

**DETERMINACION DE LA ACELERACION GRAVITACIONAL MEDIANTE UN
PENDULO FISICO TIPO KATER**

INFORME FINAL DE LA MONOGRAFIA

PROPONENTE:

PEDRO J. GOMEZ MONGUA

Estudiante de Lic. Matemáticas

DIRECTOR:

CARLOS CABRA CABRA

Físico Universidad Nacional de Colombia

Especialista: Enseñanza de la Física

Profesor Asociado Universidad de Sucre.

UNIVERSIDAD DE SUCRE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Sincelejo, Agosto de 2003

DEDICATORIA

A Dios y a mis padres por su incondicional apoyo, por no pedir nada a cambio, por esperar siempre lo mejor de mí en todos los momentos difíciles de mi vida.

A mis hermanos, esposa e hija por la constante motivación a la culminación de mis estudios

A mi hermano Luis, que con su constante accesoria hizo posible la culminación del trabajo

DETERMINACION DE LA ACELERACION GRAVITACIONAL MEDIANTE UN PENDULO FISICO
DE TIPO KATER

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	5
1.0 OBJETIVOS	6
1.1 Objetivo General	6
1.2 Objetivos Específicos	6
2 REVISION DE LITERATURA	7
2.1 Generalidades	7
2.1.1 Ley de Gravitación de Newton	9
2.1.2 Campo Gravitacional	10
2.1.3 La Gravedad Terrestre	10
2.1.4 La Aceleración Gravitacional	11
2.1.4.1 Efectos de la Forma de la Tierra y de su Rotación cotidiana sobre la Aceleración Gravitacional	13
2.1.4.2 Aceleración Gravitacional cerca de la superficie de la Tierra o cerca de ella	13
2.1.4.3 Aceleración Gravitacional en el interior de la Tierra	15
2.1.5 Vibraciones Mecánicas	16
2.1.6.1 Péndulos Matemático .	17
2.1.6.2 Péndulo Compuesto	19
2.1.6.3 Péndulo Físico de Kater	20
2.1.7 Principio de Interconvertibilidad de Huygen	21

2.1.8	Métodos de Cálculo de la Aceleración Gravitacional	21
2.1.9	Métodos para la medida de la Aceleración Gravitacional	22
2.1.9.1	Péndulo Físico	22
2.1.9.2	Experimento de caída libre	23
2.1.9.3	Equipos de medida de la aceleración gravitacional	24
3.0	METODOLOGIA	24
3.1	Diseño del Péndulo Físico tipo Kater	24
3.1.1	Modelo	24
3.1.3	Dimensiones	24
3.1.2	Cálculo de la posición X de la masa pequeña que permite igualdad de periodos en los dos ejes de oscilación	26
3.3	Determinación de la Ecuación Diferencial del Movimiento del Péndulo.	30
4.	DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN GRAVITACIONAL	34
4.1	Determinación teórica de la aceleración gravitacional	34
4.2	Determinación experimental	35
4.2.1	Cálculo de la Incertidumbre en la determinación de g	35
4.4.2	Cálculo del valor de g más probable	35
4.5	Cálculo del amortiguamiento	36
5.0	ANALISIS DE RESULTADOS	40
6.0	CONCLUSIONES	41
	ANEXOS	42
	BIBLIOGRAFÍA	47

INTRODUCCION

El documento que se desarrolla a continuación corresponde al informe final del trabajo de monografía: **Determinación de la Aceleración Gravitacional Mediante un Péndulo Físico tipo Kater en Sincelejo**. Contiene algunas generalidades sobre la aceleración gravitacional tratadas por científicos reconocidos, en diferentes épocas, observándose el progreso del concepto de campo gravitacional y las teorías que tratan de explicar el origen del fenómeno a lo largo de la historia. Se analizan los efectos de la forma de la tierra y su movimiento de rotación sobre la aceleración gravitacional, para definir la gravedad ficticia y la "verdadera"

También se deducen las ecuaciones correspondientes a los péndulos matemáticos y físicos, para concluir a partir de la igualdad de los periodos, con la equivalencia entre un péndulo simple, cuya longitud esta en relacionada con el radio de giro del péndulo físico. También se demuestra el Principio de Interconvertibilidad de Huygens.

Con base en el principio de interconvertibilidad y la disponibilidad instrumental se diseña y construye un modelo de péndulo físico, tipo Kater. Seguidamente mediante análisis físico y experimentación se conforma la ecuación de movimiento del modelo construido, asumiendo que corresponde a una vibración con amortiguamiento débil.

Una vez caracterizado físicamente el péndulo se diseño un experimento destinado a la determinación de g , con base en la medida cuidadosa del periodo del péndulo y la expresión para el periodo del péndulo simple. Los resultados obtenidos se analizan y se enuncia el valor más probable de g , junto con su respectiva incertidumbre.

Finalmente se presentan las conclusiones deducidas del trabajo.

1. OBJETIVOS

1.1 Objetivo General: Determinar la aceleración gravitacional en Sincelejo mediante un péndulo físico tipo Kater.

1.2 Objetivos Específicos:

Diseñar y Construir un péndulo físico del tipo Kater

Desarrollar el método para la determinación de la aceleración gravitacional mediante el péndulo físico.

Determinar teóricamente y experimentalmente la aceleración gravitacional.

Valorar la magnitud de los errores inherentes al método.

2. REVISION DE LITERATURA

2.1. Generalidades

Tanto el universo como los fenómenos que en él suceden, están regidos por fuerzas, que pueden ser del tipo gravitacional, electromagnéticas o nuclear fuerte y débil, de estos tipos de fuerza se puede decir que las gravitacionales son de menor intensidad comparadas con las otras tres ; sin embargo es la fuerza gravitacional, que es inherente a la masa de los cuerpos, la responsable que los planetas permanezcan en sus orbitas y que los cuerpos sean atraídos hacia el centro de los planetas o estrellas.

De los tipos de fuerzas mencionados anteriormente, históricamente, la gravitacional fue la primera en ser estudiada, los primeros estudios datan de la época de **Aristóteles, Epicuro y Lucrecio** que argumentaban que de la gravedad se limitaba a la idea de que la velocidad de los cuerpos aumenta durante su caída, pero mientras **Aristóteles** sostenían que esta velocidad era proporcional a sus pesos, **Epicuro y Lucrecio** admitían que la velocidad de caída en el vacío sería la misma y que la causa de que ciertos cuerpos cayeran más lentamente era la resistencia del medio. Aunque las ideas de **Aristóteles, Epicuro y Lucrecio** están distantes de explicar la naturaleza de la gravedad, muestra que desde esa época el hombre tiene conciencia de la existencia de la gravedad, y basó en ella las nociones mismas de arriba y abajo. Mas tarde **GALILEO GALILEI** experimenta con bolas de distinta densidad, que deja caer de lo alto de la torre de Pisa, para comprobar que la velocidad de caída es independiente del peso de los cuerpos. Lo que verificó al ver que los cuerpos llegan simultáneamente al suelo.

ROBERT HOOKE profundizan un poco más en el tema proponiendo que todos los cuerpo poseen atracción gravitacional, **HOOKE** publica una obra en la que plantea: "Todos los

cuerpos poseen una atracción o gravitación con la que atraen a los demás cuerpos que están dentro de la esfera de su actividad o zona de influencia"

"Todos los cuerpos que marchan en movimiento rectilíneo continúan moviéndose en línea recta hasta que otra fuerza los obliga a describir un círculo, una elipse o una curva completa."

"Las fuerzas atractivas son tanto más potentes cuanto más cerca están del centro de los cuerpos en que actúan"

De aquí proviene la proporcionalidad según la cual estas fuerzas disminuyen al aumentar la distancia y aumentan cuando esta se reduce. Finalmente se puede decir que es con la publicación, por parte de Newton, de la teoría de la gravitación, cuando se reconoce el autentico papel de la gravedad como fuerza de la naturaleza. Para Newton la gravedad es una propiedad inherente a la masa, lo cual propone en su famosa Teoría de la Gravitación Universal. El punto de partida de esta teoría es la diferencia entre los conceptos, peso, masa y gravedad; según Newton todo cuerpo posee una determinada masa que es constante y la gravedad es una propiedad de esta. Newton no estableció una teoría de la gravitación en el sentido de explicar este fenómeno, reduciéndolo a otros. Pero en tiempos posteriores se formó el concepto de fuerzas a distancia, relacionando la gravitación con las fuerzas electromagnéticas.

Aunque con Newton se logra un gran avance en la teoría de la gravitación, todos los intentos por explicar la fuerza de gravedad fueron infructuosos, hasta que en 1916, Einstein estableció su Teoría de la Relatividad Generalizada, en la cual explica su idea o concepto de la gravedad. Para Einstein, la gravedad era una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, pues sustituía la idea de la gravedad, como fuerza, por un espacio geométrico curvo, ya que creía que la gravedad era una deformación del propio tejido espacio-tiempo producida por la presencia de cuerpos masivos los cuales al torcer el tejido del espacio circundante hacen que cuerpos masivos más pequeños sigan una trayectoria similar a la realizada por una bola de billar en la comba de una sábana estirada. Es decir los cuerpos se moverán por las líneas de menor resistencia deslizándose por las curvas del propio espacio-tiempo.

Einstein al explicar el fenómeno gravitacional como deformaciones del espacio circundante hace innecesario el empleo de las fuerzas a distancia, pues, para él la sola presencia de materia basta para curvar el espacio circundante a ella como podemos ver en la figura-1.

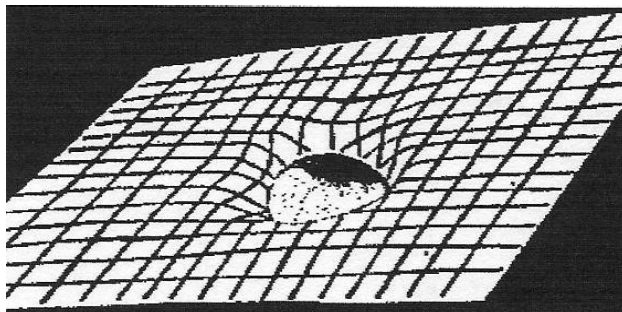


Figura.1 Curvatura del Espacio por presencia de un cuerpo de masa M , de acuerdo con la teoría de la gravedad de Einstein.

