PROBLEMAS DE OPTIMIZACION, CON CABRI

JAIDER ALBEIRO FIGUEROA FLOREZ

JAIME EDUARDO MUÑOZ ACOSTA

MARCOS BETIN
Director

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA

SINCELEJO
2003

PROBLEMAS DE OPTIMIZACION, CON CABRI

JAIDER ALBEIRO FIGUEROA FLOREZ

JAIME EDUARDO MUÑOZ ACOSTA

MARCOS BETIN
Director

Trabajo presentado como requisito parcial, para obtener él titulo de Licenciado en Matemáticas.

UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACION Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA
SINCELEJO
2003

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a las Instituciones y Docentes que hicieron parte de mi formación académica por ser quien debo ser, A mi familia por ser quien soy, y a Dios por estar donde estoy.

Jaider

De manera particular agradecemos a la familia Vergara Florez, por soportar nuestras molestias en los momentos que necesitamos de ellos y de su tiempo, para poder llevar a cabo la transcripción e impresión del presente en su querido hogar.

A nuestro director de trabajo por que por medio de sus exigencias pudimos comprender nuestro grado de ignorancia.

A Tulio Amaya y Jesús Cepeda quienes nos motivaron en el trabajo con las Nuevas Tecnologías.

De manera especial a Fernando Falcòn por su Apoyo y colaboración para llevar a cabo la ejecución del presente en el Colegio Liceo Carmelo Percy Vergara.

DEDICATORIA

Dedico el presente a Dios quien permite mostrar un producto, de uno de sus frutos.

A mi familia quien me brindó su apoyo incansable.

A mis Amigos " Jaime, José Luis, Eder, Edgar, Alfredo, Gabith, José G, Leonidas, Manuel, Sandra, y Vivi", quienes me motivaron para hacer del presente lo mejor posible.

Jaider

A Dios quien guía mis pasos y siempre me acompaña.

A mi madre Francisca a quien quiero mucho y a sufrido tanto.

A mi padre Antonio y mis hermanos quienes me brindaron su confianza y apoyo incondicional. Los Quiero.

A todos mis amigos, en particular a mi compañero Jaider.

Jaime

CONTENIDO

CAPITULO IV

INTRODUCCION

"En la vida del hombre todo sufre cambios. No existe fenómeno de la naturaleza o de la sociedad que escape al fenómeno del cambio, nuestra vida diaria y el mundo que nos rodea son siempre cambiantes, los autos recorren distancias cambiantes en tiempos también cambiantes, la temperatura ambiental cambia dependiendo de la estación del año, la demografía de un país cambia con el paso del tiempo, en fin vivimos en un mundo que experimenta fenómenos de cambio a cada instante[1]".

El estudio de esta serie de fenómenos de cambios, unos debidos a la naturaleza misma y otros producidas por los avances tecnológicos que el hombre ha logrado en el transcurso de su historia, dio origen al "cálculo diferencial" o "matemática de los cambios", en los siglos XVI y XVII. Su propósito era medir los cambios que en los fenómenos se producen, es decir, poderlos cuantificar en un determinado instante, medir cuanto cambian en magnitud de un estado inicial a un estado final, poder decir cuanto crecen, cuanto decrecen a magnitud del mismo en el tiempo, entre otros aspectos. El avance logrado en este campo sirvió para dar solución a problemas de variaciones o cambios que se presentaron en esa época y en particular, a los que hoy conocemos como problemas de optimización.

Resolver problemas de cambios y de optimización, en términos generales "consiste en comprender la existencia de al menos dos variables involucradas en la situación, establecer su papel de dependencia o independencia, mirar sus relaciones y establecer una ley o patrón que permita medir los cambios que estas sufren en un determinado momento". [Flores, 1997].

---

[1] Crisólogo Flores; Formación del concepto de derivada a través de la variación; México 1997.

