversales esta trabajando a la máxima capacidad.

Recuerde que:

Cuando existe cargas verticales no puede calcularse el momento de inercia de la sección de placas delgadas con respecto al eje centroidal y mucho menos usar la formula $\sigma = \frac{Mc}{I}$ debido a que la sección transversal se distorsiona con la carga e invalida la teoría elemental de la tlexión, se considera que la verdadera distribución de esfuerzos es muy similar a la mostrada en la tigura 36-b los esfuerzos normales son perpendiculares al plano de la sección de placas plegadas.

4.2 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN PLACAS PLEGADAS DE CONCRETO.

Puede suponerse que los esfuerzos longitudinales y los de corte paralelo a la sección están distribuidos con uniformidad en el espesor de la placa, es la misma suposición que se aplica a los esfuerzos en las membranas de los cascarones. En la figura 37 puede verse la forma en que una lámina plegada soporta su carga, una carga superficial aplicada a la estructura tenderá a deformar cada una de las placas como indican las líneas de trazos correspondientes a la placa 1 si cada una pudiera moverse independientemente, trabajando cada una de las placas como losa entre los diafragmas de extremo. Los bordes exteriores de las placas 1 y 2 se deformarían en las direcciones CC· y CC" respectivamente (figura 37). Sin embargo las placas no pueden actuar independientemente. La situación final del borde C debe estar en alguna posición especial C₁, lo que exige que las placas 1 y 2 sufran deformaciones Δ_1 y Δ_2 respectivamente, en sus propios planos. Aunque las placas tienen una rigidez a torsión y a flexión despreciables para resistir a las componentes de la deformación perpendicularmente a sus planos, son extremadamente rígidas para resistir a las deformaciones dentro de su propio plano, esta resistencia a la flexión respecto al eje resistente de cada placa produce una sustentación eficaz de la losa a lo largo de cada línea de plegado. Una línea de plegado no puede deformarse sin producir la deformación dentro del plano de una o las dos placas advacentes, tipo de deformación que las placas pueden resistir de forma muy eficaz. Por ello las placas en lugar de trabajar en la dirección mas larga de la estructura, funcionan como losas sustentadas en las líneas de plegado, esto se llama acción de placa (figura 37).

Las reacciones de tales franjas se aplican como cargas lineales a las líneas de plegado. Como consecuencia de la despreciable resistencia a la torsión y a flexiones de las placas fuera de su plano, la única dirección en que cada una de ellas puede ejercer una reacción contra esa carga lineal es paralelamente a su superficie. La carga lineal resultante p (figura 37) se descompone paralelamente a las dos placas, las placas a su vez soportan esta carga de borde longitudinalmente entre los diafragmas de extremo por acción de placa (figura 37). Pueden determinarse las tensiones longitudinales de membrana N_x como para cualquier viga (tensiones de borde libre).

Si las condiciones son tales que las tensiones de borde libre sean las mismas a ambos lados de todas las líneas de plegado, coinciden con las tensiones finales, como seria el caso de una unidad interior de una cubierta compuesta de muchas unidades idénticas.

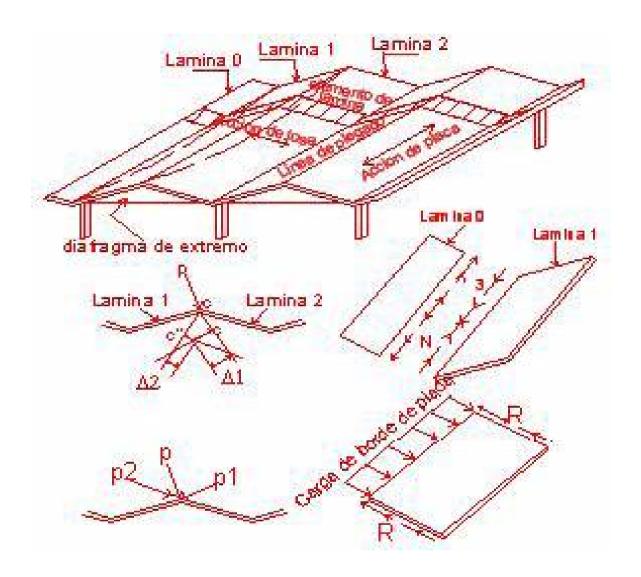


Figura 37. Análisis de placa plegada

4.3 REFUERZO EN PLACAS PLEGADAS

El refuerzo en cada placa de una estructura plegada, en la dirección transversal y longitudinal, es determinada con los esfuerzos producto del análisis (ver sección 4.5), en la (figura 38.) se puede observar refuerzos típicos.

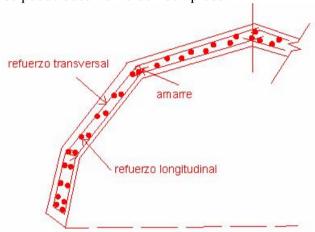


Figura 38. Refuerzo típico de una placa plegada.

La figura 39, representa una sección transversal de un marco rígido de manera que se ajuste a la hipótesis de análisis, por tanto sus juntas se deben reforzar de la misma manera que en los marcos rígidos, cuando el ángulo entre dos láminas es grande es deseable colocar amarres entre los refuerzos superiores e inferiores.

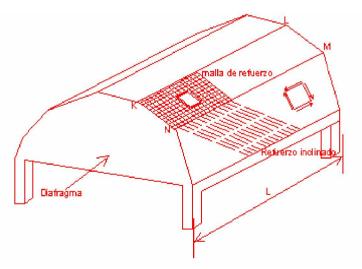


Figura 39. Patrones de refuerzo en una placa plegada.

- **a)** La cantidad de refuerzo longitudinal, se determina por los esfuerzos de tensión en cada placa, lógicamente debe cumplir con la cuantía mínima y se debe distribuir uniformemente en cada placa. Es indispensable colocar un refuerzo mínimo para controlar la retracción de fraguado y la temperatura, semejante al exigido por la N.S.R.98 para una losa.
- b) El refuerzo transversal se determina por la flexión transversal en cada placa, entre los puntos de apoyo, dicho refuerzo no debe ser inferior al requerido por retracción de fraguado y temperatura. Debido a que las regiones alrededor de las intersecciones de las placas están sujetos a momentos de flexión negativos transversales, se requiere entonces un refuerzo negativo superior en estos puntos, este refuerzo así como las inferiores se deben prolongar una distancia suficiente mas allá de la esquina para alcanzar una longitud de desarrollo adecuada debido a lo distorsionado de la sección y como el grado de incertidumbre en los momentos es grande es aconsejable llevar el refuerzo a lo largo de la parte inferior de todas las placas tal como se ve en la lamina. Otro beneficio de refuerzo superior es que es capaz y es eficaz para resistir el cortante.
- c) Refuerzo para tensión diagonal y cortante: Si el concreto no es suficiente por si solo para resistir la tensión diagonal debido a los esfuerzos cortantes, se debe suministrar refuerzo para el exceso de tensión diagonal este refuerzo debe ser inclinado o puede usarse una rejilla, por tanto la cantidad de acero necesaria para resistir la tensión diagonal se debe agregar a la requerida por la flexión. Los esfuerzos transversales y longitudinales colocados para este fin se deben distribuir de manera uniforme entre las caras superior e inferior de las placas.
- d) Refuerzo en el diafragma de extremo (figura 40): El análisis elemental de las laminas plegadas supone que las secciones transversales de los apoyos no se distorsionan, por lo tanto se deben proveer diafragmas rígidos en los extremos de las placas plegadas en los planos de los apoyos, nótese que los diafragmas actúan como vigas transversales y como amarres en los apoyos, por eso suelen tener mas refuerzos en la parte inferior, a fin de evitar las deformaciones y así la distorsión de las secciones de los extremos de las placas, el refuerzo del diafragma se debe distribuir uniformemente en cada cara

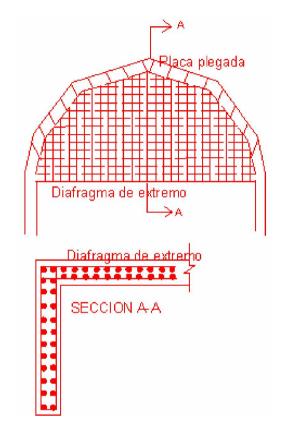


Figura 40.refuerzo en diafragma de extremo.

4.4 SECCIONES Y DIMENSIONES TÍPICAS DE PLACAS DELGADAS

Para ilustración del lector, en la figura 41 se muestra otras secciones transversales típicas de las placas plegadas.