Otra explicación del fenómeno gravitacional se da a nivel cuántico, en el cual se considera que las partículas formadoras de la materia producen otras partículas portadoras de las fuerzas que interactúan entre ellas, para el caso de la fuerza de gravedad los responsables son los gravitones, los cuales al ser emitidos afectan no solo la velocidad de la partícula emisora, si no la partícula con la cual choca dando la sensación de la existencia de una fuerza entre las partículas emisoras y receptoras. Las diversas intensidades de la fuerza gravitacional es considerada una consecuencia del no cumplimiento del principio de exclusión de Pauli por parte de los gravitones, lo cual permite un intercambio sin límite del número de gravitones entre partículas. Los gravitones son considerados sin masa propia, lo cual permite que los efectos de la fuerza gravitatoria sean de largo alcance.

2.1.1 Ley de gravitación de newton

Esta fuerza, que es denominada fuerza de gravedad, es una característica que poseen los cuerpos debido a la masa o cantidad de materia de que están hechos. Isaac Newton estudio las características de esta fuerza y dedujo que todos los cuerpos masivos se atraían con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, lo cual expreso en forma matemática mediante la formula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

2.1

Donde G es una constante de proporcionalidad, m_1 y m_2 son las masas respectivas de los cuerpos y r es la separación entre ellos.

2.1.2 Campo gravitacional

Introduciremos ahora un concepto muy importante en física, el de campo gravitacional. Supongamos que tenemos una masa m y que la colocamos, en diferentes posiciones alrededor de otra masa M . En cada posición la masa m experimentará una fuerza debida a su interacción gravitacional con M y dada por la ecuación:

$$F = - G M m / r^2$$

2.2

Por supuesto, que en cada posición de m , la masa M experimenta una fuerza igual y opuesta. Sin embargo, por el momento solamente estamos interesados en lo que le pasa a m . Podemos decir que la masa M produce, en el espacio que la rodea, una situación física que llamamos campo gravitacional, y que se evidencia por la fuerza que M ejerce sobre otra masa vecina, tal como m , colocada en dicha región. Es decir la región del espacio afectada por la fuerza gravitacional producida por una masa se llama campo gravitacional.

Aún cuando las fuerzas gravitacionales son las mas débiles, cuando estrellas cuya masa es varias veces la de nuestro sol implosionan crean campos gravitacionales de tal intensidad que ni los rayos de luz escapan de ellos.

2.1.3 La gravedad terrestre

Los conceptos anteriores se traducen en la fuerza con la cual la tierra, como cuerpo que tiene una masa, atrae a cualquier otro cuerpo. En este caso, debe suponerse que la masa de la

tierra está concentrada en su centro. Como consecuencia y suponiendo que la tierra fuese esférica, cualquier objeto al nivel del mar sería atraído por nuestro planeta en proporción inversa al cuadrado del radio terrestre. La aceleración producida por la fuerza de atracción gravitacional de el planeta se denomina aceleración de la gravedad terrestre, o simplemente aceleración gravitacional terrestre.

2.1.4 La aceleración gravitacional

Como quiera que los cuerpos masivos producen campos gravitacionales, es de esperar que un objeto que sea colocado en presencia de un campo gravitacional experimente una fuerza de atracción, que según la segunda ley de Newton, le proporcionaría una aceleración, ésta aceleración se denomina aceleración gravitacional (g), que para el caso de la Tierra tiene un valor medio aproximado de 980.00 cm/seg^2 . Este valor promedio surge de los distintos valores de g medidos en diferentes puntos de la tierra, estas variaciones se deben a factores que afectan la gravedad terrestre como son la forma de la tierra, la rotación alrededor de su eje, la atracción gravitacional de la luna, variaciones de densidad debido a presencia de yacimientos minerales, la altura sobre el nivel del mar, etc.

En cuanto a las unidades utilizadas para la aceleración gravitacional tenemos en el sistema c.g.s se expresa en gals. Un gal = 1 cm/seg^2 . En trabajos de gravimetría se emplea la milésima parte de un gal como unidad de medida a la cual se denomina miligal; se obtiene entonces la siguiente equivalencia:

$$1 \text{ cm/seg}^2 = 1 \text{ gal} = 1000 \text{ miligals}$$

Y de acuerdo con lo anterior, en el ecuador terrestre y al nivel del mar, la aceleración medida debería ser igual a: 980.000 miligals

2.1.4.1. Efectos de la Forma de la Tierra y de su Rotación cotidiana sobre la aceleración gravitacional.

Como sabemos la aceleración gravitacional varía cuando nos desplazamos del ecuador a los polos debido a la forma elipsoidal de la superficie terrestre y que el efecto producido por una fuerza sobre un cuerpo puede ser afectado por la presencia de otras fuerzas en nuestro caso la fuerza centrífuga generada por la rotación terrestre. En esta sección se estudiará en que medida estos factores afectan la aceleración gravitacional.

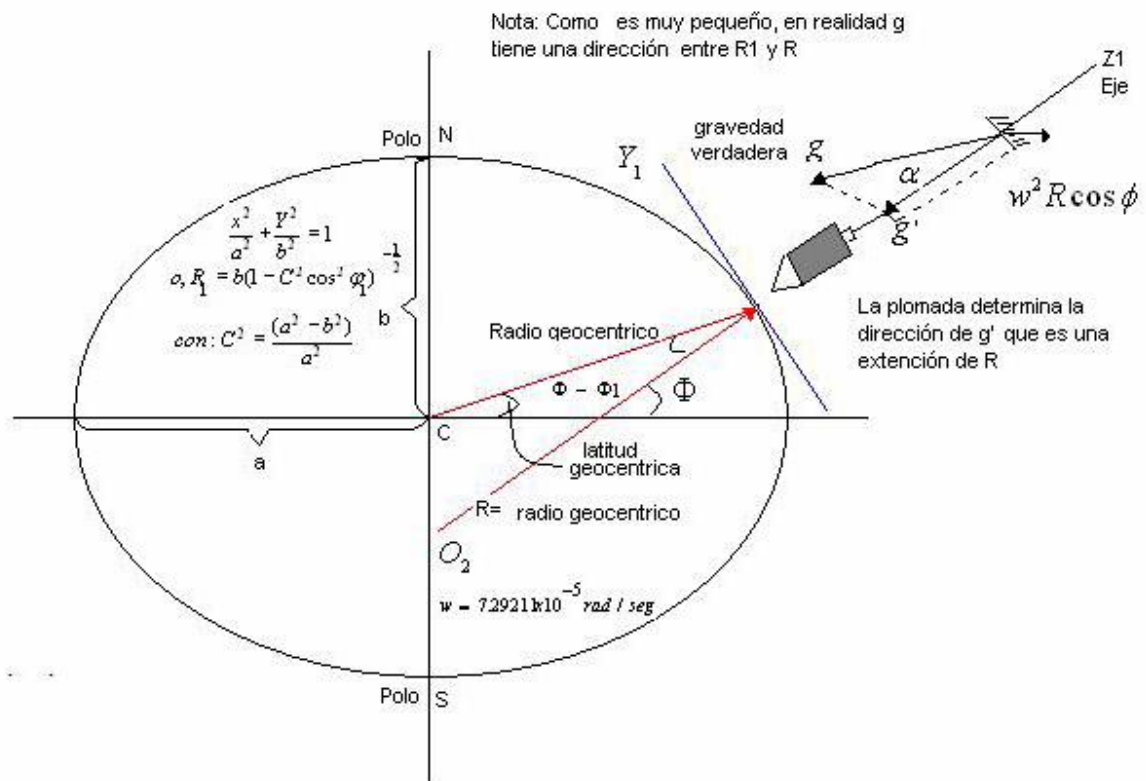


Fig.2 Elipsoide "Internacional" o de referencia.

Como resultado de la forma de la tierra, la aceleración verdadera de la gravedad, g , (debida exclusivamente a la atracción de la Tierra) varía en magnitud y en dirección con la latitud. Pero como la Tierra es prácticamente simétrica con respecto al eje polar, usualmente se considera que g es independiente de la longitud. En ciertas localidades el valor de g se encuentra afectado por la presencia de cordilleras, variaciones en la densidad de la corteza terrestre, etc.

La fuerza centrífuga, producida por la rotación de la tierra, afecta el movimiento de caída de los cuerpos, y por tanto al determinar el valor de g con un péndulo se obtiene un valor ficticio de la gravedad, g^* , el cual, excepto en los polos, tiene una dirección ligeramente diferente, y un valor inferior en magnitud, con relación a g .

La forma elipsoidal de la Tierra, también produce variaciones de g , haciendo deseable, aunque no siempre necesario, emplear valores geográficos de la latitud y el radio, en lugar de las correspondientes magnitudes geocéntricas.

La rotación anual de la tierra alrededor del Sol, es otro factor de variación de g , aun que normalmente se ignora excepto en los estudios relacionados con satélites. El efecto del movimiento del eje polar es completamente despreciable. Las anomalías gravitatorias también dependen de las condiciones locales y deben determinarse experimentalmente en el sitio. Por tanto no se incluyen mayores análisis de estos tópicos. Además, no se hace ningún intento para analizar los efectos de "forma de pera" de la Tierra, ni de las más ligeras desviaciones de su forma con respecto a un elipsoide de revolución. Si tales distorsiones existen, son en realidad muy pequeñas.