A nivel del aula, se observa que los estudiantes al ser enfrentados a este tipo de problemas presentan espacios de dificultad que les impiden dar una solución adecuada, quizá por no comprender lo que ocurre a las variables descritas en las situaciones planteadas, al no tener la oportunidad de visualizar los cambios que en ellas ocurren, pues a lápiz y papel las figuras de que nos valemos para modelar la situación permanecen invariantes a lo largo de todo el problema, cuestión que dificulta mirar las relaciones entre las variables e impiden de alguna manera establecer leyes, fórmulas o patrones, necesarios para dar solución a este tipo de problemas. Estos son algunos de los motivos que nos llevaron a proponer este trabajo, encaminado a ofrecer a los estudiantes, una alternativa que les posibilite en primera instancia comprender y luego dar solución a problemas de cambios y en particular a problemas de optimización, apoyándonos en el uso de medios tecnológicos ya sean computadoras o calculadoras como la TI-92 y el software "**Cabri geometre**", pues consideramos que su uso ofrecerá a los estudiantes múltiples ventajas, entre las que destacamos:

- Tener una apreciación real de los cambios ocurridos a las variables que intervienen en las situaciones planteadas.
- A partir de la interactividad, construir modelos adecuados, que les permitan comprender de mejor manera la situación planteada.
- A través del arrastre, observar el papel de dependencia e independencia de las variables implicadas, lo que facilita mirar sus relaciones.
- Permite mayor confianza y seguridad a los estudiantes a la hora de resolver problemas, por cuanto pueden verificar desde varios sistemas de representaciones como las pictóricas, cartesianas y tabulares, la solución a un mismo problema.

El trabajo se desarrollará mediante talleres de tres tipos; Talleres de familiarización al software, Talleres guiados y Talleres de profundización. A través de ellos pretendemos recoger información que nos permita describir como los estudiantes: Abordan los problemas, utilizan y relacionan conceptos, comunican ideas, conjeturas, plantean estrategias de solución, formulan generalizaciones, entre otros aspectos.

El trabajo se estructura en cuatro capítulos: Un primer capítulo en la que se describe el problema que da origen al trabajo, la justificación y los objetivos; El segundo capítulo se refiere al Marco Referencial, las Bases Teóricas que fundamentan el diseño y desarrollo de éste; En el tercer capítulo se ubica el diseño metodológico, en el cual se expone el tipo de estudio, se describe el proceso a desarrollar para tratar el problema planteado, la población y muestra seleccionada; En el cuarto capítulo se muestra el análisis de los resultados obtenidos, conclusiones, algunas recomendaciones, los anexos y los talleres que proponemos.

CAPITULO I

1. PROBLEMA

Espacios de dificultad en la comprensión de problemas de optimización en estudiantes de la Universidad de Sucre de los programas de ingeniería y de licenciatura en matemáticas[2].

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Los planes de estudios universitarios, relacionados con el campo de las ciencias básicas y las ingenierias, han concedido papel fundamental, dentro de la componente de formación básica al estudio del cálculo diferencial, pues se considera parte fundamental en el futuro desempeño profesional de los estudiantes, por lo que es necesario en aspectos como:

- El tratamiento y estudio de fenómenos físicos(campo de la física).
- El análisis del comportamiento de factores como el crecimiento poblacional y la reproducción de ciertas especies(campo de la biología).
- Estudios financieros y de producción de una determinada empresa(campo administrativo).
- Cálculos rutinarios en diseños y construcciones(campo de la ingeniería).

En fin un mundo de situaciones cuyos comportamientos se pueden analizar, se pueden modelar a través del Calculo Diferencial.

De los temas que más merece la atención por parte de los estudiantes durante el estudio del cálculo diferencial, está el relacionado con las “aplicaciones”, entre las que destacamos los problemas de optimización, que se convierten en la piedra en el zapato de muchos de ellos pues como antes mencionamos son problemas complejos cuya solución involucra conceptos de otros campos como: el M.U, M.U.V, las leyes de newton, y otros referidos a

2. Aunque la problemática hace referencia al ámbito universitario, consideramos pertinente afrontarlo desde la educación media, a través del trabajo con situaciones problemas referidas a la optimización mediadas con el software CABRI GEOMETRE. Entre las evidencias del problema a nivel universitario se puede revisar el trabajo de grado “Un estudio exploratorio acerca de la interpretación del concepto de derivada” adelantado por los estudiantes Sandra Rivera y Rafael Ballesta.

la Mecánica y la Estática [**Campo de la Física**]; la semejanza y congruencia de triángulos, el teorema de pitágoras, las relaciones trigonométricas [**Campo de la Geometría**]; exige **la comprensión de conceptos de las matemáticas** como: la proporcionalidad, la variación, variables, dependencia e independencia de variables, funciones, ecuaciones, papel de la derivada en los puntos críticos; **Procedimientos que auxilien estrategias de solución** como: La derivación, Factorización de expresiones algebraicas, operaciones con funciones, resolución de ecuaciones, cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, y la graficación, **la realización de Procesos** como: la modelación, la generalización, abstracción, interpretación y comprensión. Entre otros aspectos, que se consideran hoy día fundamentales para el desarrollo de pensamientos como el métrico, espacial y variacional.