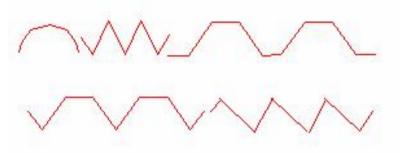
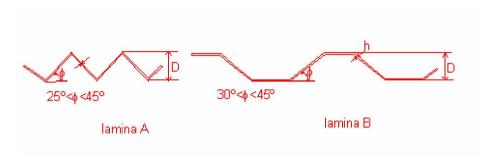


Figura 41. Placas plegadas típicas.

Además, le presentamos la tabla 9 en la que se indican las dimensiones típicas de placas plegadas para estructuras de cubierta, algunas de estas estructuras no tienen curvatura pero pueden considerarse como aproximaciones de la geometría de los cascarones.



DIMENSIONES TIPICAS DE PLACAS
TABLA 9 PLEGADAS

Luz (m)	ancho del modulo (m)	D (m)		H (m)	Refuerzo(Kg/m²)
Lamina		Máximo	Mínimo		
A 12,192	4,72	1,219	0,838	0,1	5,9 a 7,8
18,288	6,096	1,829	1,219	0,1 a 0,15	9,3 a 13,2
22,86	7,62	2,286	1,524	0,1 a 0,15	12,7 a 18,1
30,48	9,144	3,048	2,057	0,125 a 0,15	19,5 a 25,4
B 12,192	6,096	1,524	0,762	0,075	7,3 a 9,8
18,288	7,62	1,829	1,219	0,075 a 0,09	9,8 a 14,6
22,86	9,144	2,311	1,524	0,075 a 0,1	12,2 a 19,5
30,48	12,192	3,048	1,981	0,1 a 0,125	19,5 a 29,3

La tabla muestra para dos módulos diferentes de placas plegadas las diferentes luces y espesores que se pueden utilizar, note que las luces son un poco menores que para el caso de las bóvedas y que los espesores son un tanto mayores; sin embargo, se alcanzan luces y espesores muy económicos en comparación con cualquier otro sistema estructural y que la cantidad de acero es bastante reducida.

4.5 ANÁLISIS DE PLACAS PLEGADAS EN CONCRETO.

Una estructura de placas plegadas tiene una acción en dos sentidos, para transmitir las cargas a sus apoyos. En sentido transversal, los elementos actúan como losas con luces que abarcan entre placas, a ambos lados por lo tanto las placas actúan como vigas para llevar la carga de las losas en sentido longitudinal a los apoyos que deben ser capaces de resistir las fuerzas verticales y horizontales.

Si las laminas están articuladas a lo largo de sus bordes, el análisis es sencillo y se logra cierta simplificación, si las laminas aunque tengan bordes continuos, pendientes muy fuertes o si la luz tiene suficiente longitud con respecto a otras dimensiones se puede aplicar las teorías de las vigas. No existen criterios para determinar con razonable exactitud cuando es posible esta simplificación.

Dentro de los métodos aproximados manuales existen varios disponibles tales como el de YITZHAKI, el de PARME y el de SBAROUNIS. Todos toman en cuenta los efectos de las deflexiones de las láminas sobre las losas y por lo general hacen las siguientes suposiciones:

- d) El material es elástico, isotrópico y homogéneo.
- e) La distribución longitudinal de todas las cargas en todas las láminas es la misma.
- f) Las láminas llevan las cargas en sentido transversal solo por flexión normal a un plano y en sentido longitudinal solo por flexión dentro de un plano.
- g) Los esfuerzos longitudinales varían en sentido lineal en el espesor de cada losa.
- h) Los elementos de soporte tales como diafragmas, pórticos y vigas son de rigidez infinita en su propio plano.
- i) Las láminas no tienen rigidez torsional normal a su propio plano.
- j) Los desplazamientos debido a las fuerzas que no sean los momentos de flexión son despreciables.

Cualquiera que sea el método seleccionado, los cálculos son muy largos y complejos y por ello recomendamos efectuar estos cálculos con tablas claras y organizadas. De los tres métodos preferimos el de YITZHAKI porque ofrece algunas ventajas sobre los otros métodos ya que nos permite una fácil tabulación, no requiere la solución de tantas ecuaciones simultaneas, si no una para cada borde de las laminas libremente apoyadas, se adapta fácilmente y se puede generalizar para abarcar un gran numero de condiciones.

Explicar todos los métodos de diseño para placas plegadas escapa a la intención de este libro, por tanto trataremos solamente el método de YITZHAKI.

4.5.1 EL MÉTODO DE YITZHAKI PARA PLACAS DOBLADAS O PLEGADAS.

Este método se fundamenta en las 7 suposiciones ya enunciadas y trata de dos formas a los sistemas de losas y laminas plegadas:

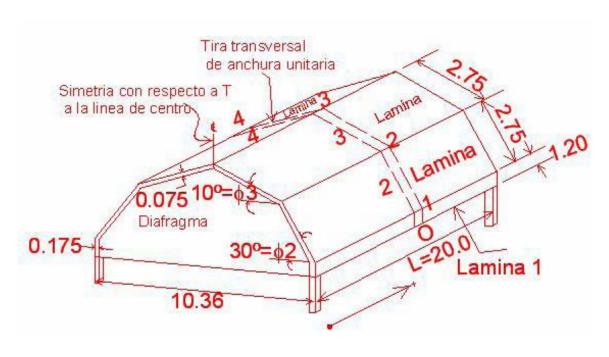
- 1) Se considera un ancho unitario de la losa continua sobre apoyos fijos en la dirección de la carga, generalmente la franja se toma donde los esfuerzos longitudinales de laminas son máximo.
- 2) Las reacciones de las losas se consideran como cargas sobre las láminas, que ahora se supone articuladas a lo largo de un borde por tanto las reacciones de las losas ocasionan cambios angulares en las láminas de cada pliegue, para restaurar la continuidad se aplica un momento desconocido en las láminas de cada borde.

Los momentos se pueden determinar por el hecho de que en cada borde, las sumas de los cambios angulares debido a las cargas y/o momentos desconocidos deben ser igual a cero. Los cambios angulares debido a los momentos desconocidos tienen dos componentes:

- a) El cambio angular en cada extremo de la losa, que se considera articulada con una losa contigua, en una franja transversal de ancho unitario.
- b) El cambio angular debido a las deflexiones de las láminas. El método supone que el cambio angular en cada pliegue varia en la misma forma en sentido longitudinal, tal como ocurre con los cambios angulares a lo largo de los otros pliegues.

4.5.1.1 EJEMPLO DE DISEÑO DE UNA CUBIERTA CON PLACAS PLEGADAS USANDO EL MÉTODO DE YITZHAKI.

Se desea diseñar una lámina plegada simétrica, cuya luz transversal es de 10.36m y 20m en dirección perpendicular, el diseñador recomienda por economía utilizar un espesor de 7.5cm con vigas de borde con ancho de 17.5cm. Usar Fy = 4200Kg/cm² y F'c = 210Kg/cm² las pendientes son definidas por el diseñador evitando usar las pendientes muy pronunciadas.



Solución:

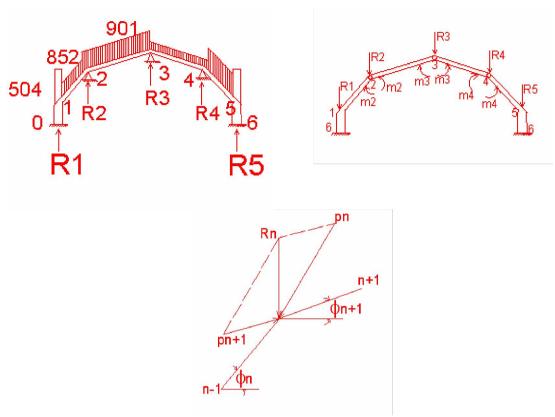
Esta cubierta se diseña para soportar las siguientes cargas uniformemente distribuidas.