2.1.4.2. Aceleración de la Gravedad sobre la Superficie de la Tierra o cerca de ella

Puesto que la forma y rotación de la tierra afectan la fuerza gravitacional y por ende la aceleración gravitacional, es conveniente considerar dos valores distintos de la aceleración gravitacional, los cuales varían en magnitud y dirección con la latitud, pero son independientes de la longitud. El valor de g "verdadero" debido únicamente a la atracción de la gravedad de la Tierra, si la Tierra no estuviera en rotación, y un valor ficticio, g^* , es igual a la suma vectorial de g con la fuerza centrífuga por unidad de masa, $(W^2 e R \cos \Phi)$, debida a la rotación de la Tierra. La magnitud que puede medirse en el laboratorio, con un péndulo simple y una plomada, por ejemplo, es g^* . El valor de g^* se puede calcular mediante formulas ya establecidas tales como :

$$g^* = 978,049(1 + 0,0052884 \text{ sen}^2 \Phi - 0,0000059 \text{ sen}^2 2\Phi) \quad 2.3$$

La Aceleración Gravitacional g^* , en función de la latitud geográfica Φ (determinada por un

péndulo en la superficie de la elipsoide de referencia), es: 978,049 gal. y corresponde al valor de g^* al nivel del mar, en un punto localizado en el ecuador, en gal. La ecuación 2.3 es la formula Internacional de la Aceleración de Gravedad.

La Aceleración Gravitacional, g_h^* , en un punto de altura h por encima de la elipsoide de referencia, es:

$$g_h^* = g^* - (0,30855 + 0,00022\cos 2\Phi - 0,000072 h) h \quad 2.4$$

donde g^* , dada por (2.3), se toma en gal, y h , en kilómetros. La gravedad "verdadera", g , en función de g^* , sobre la superficie de la Tierra, se puede calcular mediante:

$$g^2 = (g^* + W_e^2 R \cos 2\Phi)^2 + (W_e^2 R \sin \Phi \cos \Phi)^2, \text{ o sea}$$

$$g = [(g^*)^2 + W_e^2 R \cos^2 \Phi (2g^* + W_e^2 R)]^{1/2} \quad 2.5$$

En el anexo-1. se presenta un gráfico que describe la variación de g , g^* y α con la latitud geográfica, Φ .

Tabla-1 Valores Internacionales de la Aceleración de la Gravedad, g , expresados en gal.

Localidad	Latitud	Aceleración gravitacional
Polo Norte	90° 00'	983.21
Anchorage	61° 10'	982,18
Greewich	51° 29'	981,19
Key West	48° 50'	980,94
Washington	38° 53'	980,11
Panamá	8° 55'	978,22
Ecuador	0° 00'	977,99

Tomado de: Física general Alonso-Finn. Tomo I

Tabla-2 Valores Locales de la Aceleración Gravitacional, g, de algunos municipios Colombianos, expresados en mgl.

Localidad	Latitud O	Longitud λ	Altitud m.s.n.m	Aceleración Teórica	Aceleración Observada
Sincelejo	9° 19,0´ N	75° 23,8´ W	217,02	978.116,9	978.141,10
Corozal	9° 18,4´ N	75° 17,6´ W	143,59	978.173.7	978.165,01
Tolú	9° 31,9´ N	75° 31,2´ W	4,05	978.190.2	978.1195,9
Barranquilla	10° 57,9´ N	75° 31,2´ W	15,80	978.235.3	978.238,17
Santafé de Bogotá	4° 37,7´ N	74° 07,9´ W	2.555,70	978.082.5	977.403,72
Simijaca	5° 30.9´ N	74° 07,9´ W	2.543,13	978.096.6	977.464,72

Tomado de: Gravimetría. Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Publicación especial No. 14 año de 1.971

2.1.4.3 La Aceleración de la Gravedad en el Interior de la Tierra

En la tabla siguiente se consigna la variación de g en el interior de la Tierra

Tabla-3 Valores de la Aceleración Gravitacional en el interior de la Tierra

Profundidad Km	g m/seg ²	Profundidad Km	g m/seg ²
0	9.82	1400	9.88
33	9.85	1600	9.86
100	9.89	1800	9.85
200	9.92	2000	9.86
300	9.95	2200	9.90

413	9.98	2400	9.98
600	10.01	2600	10.09
800	9.99	2800	10.26
1000	9.95	2900	10.37
1200	9.91	4000	8.00

Tomado de Physic Parts 1–2 Combined Edition. Halliday and Resnick. Problema 35 Capitulo 16. Pag, 558.

2.1.5 Vibraciones mecánicas

Una vibración mecánica es el movimiento de una partícula o un sistema de partículas que oscila alrededor de una posición de equilibrio. Dicho movimiento ocurre cuando la partícula o sistema de partículas se separa de la posición de equilibrio estable, el sistema de partículas tenderá a regresar al punto de equilibrio por la acción de fuerzas restauradoras, que pueden ser del tipo elásticas o de tipo gravitacional (como en un resorte o un péndulo). Cuando el cuerpo llega al punto de equilibrio posee una velocidad máxima que lo obliga a pasar de largo, originándose así un movimiento de vaivén alrededor de la posición de equilibrio.

Cuando el movimiento vibratorio se debe únicamente a las fuerzas de recuperación se dice que la vibración es una vibración libre; Pero cuando al sistema se aplica una fuerza periódica, se obtiene lo que llamaremos una vibración forzada; Si en un movimiento vibratorio se pueden despreciar los efectos del rozamiento se dice que la vibración es no amortiguada. Sin embargo, en cierto grado todas las vibraciones son realmente amortiguadas. Cuando una vibración libre es ligeramente amortiguada, su amplitud disminuirá lentamente hasta que después de cierto tiempo cesa el movimiento.

Pero el amortiguamiento no puede ser tan grande que impide cualquier vibración verdadera, puesto que el sistema regresa lentamente a su posición inicial. Solo se mantiene una vibración

forzada amortiguada mientras que se aplica la fuerza que produce la vibración. Sin embargo, la amplitud de la vibración es afectada por la magnitud de las fuerzas amortiguadoras.

En una vibración el tiempo que tarda el sistema en realizar un ciclo completo de movimiento se llama periodo. El número de ciclos realizados en una unidad de tiempo se llama frecuencia y el desplazamiento máximo respecto de la posición de equilibrio es la amplitud.

2.1.6.1 Péndulo matemático

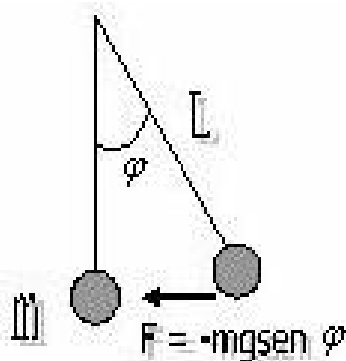


Figura 3 Fuerza motriz debido a una masa m en un péndulo matemático.

Consideremos una masa suspendida de una cuerda de masa despreciable y de longitud L , como muestra la figura-3. Cuando la masa es separada de su posición de equilibrio, la fuerza $F = -mg \text{Sen} \varphi$ actúa tratando de regresar al cuerpo a la posición de equilibrio. Por la ley de Newton se tiene que $F = m a$, donde $a = dx^2/d^2 t$, pero $x = L\varphi$, con lo cual se obtiene $a = d(L\varphi)/dt = L\ddot{\varphi}$, de lo anterior se tiene que $m L(d^2\varphi/dt^2) = -m g \text{Sen} \varphi$ que para ángulos pequeños se obtiene

$$d^2\varphi/dt^2 + (g/L)\varphi = 0 \quad 2.6$$

Supongamos, ahora, que la masa m se separa inicialmente un ángulo φ_m , su energía mecánica será $mgL(1 - \cos\varphi_m)$ y al soltar la masa en un ángulo φ antes de llegar a la posición de equilibrio su energía potencial es $mgL(1 - \cos\varphi)$ y la energía cinética es $mv^2/2$

$= mgL(\cos\varphi - \cos\varphi_m)$. Como $v = dS/dt$ y el arco $S = L\varphi$, se tiene que $dS = Ld\varphi$ y $v = Ld\varphi/dt$ así la ecuación de la energía cinética queda $m(Ld\varphi/dt)^2 = 2mgL(\cos\varphi - \cos\varphi_m)$ es decir $L(d\varphi/dt)^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_m)$. Al despejar dt se tiene y ya que φ decrece al crecer t se llega a

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g(\cos\varphi - \cos\varphi_m)}} d\varphi \quad 2.7$$

Al integrar la expresión anterior desde φ_m hasta $\varphi = 0$ se obtiene

$$t = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{\varphi_m}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_m}} \quad 2.8$$

el tiempo que tarda la masa en ir desde el extremo al punto de equilibrio, es un cuarto del periodo. Si T es el periodo de oscilación de la masa tendremos que :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_m}} \quad 2.9$$

Haciendo $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi/2$ y $\cos\varphi_m = 1 - 2\sin^2 \varphi_m/2$ se tiene

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad 2.10$$

Haciendo $k = \sin \varphi_m/2$, $\sin(\varphi/2) = k \sin\theta$ se tiene $\sin\theta = 1$, para $\theta = \pi/2$, cuando $\varphi = \varphi_m$

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{k^2 - \text{Sen}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1 - k^2 \text{Sen}^2 \theta}} d\theta \quad 2.11$$

y la integral se transforma en

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 2.12$$

Que es la ecuación para el periodo del péndulo simple, y contiene una integral elíptica, cuya solución se da en el anexo 2.

2.1.6.2 Péndulo compuesto

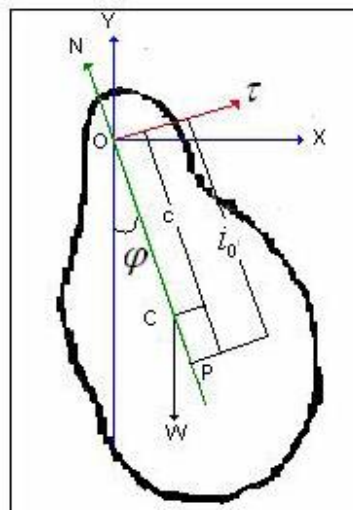


Fig.4 Fuerzas que intervienen en el movimiento de oscilación de un péndulo físico.