Así pues la dificultad de dar solución a los problemas de optimización quizá radique en la formación matemática que han tenido los estudiantes en el transcurso de los niveles educativos de la básica y la media vocacional, y que al llegar al ámbito universitario se incrementa al tratar de resolver situaciones problemas, como los que plantean los problemas de optimización, que para su solución requieren que estén familiarizado con procesos, procedimientos y comprensión de conceptos como los mencionados anteriormente. Lo que exige entonces un trabajo arduo con los estudiantes que les permitan acceder al desarrollo de estos procesos y crear alternativas de solución apoyadas en el uso de herramientas didácticas que permitan de la mejor manera posible la comprensión de los mismos.

Una prueba exploratoria realizada a estudiantes de grado undécimo, en el colegio Liceo Carmelo Percy Vergara de la ciudad de Corozal[3], da muestra de las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto:

- Comprensión de los conceptos de variación y variable.
- Relación del concepto de variación con las variables.
- Comprensión del concepto de función.
- El abordaje y solución de una situación problema.

---

[3] ver anexos

- La construcción de gráficas.
- El uso de preconceptos para la solución de problemas. Entre otros aspectos.

Quizá los espacios de dificultad que presentan los estudiantes a la hora de resolver problemas están relacionados con la orientación que se les brinda en temáticas relacionadas con el campo de la variación, la cual consideramos fundamental para que puedan lograr los Estándares Curriculares planteados para la media en lo referente al razonamiento proporcional, algebraico, analítico, el tratamiento de las distintas clases de funciones y de variables, entre otros aspectos.

A raíz de esta problemática nos surge la siguiente inquietud:

¿Cómo debería ser una propuesta de trabajo de aula que posibilite a los estudiantes comprender problemas de optimización y los acerque a procesos que les posibilite acceder al desarrollo del pensamiento variacional?

3. JUSTIFICACION

La Educación Matemática en Colombia a sufrido cambios importantes, gracias al trabajo que se ha venido realizando en cuanto a la concientizacion de docentes, para abordar en la escuela la enseñanza de las matemáticas, y la incorporación de nuevas tecnologías como calculadoras y computadoras en este campo, que de alguna manera han revolucionado la nueva forma de ver las matemáticas.

Hoy día en el ambiente escolar se habla de desarrollar en los estudiantes procesos de pensamientos, como el variacional, que permita ir afianzando la comprensión de conceptos como la proporcionalidad, funciones, variables, dependencia e independencia de variables y en manejo de procesos como la modelación, generalización, abstracción, entre otros, que permitan en un determinado momento dar solución a situaciones problemáticas de su vida.

Los lineamientos curriculares plantean que una de las maneras de iniciar el estudio y desarrollo del proceso de la variación en el ámbito escolar, es a partir del abordaje de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica, ya que en el desarrollo de solución de las mismas, el estudiante se acerca a procesos, procedimientos y acciones que les posibilitan acceder al desarrollo del pensamiento variacional.

De igual manera se habla de la importancia que cumplen los medios tecnológicos como las calculadoras graficadoras en esta tarea, ya que facilitan de alguna manera la realización de procesos como la modelación y la generalización a través de la interactividad y exploración de objetos matemáticos, y abren la posibilidad de visualizar sistemas de representaciones como las tabulares, las gráficas de tipo cartesiano y las pictóricas que les permiten mirar la variación desde varios escenarios y verificar resultados obtenidos.

Con él propósito de aportar de alguna manera al mejoramiento de la educación matemática en Colombia y de manera concreta al diseño de estrategias didácticas que posibiliten al estudiante comprender de mejor manera las matemáticas, damos a conocer el presente trabajo basado en la implementación de nuevas tecnologías, más específicamente el uso de la calculadora TI- 92 y el software CABRI, con la finalidad de posibilitar en los estudiantes de undécimo grado la comprensión de ciertos problemas de optimización, a fin de tener un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional a lo largo de la resolución del mismo. Trabajo que con su ejecución ofrecerá a ellos, múltiples ventajas y beneficios, ya que:

- Permite un mejor acercamiento hacia la resolución de problemas de optimización, apreciando de manera real y simultánea variaciones en las variables implicadas en el problema.