Análisis de carga:	
Peso propio (placa)	$2400*0.075=180 \text{Kgf/m}^2$
Techado (aislamiento)	$= 50 \text{Kgf/m}^2$
Carga viva	$= 100 \text{Kgf} / \text{m}^2$
Total	330K of/ m ²

Obsérvese que no se han contabilizado aun las vigas de borde (laminas 1 y 6). W= 1.2*0.175*2400= 504Kgf/m, es aconsejable tabular las dimensiones y datos de la estructura de laminas plegadas (tabla 10)

Tabla 10 DATOS GEOMETRICOS PARA LAS LAMINAS PLEGADAS SIMETRICAS

Lamina	h(m)	t(m)	φ grados	$a = h\cos\phi (m)$	$A (m^2)$	W (Kgf/m)
1 y 6	1,2	0,175	90	0	0,21	504
2 y 5	2,75	0,075	30	2,382	0,206	852
3 y 4	2,75	0,075	10	2,708	0,206	901



En donde:

h = ancho de cada lamina individual en metros

t = espesor de cada lamina individual en metros

φ = ángulo que forma cada lamina con la horizontal en grados

 $A = h^*t$, área de la sección transversal de la lamina en m^2

 $a = h\cos\phi$, proyección horizontal del ancho de cada lamina en m

W= carga vertical en Kgf/m de la lamina

Para las laminas 1 y 6, $W_1 = W_6 = 2400*0.21+0$ (carga viva) = 504Kgf/m. Para las laminas 2 y 3, $W_2 = W_3 = 2400*0.206+150*2.382=852$ Kgf/m

Con estos datos se procede a realizar el procedimiento de solución:

Paso 1:

Se calculan las cargas sobre cada franja transversal de un metro de ancho en el centro de la luz.

Para la viga de extremo, W= 504Kg/m.

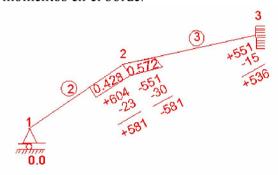
Para las laminas 2 y 3, W= 852Kg/m.

Para las laminas 4 y 5, W= 901Kg/m.

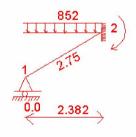
Paso 2:

Considérese la franja en estudio como una losa continua apoyada en los pliegues. Los momentos flexionantes se calculan usando el método de Cross, para aprovechar la ventaja de la simetría de la estructura con cargas simétricas, se puede considerar que el borde 3 se encuentra empotrado y los momentos en los extremos solos se distribuyen en la mitad izquierda de la franja.

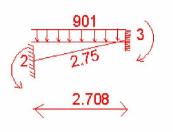
Debido a que la rigidez de la lamina 1 es mucho mayor que la rigidez de la lamina 2, el borde 1 se considera que esta libre para rotar (articulación), por tanto la rigidez relativa de la lamina 2 se considera ¾ de la rigidez relativa real (método de Cross) para evitar la necesidad de distribuir momentos en el borde.



$$M_{21} = +\frac{1}{8} \text{ w} L^2 = \frac{1}{8} * 852 * 2.382^2 = +604 \text{ Kgf} - m$$



$$M_{23} = -\frac{1}{12} wL^2 = -\frac{1}{12} *901 *2.708^2 = -551 Kgf - m$$



$$M_{32} = +\frac{1}{12} wL^2 = 551 Kgf - m$$

Considérese inercia constante.

$$I == 1$$

$$\left(\frac{I}{L}\right)_2 = \frac{3}{4} * \frac{1}{2.75} = 0.273$$

$$\left(\frac{I}{L}\right)_3 = \frac{1}{2.75} = 0.364$$

$$FD_{21} = \frac{0.273}{(0.364 + 0.273)} = 0.428$$

$$FD_{23} = \frac{0.364}{(0.364 + 0.273)} = 0.572$$

$$\sum = 0.428 + 0.572 = 1$$

$$FD_{32} = +\frac{1}{2}$$
 Por la simetría de las placas.

Paso 3:

Con estos momentos se calculan las reacciones de las losas y las cargas de las láminas, las reacciones son positivas si se dirigen hacia arriba.

a) Para las laminas o vigas verticales 1 y 6 el cortante V_1 es cero en el borde (0) y W = 504 Kgf en el borde (1).

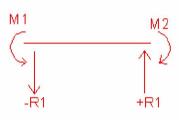
- b) para las laminas la fuerza cortante es W/2=852/2 =426Kgf para los bordes 1 y 2 de la lamina 2.
- c) Para el borde 2 de la lamina 3 W/2=901/2=451 Kgf.
- d) Para el borde 3 de la lamina 3 W = 901Kgf, para incluir la carga de la lamina 4.

Las reacciones anteriormente calculadas son directas debido a las cargas. Ahora calcularemos las reacciones debidas a los momentos en los extremos calculados con la formula:

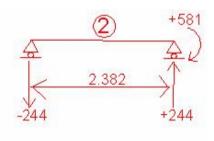
$$\frac{\left(M_i+M_{i+1}\right)}{a}$$

Donde:

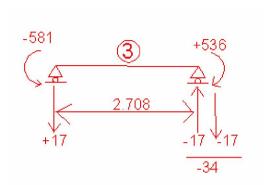
a: Proyección horizontal de la lámina, los valores en el lado derecho para cada borde se escriben con signo cambiado.



Así para la placa 2:



Para la placa 3:



Estos valores se tabulan adecuadamente, le sugerimos el modelo siguiente (tabla 11):

Tabla 11 REACCIONES DE LOSA Y CARGAS EN LAS LAMINAS

ITEM	Lamina 1		Lam	ina 2	Lamina 3		
	Borde 0	Borde 1	Borde 1	Borde 2	Borde 2	Borde 3	
V1(Kgf)	0	504	426	426	451	901	
∑Mi/a(Kgf)	0	0	-244	244	17	-34	
RI(Kgf)	0	686		11	1138		
K				0,401		0,353	
R/K,Kgf				2838		2456	
R2,Kgf	()		Ö		2494	
R1,Kgf	68	36	32	3277		2881	
Pn=R1-R2	68	36	32	3277		+387	
M(Kgf-m)	343	300	163	163850		-19350	

Nótese que para obtener las reacciones se suman los valores para cada borde en la primera y segunda línea de la tabla.

Sean: $K = \tan \phi_{j} - \tan \phi_{j-1}$ donde ϕ es positivo.

R/K = representa el componente horizontal de la reacción.

$$R_n = \frac{R}{K}$$
, representa la carga axial a lo largo de la longitud de la estructura que forma la lámina.

En general la carga axial paralela a la longitud L sobre la placa n viene dada por:

$$p_{n} = \frac{R_{n}}{K_{n} \cos \phi_{n}} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1} \cos \phi_{n}} = R_{1} - R_{2}$$

La ecuación anterior no se aplica en el caso de una reacción vertical sobre una lámina vertical ya que R/K es la componente horizontal de la reacción. Algunos valores de la (tablall) para R y K se calcularon así:

$$K = \tan 30^{\circ} - \tan 10^{\circ} = 0.401$$

$$K = \tan 10^{\circ} - \tan(-10^{\circ}) = 0.353$$

$$R_1 = \frac{2838}{\cos 10^\circ} = 2881 Kgf$$

$$R_1 = \frac{2838}{\cos 30^{\circ}} = 3277 Kgf$$

$$R_2 = \frac{2456}{\cos 10^\circ} = 2494 Kgf$$

Paso 4:

Se calculan los momentos de flexión en el centro de la luz, en donde son máximos en cada lámina. Cada placa se toma como una viga simplemente apoyada en donde $M = \frac{1}{8} p_n \ell^2$, en donde $p_n = R - R_2$ ya se calculo, $\ell = \text{luz} = 20\text{m}$, los momentos se calculan y se colocan en la ultima fila de la tabla 12

Se sabe que estos momentos tienen una variación parabólica a lo largo de lo bordes, esto es, los momentos son positivos en el centro de cada placa, pero cambian de signo cerca de los bordes de contacto entre placas a lo largo del eje.

Paso 5:

Proceda ahora a igualar los esfuerzos actuantes en los bordes de las placas de manera que se pueda obtener compatibilidad, es posible lograr esto mediante esfuerzos ajustados similares al método de aproximaciones de Cross, esto si, siguiendo las siguientes reglas especificas:

a) Se calculan las rigideces relativas en proporción al inverso de las áreas de las placas,

por ejemplo para la lámina 1, borde 1:
$$FD = \frac{\frac{1}{0.21}}{\frac{1}{0.21} + \frac{1}{0.206}} = 0.495$$

Lamina 2, borde 1: FD = 0.505

Lamina 2, borde 2:
$$FD = \frac{\frac{1}{0.206}}{\frac{1}{0.206} + \frac{1}{0.206}} = 0.5$$

Lamina 3, borde 2: FD = 0.5

b) Se calculan los esfuerzos longitudinales f en $X = \frac{\ell}{2} = 10 m$, como $f = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{1}{6}ih^2} = \frac{6M}{Ah}$, $en\frac{Kgf}{m^2}$, ósea $f = 0.0006\frac{M}{Ah}$, $en\frac{Kgf}{cm^2}$, pero con M en Kgf-m, A en

 m^2 y h en m.

h es el ancho de cada placa.