Consideraremos péndulo compuesto a cualquier cuerpo rígido suspendido de tal forma que pueda girar al rededor de un eje fijo horizontal que pase por un punto O y que sea normal al plano xy como muestra la figura 4. Si apartamos el péndulo de su posición de equilibrio y lo soltamos oscilará, tomando φ como el ángulo de rotación de la masa respecto a la posición de equilibrio, se tiene que el momento producido por el peso (W) de la masa es $\Gamma = -Wc$

$\sin\varphi$. pero $\Gamma = I (d^2\varphi/dt^2)$ con $I = m i_o^2$. Igualando queda $m i_o (d^2\varphi/dt^2) = -Wc \sin\varphi$, tomando $m = W / g$ queda:

$$d^2\varphi / dt^2 + cg\varphi / i_o^2 = 0 \quad 2.13$$

Comparando las ecuaciones 2.6 y 2.13 obtenidas para el péndulo simple y compuesto, podemos concluir que el periodo de oscilación de un péndulo compuesto es igual a el de un péndulo simple cuya longitud sea $L= i_o^2/c$, donde c es la distancia entre el punto de giro y el centro de gravedad.

2.1.6.3 Péndulo físico de kater

Es un péndulo físico, inventado en 1.817 por el capitán británico Henry Kater. Consiste en una varilla rígida sobre la cual se instala una lenteja lo suficiente mente grande como para que el centro de masa del péndulo se encuentre ligeramente desviado del punto medio de la varilla, la lenteja se puede desplazar, permitiendo el desplazamiento del centro de masa del péndulo según se requiera. Sobre la varilla se encuentran dos soportes en forma de cuchilla, en los cuales el péndulo puede oscilar.

Este modelo de péndulo se utiliza para calcular el valor de la aceleración gravitacional. Para ello se manipula la lenteja de tal forma que los periodos de oscilación del péndulo sean iguales en ambos soportes, cuando los períodos seán iguales, la distancia entre los soportes es igual a la longitud del péndulo matemático sincrónico asociado a él , como lo indica el principio de íter convertibilidad de Huygens.

2.1.7 Principio de íter convertibilidad de Huygens

"Si las oscilaciones sucesivas de un péndulo al rededor de dos ejes paralelos cuyo plano contiene el centro de gravedad y situados a distancias desiguales de dicho centro son iguales, la distancia entre los dos ejes es equivalente a la longitud de un péndulo simple cuyo periodo sea el mismo del péndulo considerado."

Consideremos un péndulo compuesto que puede oscilar por dos puntos O y P entre los cuales se encuentra el centro de gravedad, de tal forma que los periodos de oscilación por ambos puntos sea igual. Sea i_o e i_p los radios de giro respecto de los ejes de oscilación de los puntos O y P respectivamente; sean C y C_2 las distancias del punto de giro al centro de gravedad para cada uno de los puntos de giro.

De acuerdo con lo anterior las longitudes equivalentes del péndulo compuesto en cada caso es i_o^2 / C y i_p^2 / C_2 . Como los periodos son iguales se tendría que $i_o^2 / C = i_p^2 / C_2$, si i_c es el radio de giro respecto del centro de gravedad se tiene, por la relación de los radios de giro del teorema de los ejes paralelos del momento de inercia, que $i_o^2 = i_c^2 + C^2$ y $i_p^2 = i_c^2 + C_2^2$; Así se tiene que: $(i_c^2 + C^2) / C = (i_c^2 + C_2^2) / C_2$ Desarrollando la igualdad se tiene $i_c^2 / C + C = i_c^2 / C_2 + C_2$ de lo cual se obtiene $i_c^2 = C C_2$

Por otro lado si $L = i_o^2 / C$ y $L_2 = i_p^2 / C_2$, son las longitudes equivalentes, las podemos expresar como $L = (i_c^2 + C^2) / C$ y $L_2 = (i_c^2 + C_2^2) / C_2$ que nos proporciona: $C (L - C) = i_c^2$ y

$$C_2 (L_2 - C_2) = i_c^2$$

Como $i_c^2 = C C_2$ tenemos para cada caso $C (L - C) = C C_2$ y $C_2 (L_2 - C_2) = C C_2$ con lo cual: $(L - C) = C_2$ y $(L_2 - C_2) = C$, despejando las longitudes equivalentes queda:

$$L = C + C_2 \quad y \quad L_2 = C + C_2$$

Lo que nos demuestra que las longitudes equivalentes son iguales y que es la distancia entre los dos puntos de oscilación.

2.1.8 Métodos para el Cálculo de la Aceleración gravitacional

Básicamente corresponden a ecuaciones que permiten calcular el módulo de g , en función de la latitud y la altitud, las más importantes son las siguientes:

Fórmula de Hinrichsen: $g = 9.83209 - 0.05179 \cos^2 \theta - 3.086 \times 10^{-6} h$

Donde: g : m/seg²
 θ : latitud en grados
 h : altitud del sitio en metros.

Formula de Timoner: $g = 978.04 + 5.17 \sin^2 \theta - 9.2 \times 10^{-6} h$

Los parámetros g , θ , y h tienen igual significado que en la anterior ecuación; pero están dados en cmseg⁻², grados y cm, respectivamente.

2.1.9 Métodos para la Medida de la Aceleración Gravitacional

La gravedad terrestre se mide con instrumentos especialmente diseñados para ello denominados gravímetros, los cuales se calibran contra medidas de alta precisión llevados a cabo dentro de programas especiales en algunas localidades del planeta. El valor de referencia se obtiene mediante instrumentos especiales en los cuales pesos con configuraciones determinadas se dejan caer en el vacío; un sistema de rayos láser permite evaluar el tiempo en el cual el peso que cae recorre una distancia bastante precisa.

En general se pueden emplear cuatro tipos de mediciones para evaluar la gravedad terrestre. En primer lugar, con base en una masa que cae y recorre una determinada distancia en un tiempo conocido. En segundo lugar, mediante un péndulo que oscila con periodo conocido. En tercer lugar, mediante una masa de prueba a una fibra que vibra. Los métodos mencionados son simples en sus conceptos, pero desarrollar equipos de alta precisión a partir de ellos no ha sido sencillo. Debe recordarse que se trata de encontrar valores de décimas o de milésimas de miligal.

Los gravímetros de tipo Lacoste-Romberg, Worden, Sodin y Scintrex son los más frecuentemente empleados en los trabajos de gravimetría. Todos se basan de una u otra

forma en la unión de masa y resorte que se traduce en oscilaciones de la masa cuyo periodo se puede establecer, éste parámetro permite determinar la gravedad.

2.1.9.1. Péndulos Físicos:

La medición de la aceleración de la gravedad por medio de un péndulo (péndulo de reversión) es un método absoluto. Del análisis del movimiento del péndulo se deduce:

$$T = 2 \pi [I e / (M g d)^{1/2}]$$

En donde: $I e$: momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación e.

M : masa total oscilante.

d : distancia desde el centro de gravedad al centro de rotación.

g : aceleración gravitacional.

Obsérvese que con todos los parámetros conocidos se puede determinar g .

2.1.9.2. Experimento de Caída Libre:

Por el experimento de caída se reciben valores absolutos de la aceleración de gravedad. Para un intervalo de tiempo T y el intervalo de altura, por el cual pasa un cuerpo durante el intervalo de tiempo, se cumple la siguiente ley física:

$$H = H_0 + V_0 T + \frac{1}{2} (g T^2)$$

En donde: H_0 : posición vertical inicial, del objeto, respecto de un nivel prefijado.

H : posición final,

V_0 : velocidad inicial

T : tiempo requerido para desplazarse de la posición H_0 a la H .

g : aceleración de la gravedad.

Al medirse cada uno de los parámetros de manera precisa se puede obtener el valor de g .

2.1.9.3. Equipos de medida de la aceleración de la gravedad

Estos equipos permiten medir la aceleración de la gravedad de manera precisa, pero previa calibración, con péndulos, es decir proporcionan valores relativos de g. Entre los más comunes se tienen:

Balanza de Torsión Estándar de EÖTVÖS :

Esta consta de dos pesos iguales situadas a distintas alturas, unidas entre si. El conjunto esta unido a un hilo de torsión de tal manera que el sistema puede girar

Gravímetro La Coste & Romberg :

Este gravímetro es de tipo relativo, es decir, determina las variaciones del módulo de la gravedad a partir de la observación de una magnitud física relacionada con aquella. En este caso, esta magnitud es la elongación que sufre un resorte del que, en una de sus extremos, pende una pequeña masa. Estos dispositivos permiten medir la aceleración de la gravedad con una aproximación de 10^{-6} gal.

Gravímetro Superconductor:

El instrumento mide las variaciones de intensidad del campo terrestre. La nueva unidad está a cargo de la TIGO^[1], es el instrumento más sensible a las variaciones de la gravedad, consiste en una esfera de niobio suspendida por un campo magnético, que es producido por corrientes eléctricas en una bobina superconductora. Las mediciones del gravímetro superconductor muestran las variaciones de la distancia entre el centro de la masa de la tierra y el instrumento en la superficie de la tierra, las que pueden llegar a tener una amplitud de hasta un metro diario.

[1] TIGO: Observatorio Geodésico Integrado Transportable, de la Universidad de Concepción, Argentina.

3. METODOLOGÍA

3.1 Diseño del péndulo físico

3.1.1.Modelo

El modelo elegido esta basado en el principio de interconvertibilidad del punto de oscilación y suspensión de un péndulo, por lo cual éste tendrá una distribución de masas de tal forma que el centro de masas no quede ubicado en el centro geométrico del péndulo; por tal razón estará conformado por una varilla de longitud L , con una masa, M , fija en uno de sus extremos, y otra móvil, m , que se puede desplazar entre los ejes, para ajustar los períodos hasta que sean aproximadamente iguales.

Los ejes de rotación son de forma cilíndrica de radio pequeño de tal forma que el contacto entre ellos y la superficie de apoyo sea mínima para hacer el rozamiento newtoniano despreciable y sólo considerar el rozamiento viscoso, generado por el aire que circunda al péndulo.