- Hace más fácil la identificación de las variables que intervienen en los problemas de optimización, proceso que es vital para la comprensión del mismo.

- Genera en los estudiantes creatividad para solucionar los problemas de optimización, permite construir estrategias de solución, verificarlas y sacar conclusiones, haciendo el proceso de resolución más confiable y de mejor aceptación.

- Permite integrar los campos numérico, geométrico y algebraico.

- Involucra procesos metacognitivos(autorregulación, validación y control).

- Genera motivación en los estudiantes y hace que el aprendizaje sea más significativo y de mayor duración.

- Los problemas de optimización pueden ser solucionados al margen de la teoría de derivadas.

- Los estudiantes de último grado de bachillerato, pueden tener acceso a la solución de problemas de optimización y a los conceptos básicos del cálculo diferencial(máximos, mínimos, entre otros).

De igual manera, si los resultados de su ejecución son satisfactorios:

- Sirve como estrategia didáctica a profesores, para mostrar a los estudiantes una nueva forma de afrontar los problemas de optimización, en el curso de cálculo diferencial.

- En el marco de la Resolución de problemas contamos con un nuevo instrumento para solucionar problemas como los que nos plantean los problemas de optimización.

El trabajo se considera pertinente porque:

- En la actualidad se habla de la necesidad de apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje, con el uso de nuevas tecnologías, como computadoras y calculadoras, con miras a mejorar la calidad de la educación.

- El gobierno, a través del Ministerio de Educación Nacional(MEN), esta dotando a las Instituciones educativas de estos recursos tecnológicos, para el mejoramiento de la enseñanza de las ciencias y en particular de las matemáticas.

- Se trata de una temática de gran importancia en todo plan de estudio escolar o universitario, ya que devengan una serie de procesos, procedimientos, uso de preconceptos y de otros campos de la ciencia como la Geometría y la Física, importantes para el desarrollo de pensamientos como el métrico, espacial y el variacional.

- Las situaciones problemáticas hoy día se consideran eje principal del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.

Se considera viable por cuanto:

- La mayoría de las instituciones educativas del país, cuentan con al menos una sala de informática o laboratorio de matemáticas.

- El programa educativo CABRI, es fácil obtenerlo en cualquier parte del país.

- Su ejecución, no requiere de alto presupuesto.

- Se cuenta con tiempo disponible para su ejecución, talento humano y suficiente material bibliográfico

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

Posibilitar la comprensión de problemas de optimización a través de la ejecución de un trabajo de aula auxiliado con el programa educativo **CABRI**, a fin de tener un acercamiento a procesos[4] que posibiliten el desarrollo del pensamiento variacional durante la resolución de los mismos.

4.2. OBJETIVO ESPECIFICO

Proponer un trabajo de aula que contribuya a posibilitar la comprensión de problemas de optimización a través de talleres con el uso del programa educativo CABRI GEOMETRE a fin de posibilitar el desarrollo del pensamiento variacional durante la resolución de los mismos.

[4] Procesos como : Interpretar, Modelar, Generalizar, Abstraer, Comunicar, Razonar.

CAPITULO II

5. MARCO REFERENCIAL

5.1. MARCO DE ANTECEDENTES

Muchos son los estudios que se han realizado en aras de facilitar en los estudiantes el aprendizaje del cálculo diferencial o cálculo de las variaciones, utilizando como herramienta didáctica medios tecnológicos, como computadoras y calculadoras que sin duda han dado resultados interesantes. A continuación se presentan algunos de estos trabajos, relacionados de alguna manera con la temática motivo de estudio.

EXPLORANDO SIMETRÍAS CON CABRI
CARMEN TOSCANO
COLEGIO ANTONIO LENIS (SINCELEJO-SUCRE , 2001)

Propósito: Identificar las propiedades fundamentales de la simetría central utilizando la calculadora TI 92 y el programa educativo Cabri,

Conclusión: El ambiente proporcionado por Cabri Geometre permitió a los alumnos la identificación de propiedades y la reflexión acerca de las preguntas hechas, es decir, el ambiente actuó como mediador en la formulación de preguntas, a la vez que aportó herramientas para explorar dichas preguntas, situación un tanto difícil de obtener cuando trabajamos con papel y lápiz puesto que el dibujo es una representación estática que no permite percibir si las propiedades se mantienen cuando varia uno de los componentes de la figura.