Las tensiones se consideran positivas y las compresiones negativas ósea: $f_i = -f_o$

En el centro de la luz, los esfuerzos de borde libre o sin ajustar son (figura 34):

$$f_{bordel} = -\frac{0.0006 * 34300}{0.21 * 1.2} = -81.67 \frac{Kgf}{cm^2}$$
 De la lamina 1

En el borde 0 es positivo

$$f_{torde2} = -\frac{0.0006*163850}{0.206*2.75} = -173.54 \frac{Kgf}{cm^2}$$
 De la lamina 2

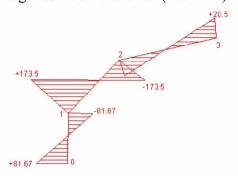
En el borde 1 es positivo

$$f_{torde3} = +\frac{0.0006*19350}{0.206*2.75} = +20.5 \frac{Kgf}{cm^2}$$
 De la lamina 3

En el borde 2 es negativo

Paso 6:

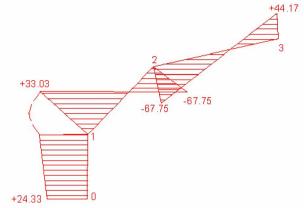
Ahora se procede a ajustar estos esfuerzos desequilibrados siguiendo un procedimiento similar al de Cross pero con algunas modificaciones. (Tabla 12)



Esfuerzos sin ajustar.

Tabla 12 - Ajuste de esfuerzos

0	1	1		2	2		3	3
		0.495	0.505		0.5	0.5		
+87.1		-81.7	+173.5		-173.5	-20.5		+20.5
-63.16	-	+126.32	-128.88		+76.5	-76.5	-	+38.3
			-38.25	\times	+64.44			
+9.47	-	-18.94	+19.32~		32.22	+32.22	-	-16.11
			+16.11		- 9.66			
- 3.99	-	+7.99	-8.14 ~		- +4.83	-4.83	-	+2.42
			-2.42		+4.07			
+0.6	-	-1.2	+1.22 ~		-2.04	+2.04		-1.02
			+1.02		► -0.61			
-0.25	-	+0.5	-0.52		+0.31	-0.3	—	+0.15
			+0.16		+0.26			
-0.04	-	+0.08	-0.08		-0.13	+0.13		-0.07
+24.33		+33.03	+33.03		-67.75	-67.75		▶+44.17
Kgf								
$\overline{cm^2}$								



Esfuerzos ajustados

Observe que en la tabla anterior se utilizaron factores de traslapo $F_i = \frac{1}{2}$ Yitzhaki propone que para ajustar los esfuerzos desequilibrados para un determinado borde, los esfuerzos se sumen si tienen signos opuestos y se resten si tienen signos iguales, los esfuerzos desequilibrados se reparten así:

Positivo Negativo
$$\left| \Delta f_{\omega q} \right|_{+} \Delta f_{der} \left| \Delta f_{\omega q} \right|_{-} \Delta f_{der} \left| \Delta f_{der} \right|_{+}$$

 Δf Estará a la izquierda o derecha dependiendo del signo del valor mayor.

Paso 7:

Calcule ahora las deflexiones en el borde, en el punto medio de la luz, generalmente el componente vertical δ_n en m se calcula así:

$$\frac{E}{L^{2}}\delta_{n} = -\frac{15}{K_{n}} \left[\frac{f_{n-1} - f_{n}}{a_{n}} - \frac{f_{n} - f_{n+1}}{a_{n+1}} \right] = \frac{15}{K_{n}} * \frac{\Delta f}{\Delta a_{n}}$$

15 es un coeficiente adoptado por Yitzhaki.

E: Modulo elástico del concreto =188350 Kgf/cm²

$$K = \tan \phi_{.2} - \tan \phi_{.2-1}$$

Para eliminar $\frac{E}{L^2}$ se dividen las ecuaciones simultáneas de ángulos entre este factor, para una lámina vertical, la deflexión vertical se expresa como:

$$\frac{E}{L^2}\delta_n = \frac{15}{h_n} [f_{n-1} - f_n] = \frac{15}{a_n} \Delta f$$

Los valores se calculan y se tabulan en la tabla 13:

Tabla 13 VALOR DE LAS DEFLEXIONES

Propiedad	Lamina 1		Lam	ina 2	Lamina 3	
	Borde 0	Borde 1	Borde 1	Borde 2	Borde 2	Borde 3
±Δf/an,Kg/cm ² /m		7,25	-42,3	41,33	-41,33	-41,33
Eδn/L ² ,Kg/cm ² /m		10	8,8	-36	,28	-3516
$\pm E\Delta\delta/L^2a$, Kg/cm ² /m ²				-60,91	-1312	2624
$E\theta_p/L^2$, $Kg/cm^2/m^2$				-13	373	2624

Veamos algunos cálculos para los valores de la tabla 13.

$$\pm \frac{\Delta f}{a_n} = \left[\frac{+33.03 - (24.83)}{1.2} \right] = +7.25 \frac{Kg}{cm^2}$$
Lamina 1

$$\pm \frac{\Delta f}{a_n} = \left[\frac{-67.75 - (31.03)}{2.382} \right] = -42.3 \frac{\frac{Kg}{cm^2}}{m} \text{ Lamina 2}$$

$$\pm \frac{\Delta f}{a_n} = \left[\frac{44.175 - (-67.75)}{2.708} \right] = -41.33 \frac{\frac{Kg}{cm^2}}{m} \text{ Lamina 2}$$

$$\frac{E\delta_n}{I_c^2} = 15 * 7.25 = +108.8 \frac{\frac{Kg}{cm^2}}{m}$$

$$\frac{E\delta_n}{L^2} = 15 * \left[\frac{-42.3 + 41.32}{0.1401} \right] 0 - 36.28 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\frac{E\delta_n}{L^2} = 15 * \left[\frac{-41.33 - 41.33}{0.3526} \right] = -3516 \frac{\frac{Kg}{cm^2}}{m}$$

$$\pm \frac{E\Delta\delta_{n}}{L a} = \left[\frac{-36.28 - 108.8}{2.382} \right] = -60.91 \frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}}$$

$$\pm \frac{E\Delta\delta_{n}}{L a} = \left[\frac{-3516 + 36.28}{2.708} \right] = -1312 \frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}}$$

$$\pm \frac{E\Delta\delta_{n}}{L a} = +1312 * 2 = 2624 \frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}} \text{ (Se cambia de signo)}$$

$$\frac{E\theta_{P}}{L^{2}} = -60.91 - 1312 = -1373 \frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}}$$

$$\frac{E\theta_{P}}{L} = 2624 \frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}}$$

En la primera línea de la tabla se muestran los resultados de dividir la diferencia de los esfuerzos de bordes de cada lámina entre la altura de la viga del extremo vertical y entre la proyección horizontal para las otras láminas. Los resultados para el extremo o borde superior de una lámina se registran con el signo cambiado. La segunda línea se obtiene de la primera línea, al multiplicar por 15 la viga de extremo o sumando las anotaciones para cada lamina y multiplicando por 15/Kn. La tercera línea se obtiene al restar las anotaciones sucesivas en la segunda línea y dividirlas entre la proyección horizontal de la lamina, las anotaciones en el lado izquierdo en cada borde se escriben con el signo cambiado. La cuarta línea es la suma del registro en la tercera línea para cada borde.

Paso 8:

Calcular el cambio en el ángulo, en el punto medio del claro en cada borde, esto puede determinarse como:

$$\frac{E}{\hat{L}}\theta_{p} = -\frac{\delta_{n-1} - \delta_{n}}{a_{n}} + \frac{\delta_{n} - \delta_{n+1}}{a_{n+1}}, en\frac{\frac{Kg}{cm^{2}}}{m^{2}}$$

Paso 9:

Para corregir las rotaciones de los bordes con carga simétrica, se aplica un momento desconocido de $+1000 m_n sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, enKg-m Positivo en el sentido de las manecillas del

reloj, en el borde n de la lámina n. se aplica $-1000m_n sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, enKg-mEn la contraparte, es decir, en el extremo n' de la lámina n'.

Se aplica también $-1000 m_n sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, enKg-m en la lamina (n+1) en el borde n y

$$+1000 m_n sen \left(\frac{\pi x}{L}\right), en Kg - m$$
, en su contraparte.