3.1.2 Materiales

En cuanto al material escogido para la construcción se eligió una aleación diamagnética con bajo coeficiente de dilatación térmica, y que permitiera una fácil configuración a través de las diferentes maquinas, que permiten su conformación y corte. Dentro de los materiales que más satisfacen estas características encintramos las siguientes aleaciones:

Bronce Fundido. Densidad D : 8.200 kg/m^3 . Coeficiente de Dilatación Lineal $18.0 \text{ um}/(\text{m}^\circ\text{C})$.

Aluminio Fundido. Densidad D : 2.650 kg/m^3 . Coeficiente de dilatación lineal $23.1 \text{ um}/(\text{m}^\circ\text{C})$.

A pesar que las aleaciones de aluminio presentan buenas características diamagnéticas, se escogió el bronce por su baja dilatación térmica y facilidad de maquinado.

3.1.3 Dimensiones y Masas de los Elementos del Modelo de Péndulo.

Para la asignación de las dimensiones y masas se tuvo en cuenta la geometría del modelo propuesto, el tipo de materiales disponibles, y las restricciones de maquinado que imponen las maquinas del taller mecánico, se establecen los siguientes valores, para cada una de las dimensiones geométricas y la masa de cada uno de los elementos que constituyen el péndulo.

Dimensiones Geométricas:

$Y = 3\text{cm}$, $b = 2.5\text{cm}$, $H = 0.8\text{cm}$, $h = 1\text{cm}$, $e = 0.2\text{cm}$, $D = 4\text{cm}$, $E = 0.8\text{cm}$, $d = 1\text{cm}$, $L = 23.153\text{ cm}$, $K = 0,3\text{cm}$, $R = 2,2\text{cm}$.

Masas de los Elementos:

$M = 78,571\text{gr.}$, $m = 2,321\text{gr.}$, $M^* = 3,337\text{ gr}$, $M_v = 113,041\text{ gr.}$, $M_{a1} = 2.156\text{gr.}$ $M_{a2} = 2,163\text{gr}$, $M_p = 198,241\text{gr.}$ $m^* = 4,171$, $M_v^* = 0,298\text{gr.}$ $M_0 = 8,360\text{ gr.}$

Donde:

M_p : Masa pendular ; M_v : Masa de la varilla ; M : Masa 1 ; m . Masa 2; M_a : Masa del apoyo

M^* : masa del espacio central vacío de la masa 1; m^* : masa del espacio vacío de la masa 2;

M_v^* : masa de cada uno de los espacios vacíos de la varilla por donde pasan los apoyos; M_0 masa del disco pequeño.

3.1.2. Calculo de la posición X de la masa m que permite la igualdad de periodos en cada uno de los ejes de oscilación

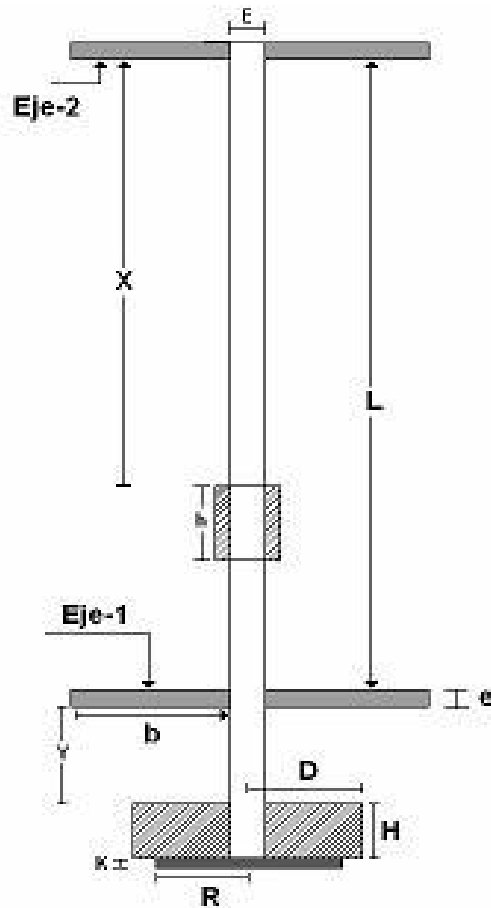


Fig. 5 Modelo de péndulo diseñado

El calculo se basa en la igualdad $T_1 = T_2$, siendo $T_1 = 2\pi [I_{P1} / (M_P \times g \times S_1)]^{1/2}$ y $T_2 = 2\pi [I_{P2} / (M_P \times g \times S_2)]^{1/2}$

A continuación se determina el valor de cada una de las variables que contienen las formulas.

MOMENTOS DE INERCIA RESPECTO DEL EJE 1

$$I_{P1} = I_{M0} + I_{M1} + I_{m1} + I_{a11} + I_{a21} + I_V$$

En la cual cada uno de los momentos de inercia se calculan teniendo en cuenta las masas, y su posición respecto a cada eje de rotación:

$$I_{M01} = (M_0/12)[3R^2/4 + K^2] + M [K/2 + e + Y+H]^2$$

$$I_{M1} = (M/12)[3D^2/4 + H^2] + M [e + Y + H/2]^2 - (M^*/12) [3D^2/4 + H^2] + M^*[e+Y+H/2]^2$$

$$I_{m1} = (m/12)(3d^2/4 + h^2) + m(L-x-h/2)^2 - (m^*/12)(3d^2/4 + h^2) + m^*(L-x-h/2)^2$$

$$I_{a11} = (M_{a1}/2)(e^2/4) + M_a e^2/4 = (3/8) M_a e^2$$

$$I_{a21} = (M_{a2}/2)(e^2/4) + M_{a2} (e/2 + L)^2 = M_{a2} e^2/8 + M_{a2} (e/2 + L)^2$$

$$I_{V1} = (M_V/12) [3E^2/4 + (L_T)^2] + M_V [(L+e)/2]^2 - M_V^* e^2/2 - M_V^* (L+e/2)^2$$

MOMENTOS DE INERCIA RESPECTO DEL EJE 2

$$I_{P2} = I_{M2} + I_{m2} + I_{a12} + I_{a22} + I_{V2} + I_{V2}^*$$

$$I_{M01} = (M_0/12)[3R^2/4 + K^2] + M_0 [L_V - e + K/2]^2$$

$$I_{M2} = (M/12)[3D^2/4 + H^2] + M[L_V - e - H/2]^2 - (M^*/12)(3D^2/4 + H^2) + M^*(L_V - H/2 - e)^2$$

$$CI_{V2} = (M_V/12) [3E^2/4 + (L_T)^2] + M_V (L_V/2 - e)^2 - M_V^* e^2/2 - M_V^* (L+e/2)^2$$

$$I_{m2} = (m/12)(3d^2/4 + h^2) + m(x+h/2)^2 - (m^*/12)(3d^2/4 + h^2) + m^*(x+h/2)^2$$

$$I_{a12} = (M_{a1}/2)(e^2/4) + M_{a1} (e/2 + L)^2 = M_{a1} e^2/8 + M_{a1} (e/2 + L)^2$$

$$I_{a22} = (M_{a2}/2)(e^2/4) + (M_{a2})(e^2/4) = M_{a2} e^2/8$$

En la tabla 3 se consignan los respectivos momentos de inercia, respecto de cada uno de los ejes.

Tabla-4. Momentos de Inercia Respecto a los Ejes de Oscilación 1 y 2

Eje 1	Eje 2
$I_{M0} = 149,539\text{gr-cm}^2$ $I_{M1} = 1.079,128\text{gr-cm}^2$ $I_{m1} = -0,176 - 1,85 (22,653 - X)^2$ $I_{V1} = 17.425,243\text{gr-cm}^2$ $I_{a11} = 0,047\text{gr-cm}^2$ $I_{a21} = 1.171,296\text{gr-cm}^2$ $I_{p1} = 19.825,077 - 1,85 (22,653 - X)^2$	$I_{M0} = 6.231,681\text{gr-cm}^2$ $I_{M2} = 53.853,586\text{gr-cm}^2$ $I_{m2} = -0.176 - 1,85 (X + 0,5)^2$ $I_{V2} = 27.346,263\text{gr-cm}^2$ $I_{a12} = 1.167,667 \text{ gr-cm}^2$ $I_{a22} = 0,047 \text{ gr-cm}^2$ $I_{p2} = 88.599,07 - 1,85 (X + 0.5)^2$

$$I_{p1} = I_{M0} + I_{M1} + I_{m1} + I_{a11} + I_{a21} + I_{V1}$$

$$I_{p2} = I_{M0} + I_{M1} + I_{m2} + I_{a12} + I_{a22} + I_{V2}$$

Para simplificar los cálculos consideraremos que el centro de masa del péndulo se encuentra a $(X + h/2)$ del eje 2. Al sustituir los valores y despejar la incógnita X , se encuentra un valor de 18,399 cm., y de acuerdo con este resultado los valores de I_{p1} y I_{p2} son:

$$I_{p1} = 19.825,077 - 1,85 (22,5 - 18,399)^2 = 19.791,598 \text{ gr-cm}^2$$

$$I_{p2} = 88.599,07 - 1,85 (18,399 + 0.5)^2 = 87.938,301 \text{ gr-cm}^2$$

Sustituyendo en $T_1 = 2\pi [I_{P1} / (M_P \times g \times S_1)]^{1/2}$ y $T_2 = 2\pi [I_{P2} / (M_P \times g \times S_2)]^{1/2}$ con $S_1 = L - (X + h/2)$

$S_2 = X + h/2$ y asumiendo $g = 978.141 \text{ cm/seg}^2$ obtiene para T_1 el valor de 0,973 seg., y para T_2 el valor de 0,973 seg., que son periodos iguales, según lo esperado.