LA TECNOLOGIA AL SERVICIO DEL RACIOCINIO MATEMATICO

VIVIANA, BARILE
UNIVERSIDAD NACIONAL ANDRES BELLO, CHILE,

Objetivo: enseñar a pensar matemáticamente, que permita que el proceso aprender a aprender sea más eficiente y formar un alumno con raciocinio matemático que tenga habilidad para modelar y resolver problemas de la vida real y que además utilice eficientemente la tecnología computacional en la solución de problemas matemáticos.

Conclusión: se pudo concluir que los alumnos tienen una mayor confianza y una mejor actitud hacia las situaciones problemáticas nuevas y al finalizar este separaron algunas dificultades del calculo aritmético; y en los profesores se vio una creatividad y una disposición positiva.

PROGRAMA DE INVESTIGACION: CALCULADORAS GRAFICAS Y PRECALCULO

PEDRO GOMEZ, VILMA MEZA
UNIANDES

Propósito: Explorar los nuevos aspectos del sistema curricular con motivo de la utilización de la calculadora gráfica.

Conclusiones: Se obtuvo un cambio de visión acerca de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de recursos en el aula.

REFLEXION ACERCA EL USO DEL COMPUTADOR EN EDUCACION PRIMARIA Y SECUNDARIA

ALVARO GALVIS

Propósito: Analizar el potencial didáctico que puede tener el uso de apoyos informáticos, para enriquecer la educación en los niveles primario y secundario.

Conclusiones: La educación puede apoyarse en la informática tomando como medio para explorar, reflexionar, simplificar el trabajo y amplificar las capacidades de los alumnos y docentes.

UN EXPERIMENTO SOBRE EL COMPUTADOR Y LA ENSEÑANZA DEL CALCULO

HECTOR J MARTINEZ

Propósito: comparar ventajas y desventajas al enseñar un primer curso de cálculo, utilizando el computador.

Conclusión: Con el uso del computador se presenta mas claridad sobre los conceptos presentados y una mejor habilidad para plantear y resolver problemas.

PUNTOS CRITICOS: SECUENCIA DIDACTICA BASADA EN LA GRAFICACION

BERTHA IVONNE SANCHEZ LUJAN
INSTITUTO TECNOLOGICO DE CD. JIMENEZ. MEXICO

Objetivos: Al aplicar la secuencia didáctica de máximos y mínimos, apoyados en la graficación, pretendemos que mediante la visualización los estudiantes obtengan información gráfica para la solución de problemas; Analizaremos además como sé interacciona ante esa visualización esperando que al final el estudiante presente una definición preliminar de máximos y mínimos.

Conclusiones: Los estudiantes observan las gráficas y trabajan en equipo para responder las preguntas hechas por el profesor, participan en las conclusiones del tema, presentan ante los demás en el pizarrón, lo que lleve a que cuenten con herramientas suficientes para la solución de problemas por medio de una participación más activa, se percibe un mejor entendimiento al manejar las gráficas, se resuelven gráficamente problemas cotidianos logrando un mejor interés en la clase.

EL PAPEL DE LA VARIACION EN LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES EN SITUACIONES ESCOLARES.

EVELIA RESENDIZ, RICARDO CANTORAL
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE TAMAULIPAS, MEXICO, 1992

Objetivo: Conocer el papel que juega la variación en las explicaciones del profesor y cual son los cambios que en sus explicaciones hacen ellos cuando tratan con una noción compleja.

Conclusiones: Hemos encontrado que las explicaciones es uno de los medios que utiliza el profesor para hacer comprender o dar sentido; Es el objeto de una comunicación, de un debate, una discusión. Estas explicaciones se modifican en la medida que se den las interacciones con los alumnos. Identificamos algunas categorías de la variación, en las explicaciones de los profesores, tales como: Una resta, en la tabulación(variación numérica de los puntos), la gráfica(varían puntos notables o puntos genéricos), en el álgebra(la variación de los parámetros), verbal, pendiente de una recta igual al cociente de variación, variación funcional, variación como un incremento infinitesimal, variación diferencial, entre otras.

ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES Y LA UTILIZACION DE LAS CALCULADORAS GRAFICADORAS TI –92.

ANABELLIE CASTRO, FREDY ARAYA RODRIGUEZ
ESCUELA DE CIENCIAS Y LETRAS INSTITUTOTECNOLOGICO,COSTARICA

Objetivos: Analizar el impacto del uso de la calculadora TI –92 en el proceso de enseñanza y aprendizaje para el caso particular del análisis de funciones y sus aplicaciones y determinar cual puede ser una metodología adecuada para su implementación.

Conclusiones: Se encontró que los estudiantes fueron capaces de leer tablas y gráficas dadas, pero presentaron mucha dificultad en la interpretación de estas.

Se detectó una dificultad que presentan los estudiantes al trazar una gráfica de velocidad constante de una gráfica lineal de distancia tiempo, a un cuando ellos se dan cuenta que la velocidad no cambia con el tiempo. La mayoría de los sujetos traza la misma gráfica de posición lineal.

Otras de las observaciones interesantes es la dificultad que muestra al describir secciones horizontales de gráfica de totales o dar el cambio ocurrido en ese intervalo.

5.2. MARCO TEORICO

Las teóricas sobre las que se sustenta el presente trabajo las clasificaremos de la siguientes manera:

- Teorías sobre construcción del conocimiento.
- Teorías sobre el uso de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas.
- Teorías sobre el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

5.2.1 TEORÍAS SOBRE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

5.2.1.1 LA TEORÍA PIAGETANA.

Para Piaget, el aprendizaje consiste en el pasaje de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento. Piaget postula la existencia de una serie de organizaciones internas de la experiencia y de la información previa del sujeto (sus estructuras cognitivas), que son cada vez más poderosas y permiten integrar la información de modos crecientemente complejos. Las estructuras cognitivas evolucionan hacia un pensamiento cada vez más estable, que es capaz de incorporar en sus explicaciones un número creciente de situaciones del mundo físico y del entorno cognitivo. Piaget intenta explicar los mecanismos de adquisición y de utilización de los conocimientos a partir de la génesis de las operaciones lógico -. Matemáticas subyacentes a toda actividad intelectual.

Las etapas sucesivas del desarrollo cognitivo del niño, son resultado – según Piaget – de la experiencia y de la acción del sujeto que actúan como motores de la construcción, e incluso de la reconstrucción de las representaciones internas que el niño se hace del medio físico, inicialmente percibido y comprendido de manera intuitiva. Piaget sostiene que en lo esencial, el desarrollo cognitivo parte de la puesta en marcha de conocimientos concretos, sostenidos primero en representaciones inmediatas y posteriormente en hipótesis (construcción de la inteligencia abstracta). Se trata de un largo proceso de organización del mundo marcado por adquisiciones relacionadas con los conocimientos y con la utilización de sistemas de relaciones entre objetos (clasificación, seriaciones), entre los objetos y el sujeto (el tiempo y el espacio), y finalmente entre los objetos, el sujeto, el tiempo y el espacio.

Piaget recuerda que la maduración y la influencia social no son ajenas al proceso del incremento de conocimientos. Sostiene que el desarrollo de los aprendizajes es igualmente la consecuencia de un factor importante como es la **Equilibración**.

La Equilibración de las estructuras cognitivas traduce el pasaje de un estado de menor equilibrio que resulta de respuesta del sujeto a las perturbaciones exteriores, hacia un estado de equilibrio superior que corresponde a posibilidades nuevas derivadas de una estructura cognitiva más poderosa. Así, en el dominio del desarrollo Lógico - matemático, ilustrado por la adquisición de las conservaciones, Piaget muestra que, en el curso del desarrollo el niño pasa por tres momentos clave: Las perturbaciones, las compensaciones y la puesta en correspondencia matemática. En el conjunto de desarrollo, los progresos en el conocimiento resultan de una construcción en la que el sujeto es el actor de sus aprendizajes en interacción con el mundo. La concepción del aprendizaje es resueltamente constructivista. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo objetiviza y lo representa. [*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; MEN, Pag 47*].

5.2.1.2 ASPECTOS SOCIOCOGNITIVOS DEL APRENDIZAJE: LA TEORÍA DE VYGOTSKY

Las corrientes de investigación que comparten la tesis de que la interacción del individuo con el medio social es determinante de sus adquisiciones cognitivas, se apartan de los acercamientos que privilegian la interacción intra – individual del aprendizaje.
Vygotsky concibe el desarrollo cognitivo como la apropiación por parte del individuo, de las actividades humanas depositados en el mundo de la cultura.