X: Distancia a lo largo de un borde desde el centro de la lámina, se supone que la función seno hace variar la carga en sentido longitudinal más o menos en la misma forma que las deflexiones. En el punto medio de la luz, el valor absoluto de estos momentos es $1000m_n$ (sen $(\pi/2)$) = $1000m_n$, Con X = L/2 y sen $(\pi/2)$ = $1000m_n$

La franja transversal de un metro de ancho en el punto medio de la luz, articulado en los apoyos, estará sometidos a momentos de $1000m_n$ en los apoyos. Las rotaciones en las losas causadas por los momentos viene dada por:

$$\begin{split} &\frac{E}{L^{2}}\theta_{n-1}'' = \frac{166.7h_{n}m_{n}}{L^{2}th^{3}} \\ &\frac{E}{L}\theta_{n}'' = \frac{333.3m_{n}}{L} \left[\frac{h_{n}}{t_{n}^{3}} + \frac{h_{n+1}}{t_{n+1}^{3}} \right] \\ &\frac{E}{L^{2}}\theta_{n+1}'' = \frac{166.7h_{n+1}m_{n}}{L^{2}t_{n+1}^{3}} \end{split}$$

Debido a que el borde 1 en la práctica, esta articulado en la estructura real, los momentos de corrección solo necesitan aplicación en los bordes 2 y 3. Los cambios en los ángulos en las losas debido a estos momentos solo es necesario calcularlos en los bordes, los resultados expresan en términos de m₂ y m₃ (momento en el borde 2 y 3). Utilice las siguiente formulas para calcular las reacciones de la losa y las cargas en las laminas debido a los momentos desconocidos.

$$R_{n-1} = -\frac{1000 m_n}{a_n}$$

$$R_{n} = 1000 m_{n} \left[\frac{1}{a_{n}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right]$$

$$R_{n+1} = -\frac{1000 m_{n}}{a_{n+1}}$$

Las cargas de las láminas se calculan como:

$$p_n = \frac{1}{\cos\phi_1} \left[\frac{R_n}{K_n} - \frac{R_{n-1}}{K_{n-1}} \right]$$

Los resultados se muestran a continuación (tabla 14)

Tabla 14 REACCIONES EN LAS LAMINAS

Unidades	Cálculos	Lam	ina 1	Lam	ina 2	Lamina 3	
		Borde 0	Borde 1	Borde 1	Borde 2	Borde 2	Borde 3
Kg/cm ² /m ²	Eθ"/ L ² para m2				1086	3m2	5432m2
Kg/cm ² /m ²	Eθ"/ L ² para m3				271	7m3	10863m3
Kg	R para m2		"- 419	,8m2"	789,	5m2	"-738,6m2"
Kg	R para m3				"-369	,3m3"	738,6m3
Radianes	K				0,4	-01	0,3526
Kg	R/K para m2				1968	,8m2	"-2094,7m2
Kg	R/K para m3				"-920	,9m3	2094,2m3
Kg/m	P para m2	" - 419	,8m2"	2273	,4m2	"-4254m2	
Kg/m	P para m3	0		"-1063	3,4m3"	300	61,6m3
Kg-m	M para m2	"17014m2"		9214	12m2	"-172414m2"	
Kg-m	M para m3	()	"-43099m3"		124086m3	

Algunos cálculos para tablas son:

$$\frac{E\theta''}{L^2} = \frac{333.3 \, m_2}{20^2} \left[\frac{2.75}{0.075^3} + \frac{2.75}{0.075^3} \right] = +10863 \, m_2, \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\frac{1}{2}10863 = 5431.5 m_2 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\frac{E\theta''}{L^2} = \frac{166.7 m_3}{20^2} \left[\frac{2.75}{0.075^3} \right] = +2717 m_3, \frac{Kg}{cm^2}$$

$$R = -\frac{-1000 m_2}{2.382} = -419.8 m_2 Kg$$

$$R = +1000 \, m_2 \left[\frac{1}{2.382} + \frac{1}{2.705} \right] = +789.5 \, m_2, \, Kg$$

$$R = 1000 \, m_2 = 738.6 \, m_2 \, Kg$$

$$R = -\frac{1000 m_2}{2.708 * 2} = -738.6 m_2, Kg$$

$$R = -\frac{1000m_3}{2.708} = -369.3m_3, Kg$$

$$R = +1000 m_3 \left(\frac{1}{2.708}\right) * 2 = 738.6 m_3, Kg$$

$$\frac{R}{K} = \frac{789.5 \, m_2}{0.401} = 1968.8 \, m_2, Kg$$

$$\frac{R}{K} = -\frac{369.3}{0.401} = -920.9 \, m_{3} \, Kg$$

$$\frac{R}{K} = -\frac{738.6 \, m_2}{0.3526} = -2094.7 \, m_2, \, Kg$$

$$\frac{R}{K} = \frac{738.6 \, m_3}{0.3526} = 2094.7 \, m_3, Kg$$

$$p = R = -419.8 \, m_2, \frac{Kg}{m}$$

$$p = \frac{1}{\cos 30^{\circ}} *1968.8 \, m_2 = 2273.4 \, m_2, \frac{Kg}{m}$$

$$p = \frac{1}{\cos 10^{\circ}} * (-2094.7 m_2) * 2 = -4254 m_2, \frac{Kg}{m}$$

$$p = \frac{1}{\cos 30^{\circ}} * (-920.9 m_3) = -1063.4 m_3, \frac{Kg}{m}$$

$$p = \frac{1}{\cos 10^{\circ}} * 2094.7 \, m_3 * 2 = 4254 \, m_3, \frac{Kg}{m}$$

Paso 10:

Se supone ahora que la carga en cada lamina es $sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ se calcula el momento de flexión máxima en el punto medio de la luz, el cual se puede demostrar que para una viga es $M = \frac{pL^2}{\pi^2} = \frac{p*20^2}{\pi^2} = 40.53 \, p, Kg - m$

$$M = -40.53 * 419.8 m_2 = 17014 m_2, Kg - m$$

Se calculan los momentos y se tabulan al final de la tabla 14.

$$M = 40.53 * 2273 m_2 = 92142 m_2, Kg - m$$

$$M = -40.53 * 4254 m_2 = -172414 m_2, Kg - m$$

$$M = -40.53 * 1063.4 m_3 = -43099 m_3, Kg - m$$

$$M = 40.53 * 3061.6 m_3 = 124086 m_3, Kg - m$$

Paso 11:

Usando f = 0.0006M/A*h (paso 5) se calculan los esfuerzos longitudinales de borde libre en el punto medio del claro. Por lo tanto y de manera similar al paso 6, se aplica una fuerza cortante para cada borde para igualar los esfuerzos, los esfuerzos ajustados se determinan mediante el método de Cross y se tabulan (tabla 15.a y 15.b).

Tabla 15.A - Esfuerzos en las láminas para m, desconocido

0	1	1		2	2		3	3
		0.495	0.505		0.5	0.5		
-40.51		+40.51	+97.57		-97.57	-182.61		+182.61
-14.12	—	+28.24	28.82	\setminus	-42.56	+42.56	—	-21.3
			+21.28		+14.41			
-5.27	-	+10.53	-10.75 ~		-7.21	+7.21		-3.6
			+3.6	>	+5.38			
-0.91	→	+1.82	-1.82 ~		-2.69	+2.69	—	-1.35
			+1.35		→ +0.91			
-0.33	-	+0.67	-0.68 ~		-0.46	+0.46		-0.23
			+0.23 ▲		+0.34			
-0.06	•	+0.11	-0.12		-0.17	+0.17		-0.09
-61.2		+81.88	+81.88		-129.62	-129.62	·	+156.04
m_2		m_2	m_2		m_2	m_2		m_2