Según el principio de convertibilidad, la longitud entre los apoyos de un péndulo físico que oscila con igual período por dos ejes opuestos, corresponde a la longitud equivalente del péndulo matemático que tiene igual período, que el de dicho péndulo. Por lo anterior, si consideramos un péndulo matemático de longitud 23,153 cm, que es la longitud entre los apoyos del péndulo físico construido, se obtiene el siguiente valor para el periodo:

$$T_1 = 2\pi [L/g]^{1/2} = 2\pi [23,153 \text{ cm}/978,141 \text{ cm/s}^2]^{1/2} = 0,970 \text{ seg.}$$

3.2. Ecuación diferencial del movimiento del péndulo

Con objeto de caracterizar el movimiento del péndulo se deduce la ecuación del movimiento de este péndulo, asumiendo que oscila generando vibraciones libres y amortiguadas con un grado de libertad. Además se considerará que el amortiguamiento debido a la fricción es de tipo viscoso y coulombiano, con lo cual la aplicación de la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación, conduce a la siguiente ecuación:

$$I_T \alpha'' = -\sum \tau_i + \tau_{coul} + \tau_{vis.}$$

Ecu.3.1

Donde

$$\tau_{coul} = W_p \frac{e}{2} \mu_k \quad \tau_{vis} = c \alpha'$$

Son el rozamiento coulombiano y viscoso. Sustituyendo y organizando se obtiene:

$$I_T \alpha'' - c \alpha' - W_p \frac{e}{2} \mu_k + \sum \tau_i = 0$$

Ecu.3.2

Dividiendo por I_T , con $\sum \tau_i = \sum k_i \text{sen} \alpha$, $K_i = F_i d_i$, la ecuación es

$$\alpha'' - \frac{c}{I_T} \alpha' + \frac{\sum k_i}{I_T} \text{sen} \alpha - \frac{w_p \epsilon \mu_k}{2 I_T} = 0$$

haciendo

$$D_1 = \frac{c}{I_T} \quad D_2 = \frac{\sum k_i}{I_T} \quad D_3 = \frac{w_p \epsilon \mu_k}{2 I_T}$$

Como inicialmente el péndulo gira en el sentido de las manecillas del reloj, la ecuación queda

$$\alpha'' - D_1 \alpha' + D_2 \text{sen} \alpha - D_3 = 0$$

3.3

Que es una ecuación diferencial ordinaria, de segundo grado y no lineal. Como los ángulos considerados serán menores de 10° , se toma la aproximación $\text{sen} \alpha = \alpha$ y considerando que la fricción en los apoyos es despreciable debido a que el contacto entre los apoyos y la superficie es casi nula, se obtiene

$$\alpha'' - D_1 \alpha' + D_2 \alpha = 0$$

3.4

Tomando en dicha ecuación diferencial $\alpha = e^{\lambda t}$ se tiene que la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - D_1 \lambda + D_2 = 0$$

con lo cual

$$\lambda_1 = \frac{c}{2 I_T} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 I_T}\right)^2 - D_2} \quad \lambda_2 = \frac{c}{2 I_T} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 I_T}\right)^2 - D_2}$$

En este caso el amortiguamiento es crítico cuando el radical es cero y se tiene

$$\left(\frac{C_c}{2I_T}\right)^2 - D_2 = 0 \Rightarrow C_c = 2I_T\sqrt{D_2}$$

Los valores obtenidos de T_{T1} y I_{p1} son:

$$T_{T1} = -812.565,606 \text{ sen } \alpha = -141.100,537 \text{ ergios}$$

$$I_{p1} = 19.825,077 - 1,85 (22,5 - 18,399)^2 = 19.791,598 \text{ gr-cm}^2$$

Con lo cual se obtiene $C_c = 105.690,21$

Para el amortiguamiento débil $C < C_c$ y las raíces son complejas y conjugadas, la solución general

queda
$$\alpha = e^{-\frac{c}{2I_T}t} (A \text{ sen } qt + B \cos qt) \quad \mathbf{3.5}$$

Donde

$$q^2 = D_2 - \left(\frac{C}{2I_T}\right)^2$$

Los valores de las constantes A y B se determinan con las condiciones iniciales. Evaluando la ecuación para $t=0$ se tiene que el valor de B es la amplitud máxima desplazada inicialmente, esto es $B = \alpha_m$

Al derivar de la ecuación 3.5 se obtiene la velocidad angular

$$\alpha' = -\frac{c}{2I_T} e^{-\frac{c}{2I_T}t} (Aq \cos qt - Bq \text{ sen } qt)$$

Para $t = 0$ queda

$$0 = - \frac{c}{2 I_T} A q$$

De lo cual se llega a que el valor de A es $A = 0$, puesto que C , I_T y q son distintos de cero, la solución es

$$\alpha = e^{-\frac{c}{2 I_T} t} \alpha_m \cos qt \quad 3.6$$

Esta es la ecuación de un movimiento vibratorio con disminución de la amplitud como lo muestra la figura 6, al sustituir los valores de c, I_T, α_m y q . el periodo es $T = 2\pi / q$, donde

$$q^2 = \frac{\tau}{I_T} - \left[\frac{c}{2 I_T} \right]^2$$

El valor del momento total τ , se determina mediante la suma de los siguientes momentos:

$$\tau_{M0} = W_{M0} (k/2 + H + Y + e) \text{sen} \alpha = 34.310,318 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_M = W_M (H/2 + Y + e) \text{sen} \alpha = 280.099,818 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_{a1} = W_a (e/2) \text{sen} \alpha = 253,393 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_{a2} = -W_{a2} (L + e/2) \text{sen} \alpha = -49.296,141 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_m = W_m (L - X - h/2) \text{sen} \alpha = -9.671,127 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_v = W_v (L_v/2 - H - Y - e) \text{sen} \alpha = -1 068.261,867 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau_T = - 812.565,606 \text{ sen} \alpha$$

$$\tau = 812.565,606 \text{ dinas*cm}$$

con $\tau = 812565,606 d^* cm$, $I_T = 19.791,598 gr.cm^2$ y $c = 86,599 gr.cm^2/seg.$, con lo cual se obtiene $q = 6,408 seg^{-1}$ y el periodo es $T = 2\pi / q = 0,980 seg$.

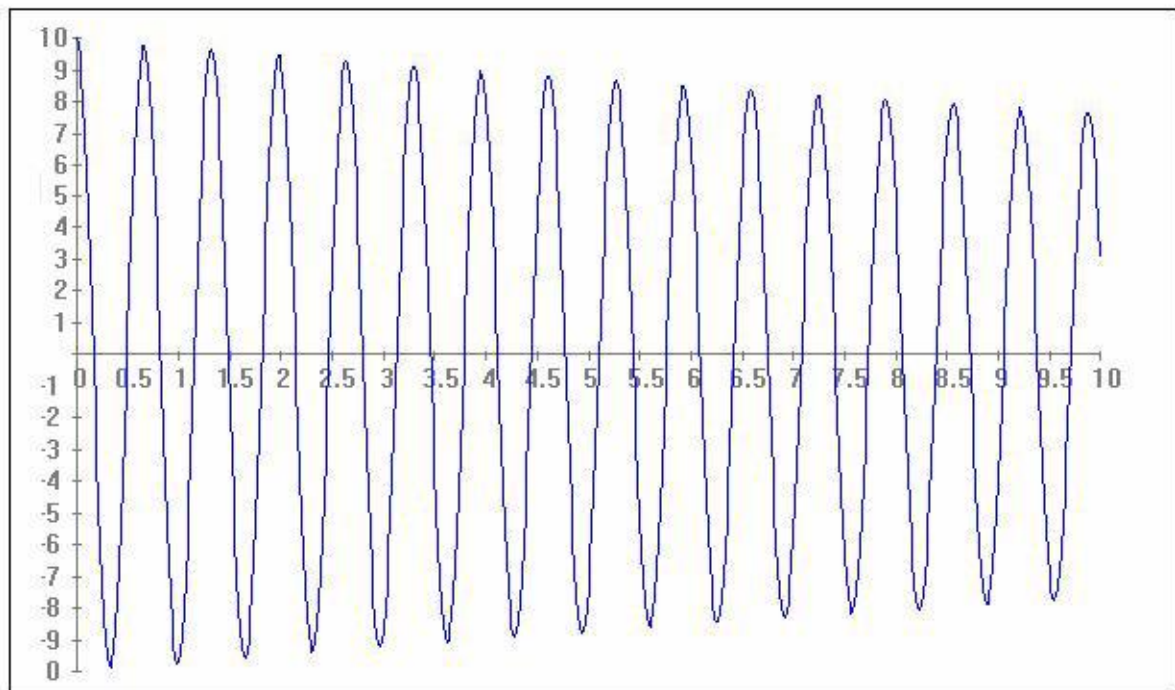


Fig. 6 Grafica de la Amplitud Angular Vs. Tiempo, ecuación. 3.6

4. DETERMINACIÓN DE LA ACELERACION GRAVITACIONAL

4.1 Determinación Teórica de la Aceleración Gravitacional

El calculo de la aceleración gravitacional se realizo utilizando la fórmula internacional de la gravedad, y los valores para los parámetros latitud : Φ : $9^{\circ} 19,0' N$ y altitud aproximada h:

0.21702 m.s.n.m. correspondientes al municipio de Sincelejo; de acuerdo con lo anterior y las ecuaciones 2.3 y 2.4 la aceleración gravitacional será:

$$g^* = 978,049(1 + 0,0052884 \sin^2\Phi - 0,0000059 \sin^22\Phi) \quad 2.3$$

$$g^*_h = g^* - (0,30855 + 0,00022\cos2\Phi - 0,000072 h) h \quad 2.4$$

Por lo que $g^* = 978,184 \text{ gal.}$, y $g^*_h = 978,117 \text{ gal.}$

4.2 Determinación Experimental de la Aceleración Gravitacional

Inicialmente se ajustó la posición de la masa m , con el objeto de garantizar que el principio de convertibilidad se cumpliera para el modelo construido. Estos se hizo colocando la masa m con su centro de gravedad a una distancia $X = 18,272\text{cm}$. Como los períodos no fueron iguales, debido a errores de construcción, se desplazó la masa m a distintas posiciones hasta lograr periodos aproximadamente iguales en ambos ejes de oscilación.