Tabla 15.B - Esfuerzos en las láminas para m desconocido

0	1	1		2	2		3	3
		0.495	0.505		0.5	0.5		
0		0	-45.65		+45.65	+131.42		-131.42
+11.13	•	-22.6	+23.05 ~		+42.89	-42.89		+21.44
			-21.11		→ -11.53			
+5.31	•	-10.61	+10.83 ~		+5.77	-5.77	—	+2.88
			- 2.89 ▲		→ -5.31			
+0.72	-	-1.44	+1.46		+2.65	-2.65	-	+1.33
			-1.33		→ -0.73			
+0.33	-	-0.66	+0.67		+0.37	-0.37	——	+0.18
			- 0.19		-0.33			
+0.05		-0.09	+0.1		+0.17	-0.17		+0.08
+17.71	-	-35.39	-35.39		+79.6	+79.6	-	-105.51
m_3		m_3	m_3		m_3	m_3		m_3

f para m_{2:}

$$\begin{split} f_{borde1} &= +0.0006*17014 m_2 / ~(0.21*1.2) = +~40.51 Kg/cm^2 ~de~la~lamina~1 \\ f_{borde2} &= +0.0006*92124 m_2 / ~(0.206*2.75) = -~97.57 Kg/cm^2 ~de~la~lamina~2 \\ f_{borde3} &= +0.0006*172414 m_2 / (0.206*2.75) = +~182.61 Kg/cm^2 ~de~la~lamina~3 \end{split}$$

f para m_{3:}

$$\begin{split} f_{borde1} &= 0 \\ f_{borde2} &= +0.0006*43099 m_3 / \ (0.206*2.75) = +45.65 Kg/cm^2 \ de \ la \ lamina \ 2 \\ f_{borde3} &= +0.0006*124086 m_2 / \ (0.206*2.75) = -131.42 Kg/cm^2 \ de \ la \ lamina \ 3 \end{split}$$

Paso 12:

Se calculan la componente vertical de las deflexiones en los bordes con la ecuación

$$\frac{E}{L}\delta_{n} = \frac{144}{\pi^{2}K_{n}} \left(\frac{f_{n-1} - f_{n}}{a_{n}} - \frac{f_{n} - f_{n+1}}{a_{n+1}} \right)$$

Y para una lamina vertical a partir de

$$\frac{E}{L^{2}} \delta_{n} = \frac{144 (f_{n-1} - f_{n})}{\pi^{2} h_{n}}$$

El cálculo es similar al efectuado en el paso 7 y se presentan en la (tabla 16)

Tabla 16

COMPONENTE VERTICAL DE LAS DEFLEXIONES

Unidades	Propiedades	Lamina 1		Lamina 2		Lamii	na 3
		Borde					
		0	Borde 1	Borde 1	Borde 2	Borde 2	Borde 3
	±∆f/an ,para m2		119,17m2	"-88,79m2"	105,48m2	"-105,48m2"	105,48m2
	·						"-
Kg/cm ² /m	Eδ/L^2, para m2		1739	9m2	60	7m2	8729m2"
Kg/cm ² /m2	±ΕΔδ/L^2a ,para m2				"-475m2"	"-3447m2"	6895m2
Kg/cm ² /m2	Eθ/L^2,para m2				"-3922m2"		6895m2
Kg/cm²/m	±∆f/an ,para m3		"-44,25m3"	48,27m3	"-68,36m3"	68,36m3	68,36m3
Kg/cm ² /m	Eδ/L²,para m3		"-645,	61m3"	730,	96m3	5529m3
							"-
Kg/cm ² /m ²	±E∆δ/L^2a ,para m3				587m3	1771m3	3543m3"
							"-
Kg/cm²/m²	Eθ/L²,para m3				234	19m3	3543m3"

Paso 13:

En las dos ultimas filas de la tabla 16 se determina el cambio θ' en el ángulo en el punto medio de la luz en cada borde (calculo de igual forma que el paso 8).

Paso 14:

En cada borde se iguala a cero las sumas de los cambios en los ángulos para establecer una ecuación.

Primero se divide entre E/L^2 , $\theta_p + \theta'' = \sum \theta' = 0$

Para el borde 2:

-
$$1373 + 10863m_2 + 2717m_3 - 3922m_2 + 2349m_3 = 0$$
, es decir $6941m_2 + 5066m_3 = 1373$ (1)

Para el borde 3:

$$+2624 +5432m_2 + 10863m_3 +6895m_2 - 3543m_3 = 0$$
 es decir $12327m_2 + 7320m_3 = -2624$ (2)

Se resuelve el sistema de 2 * 2 y se obtiene:

$$m_2 = -2 y m_3 = +3.02$$

Paso 15:

Determinar las reacciones, cargas, esfuerzos y deflexiones reales al sustituir m₂ y m₃ con los valores del paso 14 así:

Esfuerzo longitudinal final en el borde (0)

$$F_i f^0 = 24.33 - 61.25(-2.0) + 17.71(3.02) = +200.21 \text{Kg/cm}^2$$

Esfuerzo longitudinal final en el borde (1)

$$F_i f^1 = 33.03 + 81.88 (-2.0) - 35.39 (3.02) = -237.6 \text{Kg/cm}^2$$

Esfuerzo longitudinal final en el borde (2)

$$F_i f^2 = -67.75 - 129.62(-2.0) + 79.60(3.02) = +430.3 \text{Kg/cm}^2$$

Esfuerzo longitudinal final en el borde (3)

$$F_i f^3 = 44.17 + 156.04 (-2.0) - 105.51(3.02) = -586.6 \text{Kg/cm}^2$$

Estos esfuerzos altos en compresión indican que no se selecciono adecuadamente el espesor de las placas, la cual ha debido ser de t = 100mm para todas las laminas.

Paso 16:

Calcule los esfuerzos cortantes con la ecuación:

$$T_{n} = \left[T_{n-1} - \frac{f_{n-1} + f_{n}}{2} A_{n} \right] * 1000 = -5000 (f_{n-1} + f_{n}) A_{n}$$

En donde T $_{n-1} = 0$ para este caso.

Por tanto, los esfuerzos cortantes en los bordes se pueden obtener de forma sucesiva ya que se conocen los esfuerzos f para una lámina plegada con carga uniforme, el esfuerzo cortante S en cualquier punto en un borde n es aproximadamente:

$$S = \frac{2T \max}{3Lt} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right]$$

El esfuerzo cortante máximo ocurre en los extremos o diafragmas, con X=0, X=L.

$$S \max = \frac{T \max}{3Lt} * \frac{1}{1000}, en \frac{Kg}{cm^{2}},$$

Lyten m

El esfuerzo cortante calculado en el punto medio de la profundidad de una placa (centro de la lámina), aunque no siempre sea un valor máximo se calcula como:

$$V\dot{n} = \left[\frac{3p_n L}{2An} + \frac{S_{n-1} + S_n}{2} \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{X}{L} \right)$$

Es máximo en los diafragmas cuando X=0, X=L

$$V\max = \left\lceil \frac{0.75 \, p_n L}{An} + \frac{S_{n-1} + S_n}{4} \right\rceil * \frac{1}{10000} = \frac{0.75 \, p_n L}{10000 \, An} + \frac{S_{n-1} + S_n}{40000} = V_1 + V_2, \frac{kg}{cm^2}$$

En donde p_n= cargas resultantes en las laminas en Kg/m.

Para la lámina 1:

$$p_n = 686 - 419.8 (-2) + 0 = +1526 \text{Kg/m}$$

Para la lámina 2:

$$p_n = 3277 + 2273.4 (-2) - 1063.4 (3.02) = -4481 \text{Kg/m}$$

Para la lámina 3:

$$Pn = -387 - 4254 (-2) + 3061.6(3.02) = +17367 \text{Kg/m}$$

En la (tabla 17) se muestran los resultados calculados (L en metros)

Tabla 17

ESFUERZOS CORTANTES

Esfuerzo	Lamina 1		Lamina 2		Lam	ina 3
	Borde 0	Borde 1	Borde 1	Borde 2	Borde 2	Borde 3
"-5000(fn-1+fn)An,Kgf"		39259		-198481		-160989
cortante en el borde en el punto						
medio,Kgf(centro de placa	0	392	259	-159222		0
cortante en el borde,x=0, Kg/cm ²	0	0,37	-0,87	-3,54	3,54	0
V ₁ ,Kg/cm ²	10),9	-32,63		126,45	
V ₂ ,Kg/cm ²	0	0,09	-0,22	-0,89	0,89	0
V _{max} , Kg/cm²,en x=0 y en el punto medio de las laminas	1	1	-33	,74	127	7,34

Algunos de los valores de la tabla 18 se calcularon así:

```
V = -5000*(200.21 - 237.6)*0.21 = +39259 \text{ Kg}.
V = -5000*(-237.6+430.3)*0.206 = -198481Kg.
V = -5000*(430.3 - 586.6)*0.206 = -160989 Kg
V=0 + 39259 = 39259Kg.
V = -198481 + 39259 = -159222 \text{Kg}.
V=160989 - 160989 = 0.
v = +39259/(30000*20*0.175) = +0.37 \text{ Kg/cm}^2
v = +39259/(30000*20*0.075) = +0.87 \text{ Kg/cm}^2
v = -159222/(30000*20*0.75) = -3.54 \text{ Kg/cm}^2
v_1 = 0.75*1526*20/(10000*0.21)=10.9 \text{ Kg/cm}^2
v_1 = -0.75*4481*20/(10000*0.206) = -32.63 \text{ Kg/cm}^2
v_1 = +0.75*17367*20/(10000*0.206) = +126.45 \text{ Kg/cm}^2 (Cortante alto).
v_2= - 0.37/4= - 0.09 Kg/cm<sup>2</sup>
v_2= - 0.87/4= - 0.22 Kg/cm<sup>2</sup>
v_2 = -3.54/4 = -0.89 \text{ Kg/cm}^2
v_{\text{max}} = 10.9 + 0.09 = 11 \text{ Kg/cm}^2
v_{\text{max}}=-32.63-0.22-0.89=-33.74 Kg/cm<sup>2</sup>
v_{\text{max}} = 126.45 + 0.89 = 127.34 \text{ Kg/cm}^2
```

Recuerde que:

El gran valor del Cortante en la lamina 3, nos da a entender que el dimensionamiento de las placas es escasa y que hubiera sido mas adecuada usar 1 = 100mm en todas las placas. El calculo con t = 100mm se deja al lector como ejercicio para que compruebe como disminuye el cortante y los esfuerzos al aumentar el espesor de las laminas.