El valor de T se obtiene del concepto periodo, que es el tiempo necesario para realizar una oscilación completa, para lo cual se mide el tiempo que tarda el péndulo en realizar 40 oscilaciones y dicho tiempo dividido entre 60 dará el valor del período, para mayor precisión se aplicará este método 60 veces, de los cuales se tendrá un valor promedio.

Con el objeto de eliminar el efecto de la amplitud en la determinación del periodo se iniciaron los ensayos con amplitudes angulares no mayores a 10 grados.

4.4.1 Calculo de la Incertidumbre en la determinación del valor de g .

$$U_g = \pm \left[(U_{g\pi})^2 + (U_{gT})^2 + (U_{gL})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

En la anterior ecuación U_g es la incertidumbre en la medida de g con:

$$U_{g\pi} = \frac{\pi}{g} * \frac{dg}{d\pi} * U_{\pi} \quad U_{gT} = \frac{T}{g} * \frac{dg}{dT} * U_T \quad U_{gL} = \frac{L}{g} * \frac{dg}{dL} * U_L$$

Es la incertidumbre de g debido a π , T y L respectivamente.

Si $g = (2\pi/T)^2 L$ entonces

$$\frac{dg}{d\pi} = \frac{8\pi}{T^2} L \quad \frac{dg}{dT} = -\frac{8\pi^2}{T^3} L \quad \frac{dg}{dL} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

y las incertidumbres en π , T y L son :

$$U_{\pi} = \pm \frac{E_{\pi}}{\pi} \quad U_T = \pm \frac{E_T}{T} \quad U_L = \pm \frac{E_L}{L}$$

Lo anterior junto con los valores $L = 23,153 \text{ cm}$, $T = 0.966 \text{ seg.}$, $g = 979,5 \text{ gal.}$

, $\pi = 3,1415926$ $E_{\pi} = 10^{-9}$, $E_T = 0,01 \text{ seg}$ y $E_L = 0,002 \text{ cm.}$ permite obtener el siguiente valor de incertidumbre:

$$U_g = \pm 7,6 * 10^{-3} \text{ gal}$$

4.4.2 Calculo del valor más probable de g

$$g_c + U_g = 979,5 \text{ gal.} \pm 7,6 * 10^{-3} \text{ gal.}$$

4.5 CALCULO DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS OSCILACIONES

En la determinación del factor de amortiguamiento c , del péndulo en las condiciones de oscilación hemos supuesto que el amortiguamiento del sistema es débil, por el tipo de apoyos y las condiciones del fluido en el que esta inmerso oscilando, por lo que la constante característica c se puede determinar a partir de:

$$\ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi(c/c_c)/[1-(c/c_c)^2]^{1/2} = (1/n) \ln(x_1/x_{n+1})$$

Que se demuestra en el anexo(). Donde X_n y X_{n+1} son dos cualquiera de los desplazamientos máximos consecutivos

Teniendo en cuenta que la amplitud inicial $X_1 = 10$ mm, la final $X_{n+1} = 5$ mm, y un número de oscilaciones promedio de 323, se obtiene un valor de amortiguamiento igual a:

$$2\pi(c/c_c)/[1-(c/c_c)^2]^{1/2} = (1/323) \ln(10\text{mm}/5\text{mm})$$

Asumiendo $C_c = 105.690,21$ se obtiene: $(c/c_c)/[1-(c/c_c)^2]^{1/2} = 3,415 \times 10^{-4}$ por lo que se obtiene $c = 86.6 \text{ gr.cm}^2/\text{seg.}$

TABLA 5. ENSAYOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL VALOR MEDIO DEL PERIODO DEL PÉNDULO FISICO

EJE 1				EJE 2			
Intento	N. Oscilac	Tiempo	Período	Intento	N. Oscilac	Tiempo	Período
1	40	38,53	0,963	1	40	38,71	0,968
2	40	38,55	0,964	2	40	38,66	0,967
3	40	38,60	0,965	3	40	38,69	0,967
4	40	38,58	0,965	4	40	38,71	0,968
5	40	38,57	0,964	5	40	38,67	0,967
6	40	38,64	0,966	6	40	38,68	0,967
7	40	38,53	0,963	7	40	38,64	0,966
8	40	38,60	0,965	8	40	38,64	0,966
9	40	38,65	0,966	9	40	38,66	0,967
10	40	38,60	0,965	10	40	38,67	0,967
11	40	38,59	0,965	11	40	38,64	0,966
12	40	38,59	0,965	12	40	38,69	0,966

13	40	38,60	0,965	13	40	38,70	0,968
14	40	38,65	0,966	14	40	38,64	0,966
15	40	38,58	0,965	15	40	38,64	0,966
16	40	38,56	0,964	16	40	38,66	0,967
17	40	38,63	0,966	17	40	38,71	0,968
18	40	38,57	0,964	18	40	38,69	0,968
19	40	38,56	0,964	19	40	38,64	0,966
20	40	38,63	0,966	20	40	38,66	0,967
21	40	38,57	0,964	21	40	38,73	0,968
22	40	38,55	0,964	22	40	38,66	0,967
23	40	38,63	0,966	23	40	38,64	0,966
24	40	38,55	0,964	24	40	38,73	0,968
25	40	38,63	0,966	25	40	38,70	0,968
26	40	38,58	0,965	26	40	38,64	0,966
27	40	38,61	0,965	27	40	38,67	0,967
28	40	38,57	0,964	28	40	38,64	0,966
29	40	38,53	0,963	29	40	38,67	0,967
30	40	38,53	0,963	30	40	38,70	0,968
31	40	38,55	0,964	31	40	38,68	0,967
32	40	38,53	0,963	32	40	38,70	0,968
33	40	38,66	0,967	33	40	38,70	0,968
34	40	38,53	0,963	34	40	38,66	0,967
35	40	38,58	0,965	35	40	38,64	0,966
36	40	38,56	0,964	36	40	38,67	0,967
37	40	38,53	0,963	37	40	38,64	0,966
38	40	38,59	0,965	38	40	38,66	0,967
39	40	38,57	0,964	39	40	38,64	0,966
40	40	38,60	0,965	40	40	38,69	0,968
41	40	38,57	0,964	41	40	38,64	0,966
42	40	38,53	0,963	42	40	38,69	0,966
43	40	38,55	0,964	43	40	38,69	0,966
44	40	38,60	0,965	44	40	38,64	0,966
45	40	38,55	0,964	45	40	38,69	0,966
46	40	38,63	0,966	46	40	38,73	0,968
47	40	38,56	0,964	47	40	38,64	0,966

48	40	38,59	0,965	48	40	38,66	0,967
49	40	38,60	0,965	49	40	38,65	0,965
50	40	38,57	0,964	50	40	38,64	0,966
51	40	38,61	0,965	51	40	38,68	0,967
52	40	38,62	0,966	52	40	38,65	0,966
53	40	38,59	0,965	53	40	38,68	0,967
54	40	38,62	0,966	54	40	38,68	0,967
55	40	38,59	0,965	55	40	38,65	0,966
56	40	38,63	0,966	56	40	38,66	0,967
57	40	38,57	0,964	57	40	38,67	0,967
58	40	38,59	0,965	58	40	38,70	0,968
59	40	38,60	0,965	59	40	38,65	0,966
60	40	38,58	0,965	60	40	38,69	0,967

Periodo alrededor del eje 1: eje 1 T = 0,965 seg.

Periodo alrededor del eje 2: eje 2 T = 0.967 seg.

Para la determinación experimental del valor de la aceleración gravitacional se utiliza la ecuación del péndulo simple $T = 2\pi [L / g]^{1/2}$, de la cual conociendo L y T se puede hallar el valor de g_e .

Valor promedio del periodo $T = \Sigma T_i / 60 = 0,966\text{seg}$. El valor de g_m obtenido al reemplazar T: 0.966 seg., L: 23.153 cm, en la ecuación, es:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = 4\pi^2 \frac{23,153\text{cm}}{(0,966\text{seg})^2} = 979,5 \text{ gal.}$$

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El modelo de péndulo construido presenta un periodo calculado de 0.980 seg., y el medido es de 0.966 seg. La diferencia es del orden de 1.4%, respecto al valor calculado, esta diferencia se origina por varios factores como son: falta de homogeneidad de los materiales, por defectos

en el proceso de fundición, precisión en los instrumentos de medida, y los errores que se introducen en el proceso de cálculo y redondeo numérico.

Las condiciones físicas bajo las cuales oscila el péndulo corresponden a una oscilación libre levemente amortiguada, puesto que $c = 86.6 \text{ gr.cm}^2/\text{seg.} < c_c = 105.690,21 \text{ gr.cm}^2/\text{seg.}$, con lo cual la ecuación diferencial de segundo orden, que describe su movimiento, tiene una solución de la forma:

$$\alpha = 10 e^{-0.0022 t} \cos(367,27 t)$$

La cual permite modelar el movimiento oscilatorio del péndulo (amplitud en función del tiempo), teniendo en cuenta factores tales como: inercia rotacional, viscosidad, y la frecuencia angular.

Los valores de aceleración gravitacional verdadera $g^*_h = 978,117 \text{ gal.}$, calculado mediante la fórmula internacional y la medida por el IGAC $g_{\text{IGAC}}: 978,141 \text{ gal.}$, son similares, lo cual se debe a la precisión en la medida que tiene el gravímetro, utilizado.

En la determinación de g no se considera el efecto de la rotación terrestre en los ensayos, por que el término $W_e^2 R \cos\Phi$, tiene un valor de $3.3 \times 10^{-3} \text{ cm/seg}^2$, el cual es del mismo orden de magnitud, que la precisión de los instrumentos de medida.

El valor de aceleración gravitacional determinado mediante el método del péndulo $g: 979,500 \text{ gal.}$, difiere del valor de referencia $978,141 \text{ gal.}$ en un porcentaje de 0.14% . Esta tiene origen básicamente en la limitación del instrumento de medida del tiempo, el cual debería tener una aproximación de 0.001 seg. , con el fin de obtener menores diferencias.