Paso 17:

Se calculan los esfuerzos principales con la expresión:

$$fp = \frac{1}{2} fx \pm \sqrt{V_{\text{max}}^2 + \left(\frac{fx}{2}\right)^2}$$

Donde:

f_x: Esfuerzo longitudinal normal (calculado en el paso 15).

 v_{max} : Esfuerzos de corte (tabla 17), en el punto medio de cada una de las laminas.

Los esfuerzos se encuentran tabulados a continuación (tabla18)

lamina	Esfuerzo principal
1	-281.1
2	262
3	-34.85

El acero se calcula para el esfuerzo principal mas critico:

Usar barras N° 5
$$A_S = \frac{281.1 * 7.5 * 100}{4200} = 46.78 cm^2$$

Es decir, barras Nº 5@40mm en toda la cubierta en direcciones ortogonales en todas las placas.

El refuerzo mínimo por retracción del fraguado y temperatura es según C.7.12 de la NSR 98 para barras corrugadas con fy mayor de 420 Mpa y mallas electro soldadas la cuantía mínima es de 0.0018:

As=0.0018*100*7.5=1.35 cm^2 , recomendamos una malla electrosoldada de concremalla con As=1.89 $\frac{cm^2}{m}$.

El recubrimiento según C.7.7.1 de la NSR 98 es de15mm para barras N°5.

Como el esfuerzo -281.1 Kg/cm²Es mayor que el admisible en el concreto 210 Kg/cm² Se debe colocar refuerzo inclinado cerca de los bordes en una franja no menor a 12", con barras N°5@40mm.

Para el diseño de los elementos de apoyo se toma el cortante correspondiente a la lámina 1: P=11 Kg/cm²

Los momentos de diseño son los que ocurren en la lámina 1 que es adyacente a los elementos de apoyo:

M=17014(-2) Kg-m + 34300 Kg-m = 272 Kg-m

Se considera que los elementos de soporte son infinitamente rígidos en su propio plano y su diseño corresponde a una columna con carga axial y momento, observe que el momento flector es mucho mayor que la carga axial, por tanto, debe tener especial cuidado con los efectos del momento en cuanto al pandeo en la columna (figura 43)

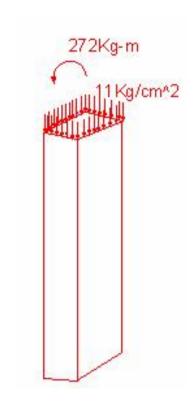
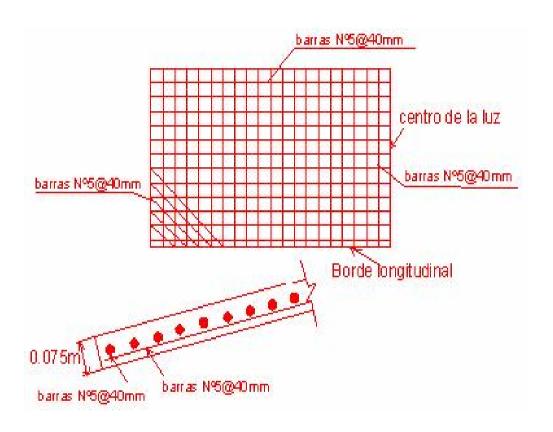
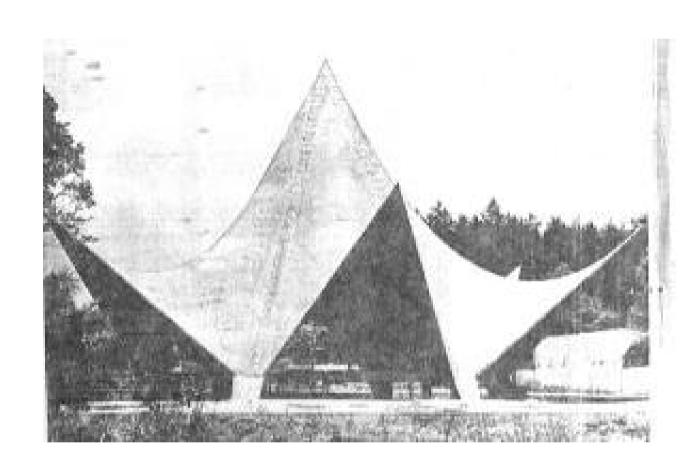


Figura 43. Elemento de apoyo

La (figura 42) muestra la disposición final del acero.





CAPITULO 5
RECOMENDACIONES Y COMENTARIOS FINALES
SOBRE CASCARONES EN CONCRETO.

5. RECOMENDACIONES Y COMENTARIOS FINALES SOBRE CASCARONES EN CONCRETO.

Los siguientes comentarios están basados en la ACI y la NSR 98

A menos que puedan sustentarse lo contrario los esfuerzos en el concreto y en el acero, así como los factores de carga, deben ser especificados en la NSR 98 y en su defecto en el código de edificios ACI –318 y la resistencia mínima del concreto debe ser 3000 Psi.

El espesor de la cáscara no siempre esta gobernado por requisitos de resistencia, si no también por la deformación del miembro de borde, por estabilidad y por el recubrimiento de acero de refuerzo; las concentraciones de esfuerzos debido a cambios abruptos de sección del cascarón deberán considerarse y cuando sea necesario variarse del espesor del mismo.

Los esfuerzos en el acero de refuerzo, pueden suponerse que actúan independientemente de las deformaciones del concreto y cuando los esfuerzos de tensión varían apreciablemente en magnitud sobre el cascarón, tal y como ocurre en los cilindros, el refuerzo capaz de resistir la tensión total pueden concentrarse en la región de los máximos esfuerzos de tensión, cuando se haga esto, el porcentaje de refuerzo para control de grietas en un ancho de 12" de la cáscara no debe ser inferior a 0.0035 a través de la zona de tensión.

Los esfuerzos principales de tensión deberán resistirse completamente por el acero de refuerzo, que se supone actúan en la superficie media del cascarón, pueden colocarse tanto en la dirección general de las líneas de esfuerzos principales (paralelo a las líneas de los esfuerzos principales de tensión) o en dos o tres direcciones, en la regiones de alta tensión es deseable la colocación del refuerzo en dirección general de los esfuerzos principales. El refuerzo puede considerarse paralelo a las líneas de los esfuerzos principales cuando su dirección no se desvía de la dirección de los esfuerzos principales en más de 15°. En áreas donde el esfuerzo en el refuerzo sea menor que el esfuerzo admisible se admite que halla una desviación mayor a 15° y el refuerzo se considera paralelo a la dirección de los esfuerzos admisibles, por cada grado adicional de desviación después de 15° debe considerarse una reducción del esfuerzo admisible de 5% como compensación y cuando se coloque refuerzo en mas de una dirección este deberá resistir las componentes de la fuerza principal de tensión en cada dirección.

En aquellas áreas en donde el esfuerzo principal de tensión calculado en el concreto exceda los 21 Mpa, por lo menos una capa de refuerzo debe ser paralela a los esfuerzos principales de tensión, a menos que el diseñador pueda demostrar que cualquier desviación de refuerzo desde las líneas paralelas a las líneas de los esfuerzos principales admisibles, (debido a las características geométricas del cascarón) solo desarrollaran grietas locales e insignificantes.

En las zonas de los esfuerzos principales de tensión calculados, en Psi, el espaciamiento de refuerzo no debe exceder tres veces el espesor del cascarón, además, el refuerzo no debe espaciarse mas de cinco veces el espesor del cascarón ni mas de 18" (457mm). Es importante proporcionar un refuerzo mínimo a un cuando el análisis no lo requiera. El porcentaje de refuerzo en 12" de ancho del cascarón no deberá exceder el 6% si F'y = 20000 Psi, 5% si F'y =25000 Psi o 4% si F'y = 30000 Psi. Cuando los valores anteriores sean aceptables, si la desviación del refuerzo de las líneas de esfuerzos principales es mayor que 10°, el máximo porcentaje deberá ser la mitad de los valores dados.

Los empalmes de refuerzo principal a tensión deberán mantenerse en un mínimo práctico, deberán alternarse con no más de la tercera parte de las barras empalmadas en una sección. Las barras deberán traslaparse solo en una misma capa, el traslapo mínimo debe ser de 30 diámetros con un mínimo de 457mm. Para el refuerzo mínimo el traslapo puede ser de 12" (305mm), para mallas soldadas deberá ser de 8"(203mm) o una cuadricula (el mas grande).

Los esfuerzos calculados para el acero de refuerzo en la conexión de la cáscara y el borde, deberán desarrollarse mediante el anclaje dentro o cerca del ancho del miembro, el refuerzo que resista momentos de flexión deberá proporcionarse y suministrarse de la manera convencional con una consideración apropiada para las fuerzas directas.

El recubrimiento del acero, deberá ser por lo menos ½" (13mm) para varillas 3/8"si es concreto prefabricado, de 3/8"(10mm) para mallas soldadas, siempre que la superficie del concreto este protegida de la humedad y no este en contacto con el suelo, en ningún caso el recubrimiento deberá ser menor que el diámetro de la barra, si se requiere un mayor recubrimiento como protección contra el fuego, este recubrimiento se debe aplicar únicamente a refuerzo principal por tensión y por momentos cuya fluencia colapsarían la estructura

El tamaño máximo del agregado, no deberá exceder la mitad del espesor del cascarón, la distancia entre barras de refuerzo y una y media veces el recubrimiento. Cuando se requieran formaletas en las dos caras el tamaño máximo del agregado no debe exceder ¼ de la distancia entre las formaletas, ni el recubrimiento sobre el refuerzo.

La remoción de cimbras del cascarón delgado de concreto, así como su secuencia son una parte integrante del diseño y por lo tanto deberán ser especificados o aprobados por el ingeniero, la resistencia mínima del concreto basado en cilindros de campo, durante el tiempo del descimbrado y reapuntalamiento deberá ser objeto de diseño por parte del ingeniero. El andamiajes y las formaletas así como el concreto y el refuerzo son los principales problemas en la construcción, es importante la reutilización de la formaleta para reducir los costos por metro cuadrado, las formaletas deben ser construida cuidadosamente considerando los efectos estructurales de pequeñas imperfecciones pues la estabilidad del cascarón depende de su radio de curvatura.

El concreto y el refuerzo influyen en la construcción, ya que mas sencillo el refuerzo es mas sencilla la construcción, el problema del concreto surge cuando se requiere una mezcla espesa para lograr un flujo plástico y una contracción pequeña o cuando se requiere una mezcla ligera que permite un rápido vaciado del concreto. Un cascarón debe ser tan delgado como sea posible para que se introduzcan esfuerzos solo en su plano, se usa generalmente las capas de refuerzo y un espesor mínimo de 3". Los cascarones delgados son diseñados por apariencia y consecuentemente no son recomendables para soportar grandes cargas, también son susceptible al agrietamiento por contracción si el curado del concreto no se hace correctamente, en climas cálidos es mejor usar retardadores y usar el curado por goteo y de costales húmedos.

El vaciado del concreto se debe comenzar en la parte inferior y proceder hacia arriba, tenga en cuenta que la vibración del concreto en secciones delgadas es difícil, se aconseja vibrar el refuerzo o la formaleta (si son rígidas) o usar regletas vibradoras. La pendiente del cascarón debe ser menor de 45° para no usar formaletas superiores, que aumenta la dificultad de eliminar las curvas. Cuando la pendiente es aproximadamente 30° puede fundirse el concreto con un asentamiento de 1" a 3" con las tolerancias razonables usuales sin tener que usar formaletas superiores. El método de remoción de cimbras debe evitar cualquier soporte temporal o reacciones concentradas no deseables en el cascarón, se aconseja descimbrar en los puntos de máxima deflexión y progresar hacia los puntos de menor deflexión, descimbrando los elementos de borde simultáneamente a los del cascarón adjunto no olvidando comprobar las deflexiones durante el descimbrado.

BIBLIOGRAFÍA

TEXTOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

- 1. Ugural, A. y Fenster, S. Advanced Strenght and Aplied Elasticity, tercera edición, editorial Prentice Hall, 1995.
- 2. Seely, J.B. y Smith, J.O. Advanced Mechanics of Materials, segunda edición, editorial John Willey & Sons Inc, 1952.
- **3.** Den Hartog, J.P. Advanced Strenght of Materials, primera edicion, editorial Dover, 1952.
- **4.** Timoshenko, S. Resistencia de Materiales, volumen∏, segunda edición, editorial Espasa Calpe, 1955.
- **5.** Gere, J.M. y Timoshenko, S. Mecánica de Materiales, segunda edición, editorial Iberoamericana, 1986.
- **6.** Popov, E.P. Introducción a la Mecánica de Sólidos, primera edición, editorial Limusa, 1986.
- 7. Feodosiev, V.I. Resistencia de Materiales, tercera edición, editorial Mir, 1985.

TEXTOS DE HORMIGÓN, ANÁLISIS Y DISEÑO

- **8.** Gonzáles Cuevas. Robles. Aspectos fundamentales del concreto reforzado, segunda edición, editorial Limusa, Noriega Editores, 1995.
- **9.**Billinton, D. P. Thin Shell Concrete Structures, segunda edicion, editorial Mc Graw Hill, 1982.
- **10.**Gaylord, E.H, Gaylord, C.N, y Stallmeyer, J.E. Structural Engineering Handbook, cuarta edicion, editorial Mc Graw Hill, 1997.
 - 11. Merritt, F. Manual del Ingeniero Civil, primera edición, editorial Mc Graw Hill, 1984.
- 12. Margarit, J, y Buxade, C .Las Mallas Espaciales en Arquitectura, primera edición, editorial Gustabo Gili, 1972.
- 13. Belluzi, O. Ciencia de la Construcción, volúmenes 1, 2, 3 y 4, primera edición, editorial Aguilar, 1957.
- **14.** Gaylor E. H, Gaylor C. N., y Robinsón J, Estructuras de Concreto, manual Practico, editorial Mc Graw Hill,1993.
- **15.** Portland Cement Association. Circular Concrete Tanks Without Prestressing. Concrete Informatios of Portland cement Association, 1960.
- **16.** American Concrete Institute. Design and Construction of Circular Prestressed Concrete Structures, Journal of ACI, reporte del comite334,N° 9, volumen 67, septiembre de 1970.

TEXTOS SOBRE CASCARONES

- **17.** Timoshenko, S. y Woinoski-Krieger, S. Theory of Plates and Shells, segunda edicion, editorial Mc Graw Hill,1959.
- **17.** Goldenveizer, A. L. Teoría de los Cascarones Elásticos Delgados, primera edición, editorial Pergamon/Cecsa, 1961.
- **18.** Gray, W. S. Reinforced concrete Reservoirs and Tank, cuarta edicion, editorial Concrete Publications Limited, 1960.
- **19**. G. Winter. y Arthur Nilson. Proyecto de Estructuras de Hormigón, octava edición, editorial Reverte, Bogota 1980.

NORMAS Y CODIGOS DE CONSTRUCCION.

- **20.** Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente. Ley 400 de 1997, Decreto33 de 1998. Asociación de Ingeniería Sísmica.
- **21.** ACI 318-95, Building Code Requirements for Reinforced Concrete. American Concrete Institute.
- **22.** Concrete Shell Structures. Practice and Comentary, ACI 334.IR-92, American Concrete Institute.
- **23.** Reinforced Concrete Cooling Tower Shell. Practice and Commentary, ACI 334.IR-91, American Concrete Institute.
- **24.** Standar Practice for the Design and Construction of Reinforced Concrete Chimeneys, ACI 307-95, American Concrete Institute.
- **25.** Environmental Engineering Concrete Structures, ACI 350R-89, American Concrete Institute.