CONCLUSIONES

La medida de la aceleración gravitacional mediante un péndulo reversible, con igual periodo en sus ejes de apoyo, se constituye en una alternativa académica de medida, siempre y cuando

se construya con materiales adecuados y se complemente con medidores digitales de tiempo y longitud, de buena precisión, puesto que la precisión en la medida de g , está condicionada por la precisión de estos parámetros.

Los valores de g_m : 979.50gal., obtenido mediante el péndulo físico, y el calculado g_c : 978.60 gal., comparados con el valor de referencia g_{REF} : 978.14 gal., presentan diferencias porcentuales pequeñas, lo que permite usarlos en la solución de problemas de mecánica clásica.

El efecto de fenómenos de deriva y rotación de la tierra en los valores de g determinados mediante el péndulo, son pequeños en relación con el grado de precisión, a que están sujetas las medidas.

La deducción de la ecuación del movimiento del péndulo teniendo en cuenta factores de fricción y de inercia conduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuya solución requiere del calculo de una integral elíptica de primera especie, mediante aproximaciones por series.

De acuerdo con el análisis de la ecuación del movimiento del péndulo se garantiza que el experimento se desarrolla con oscilaciones levemente amortiguadas.

El péndulo físico permite desarrollar actividades practicas adicionales como son verificación de la formula del periodo para el péndulo físico, determinación del momento de inercia, y estudio del movimiento oscilatorio amortiguado.

Actualmente existen métodos para determinar el valor de g con diferente grado de precisión, entre los cuales se destacan: electromagnéticos, y atómicos.

ANEXOS

ANEXO1: GRAFICA DE LA ACELERACIÓN GRAVITACIONAL RESPECTO DE LA LATITUD GEOGRÁFICA.

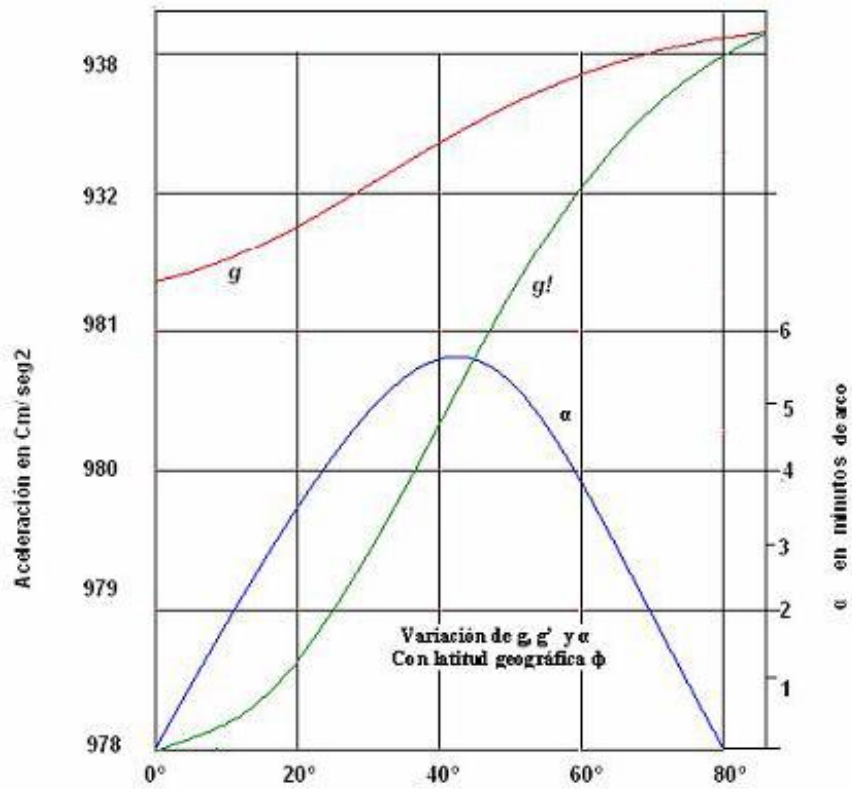


Figura 6 Aceleración gravitacional respecto la latitud geográfica

ANEXO2: SOLUCION COMPLETA DE LA INTEGRAL ELIPTICA PARA EL PERIODO DE OSCILACION DEL PENDULO SIMPLE.

La ecuación elíptica es de la clase

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Donde $k = \sin^2(\theta_m / 2) < 1$

Como:

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-k^2 \sin^2 \theta) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-k^2 \sin^2 \theta)^2}{2 * 1} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-k^2 \sin^2 \theta)^3}{3 * 2 * 1} + \dots$$

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \frac{1 * 3 k^4 \sin^4 \theta}{2 * 4} + \frac{1 * 3 * 5 k^6 \sin^6 \theta}{2 * 4 * 6} + \frac{1 * 3 * 5 * 7 k^8 \sin^8 \theta}{2 * 4 * 6 * 8} + \dots$$

Luego

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1 * 3 k^4}{2 * 4} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta + \frac{1 * 3 * 5 k^6}{2 * 4 * 6} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta + \frac{1 * 3 * 5 * 7 k^8}{2 * 4 * 6 * 8} \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta + \dots$$

Resolviendo las integrales de la derecha se obtiene

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} * \frac{\pi}{2} * \frac{k^2}{2} + \frac{1 * 3 k^4}{2 * 4} * \frac{1 * 3 \pi}{4 * 2 * 2} + \frac{1 * 3 * 5 k^6}{2 * 4 * 6} * \frac{1 * 3 * 5 \pi}{6 * 4 * 2 * 2} + \dots$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{3^2 k^4}{2^2 * 4^2} + \frac{3^2 * 5^2 k^6}{2^2 * 4^2 * 6^2} + \dots \right]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n} + \frac{\pi}{2}$$

sea

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n}$$

Veamos que esta serie es convergente.

Por el criterio del cociente que dice si tenemos una serie de terminos positivos $\sum a_i$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho$$

entonces la serie es convergente si $\rho < 1$

Considerando que $k < 1$ tendremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n+2}}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n}}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2i} \right)^2 k^{2n}} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 k^{2n+2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 k^{2n+2} = k^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 k^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right) = k^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 * \lim_{n \rightarrow \infty} k^{2n} = k^2 * 1 * 0 = 0$$

Así $\rho=0 < 1$, por lo cual S_n es convergente y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

converge a $\pi / 2$

ANEXO.3 DEMOSTRACIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA EL CÁLCULO DEL AMORTIGUAMIENTO

En la gráfica $\text{Sen} \varphi = \frac{X}{L + e}$ como para ángulos pequeños $\text{Sen} \varphi = \varphi$, $\varphi = \frac{X}{L + e}$. Al sustituir

en la ecuación $\alpha = e^{-\frac{c}{2IT}t} \alpha_m \cos qt$ se tiene

$$X = (L + e) e^{-\frac{c}{2IT}t} \alpha_m \cos qt$$
 Consideremos Dos desplazamientos máximos consecutivos, X_n y X_{n+1} . Estos desplazamientos máximos ocurren cada período, por lo cual se dan en los tiempos $t_n = nT$ y $t_{(n+1)} = (n+1)T$ respectivamente, al sustituir en la ecuación se obtiene:

$$X_n = (L + e) e^{-\frac{c}{2IT}nT} \alpha_m \cos qnT \text{ y } X_{(n+1)} = (L + e) e^{-\frac{c}{2IT}(n+1)T} \alpha_m \cos q(n+1)T$$

Como $T = 2\pi / q$, entonces $\cos(qnT) = \cos(2\pi n) = 1$ y $\cos(n+1)qT = \cos 2\pi(n+1) = 1$. Así se obtiene

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = e^{\frac{cT}{2I_T}}, \quad \text{Extrayendo logaritmo} \quad \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) = \frac{cT}{2I_T}. \quad \text{Además}$$

$$\ln\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}\right) = \frac{cnT}{2I_T} \quad \text{por lo cual} \quad \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}\right)$$

$$\text{Como } T = \frac{2\pi}{q} \quad \text{y} \quad q^2 = \frac{\tau}{I_T} - \frac{c^2}{4I_T^2} = \frac{4\pi I_T - c^2}{4I_T} = \frac{c_c^2 - c^2}{4I_T}$$

se obtiene

$$\frac{2c\pi}{2qI_T} = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}\right) = \frac{2\pi \frac{c}{c_c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}}$$

BIBLIOGRAFIA

Mecánica Aplicada: Dinámica. George W. Housner y Donald E. Hudson. 5ta. Edición. Editorial CECSA. Año de 1972. México.

Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática. Ferdinand P. Beer, E Russell Johnston, Jr. Editorial Mc Graw Hill. Edición tercera. Edición de 1979.

Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica. Ferdinand P. Beer, E Russell Johnston, Jr. Editorial Mc. Graw Hill. Edición tercera. Edición de 1979.

Enciclopedia de la Ciencias Larousse. Tomo 2. Física. Ediciones Larousse, S.A. México D.F. Edición de 1974.

Oscilaciones y Ondas Mecánicas. Ing. Sergio L. Reyes Lorente. Editorial Pueblo y Educación. Universidad de la Habana. Edición de 1974.

Física, Volumen 1 : Mecánica . Marcelo Alonso, Edward J. Finn. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, E.U.A. Edición del Año1982.

Física Experimental, para Estudios Elementales y Superiores. C. B. Daish, D.H. Fender. Editorial UTHEA. Edición de 1970. México.

Métodos Numéricos y Programación con Fortran. D. D. McCracken, W. S. Dorn. Editorial Limusa. Edición del Año 1980. México.

Mecánica Vectorial para Ingenieros, Vol.II Dinámica, Harry R. Nara. Editorial Limusa-Wiley, S.A. Edición del Año 1971. México.

Vibraciones Mecánicas, William W. Seto. Serie Schaum, Editorial Mc Graw Hill. Edición del Año 1970. México.

Gravimetría, Recopilación de los Valores de la Aceleración Gravitacional, Observados en el País desde 1941 a 1959. José del C. Qintero Jaime y Rodríguez Peña. División de Geodesia, Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Santafé de Bogotá, año de 1971.