LA ZONA DE DESARROLLO PROXIMO

La tesis de Vygotsky significa que las capacidades de aprendizaje de un niño no deben ser confundidas con el nivel cognitivo que tiene en un determinado momento. En un dominio cualquiera, existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones. Este potencial de aprendizaje que se actualiza en la interacción social, define uno de los conceptos centrales de la teoría de Vygotsky: La zona de desarrollo próximo. La zona de desarrollo próximo es una componente crucial del proceso de desarrollo porque presagia y prepara lo que el niño mas tarde realizará por si solo: "Lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro lo podrá hacer solo mañana". El aprendizaje antecede al desarrollo: La zona de desarrollo próximo asegura la vinculación entre ambos. El docente debe ajustar los contenidos y las condiciones de instrucción, no a las capacidades actuales del niño, sino a su potencial de progreso.[*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; MEN, Pag 51*].

EL CONFLICTO SOCIOCOGNITIVO

En ciertos momentos cruciales para el desarrollo, se sostiene que las adquisiciones encuentran su origen principalmente en la confrontación de las acciones o de las ideas entre las personas. Las adquisiciones engendradas socialmente en las interacciones, serán interiorizadas para su posterior movilización individual (de lo ínter a lo intra - individual).

Los trabajos de PERRET- CLERMONT(1996), han mostrado que para alcanzar el progreso cognitivo, las interacciones sociales deben dar lugar al conflicto sociocognitivo. Ante una situación problema por resolver, los participantes en una interacción deben por una parte, presentar diferentes centraciones cognitivas (puntos de vista, métodos, respuestas,...) y, por otra parte, buscar una respuesta común al problema.

El conflicto sociocognitivo integra dos conflictos

- Por una parte, un conflicto ínter – individual (y por lo tanto social) generado por la oposición de respuestas al problema planteado, y por otra parte,
- Un conflicto intra – individual, de naturaleza cognitiva, resultante en la toma de conciencia por el individuo de una respuesta contradictoria, que le incita a dudar de la suya.

El conflicto sociocognitivo favorece la actividad cognitiva

5.2.1.3 EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO [AUSUBEL]

Para D.P. AUSUBEL el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno. AUSUBEL critica la enseñanza tradicional en que el aprendizaje resulta poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar formando un todo relacionado. Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello lo que se comprenda será lo que se aprenda y recordará mejor por que quedará integrado en las estructuras de conocimiento de cada cual.

La teoría del aprendizaje significativo es una introducción a la sicología del aprendizaje en el salón de clases, que se ocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de las estructuras de significados en el alumno. El principio básico de esta teoría reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van relacionadas de modo no arbitrario; es decir de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso la recomendación Ausubeliana se basa en averiguar primero lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia(Ausubel, Norak y Hannesian, 1976).

LA META DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

En este tipo de aprendizaje, el alumno tiene un método para vincular los aspectos sustanciales de los nuevos conceptos, de la información o de las situaciones con los componentes importantes de la estructura cognoscitiva existente de formas diversas que hacen posible la incorporación de relaciones derivadas, elaboradas, correlativas, confirmativas, calificadoras o representativas. Según la naturaleza de la tarea de aprendizaje, la meta puede ser o bien descubrir o simplemente aprender a incorporar tales relaciones.

EL MATERIAL POTENCIAL SIGNIFICATIVO

Una meta o método significativo de aprendizaje da como resultado un proceso y una consecuencia de aprendizaje con sentido, siempre que el material de aprendizaje sea en si mismo potencialmente significativo. Si el material de aprendizaje fuera simplemente considerado significativo, el proceso de aprendizaje seria completamente superfluo; el objeto de aprendizaje se habría ya por definición.
Para que se de un aprendizaje significativo es necesario que se presenten de manera simultánea, por lo menos las tres siguientes condiciones:

PRIMERA: El contenido del aprendizaje debe ser potencialmente significativo, es decir, debe permitir ser aprendido de manera significativa.

SEGUNDA: El estudiante debe poseer en su estructura cognitiva los conceptos utilizados previamente formados, de manera que el nuevo conocimiento pueda vincularse con el anterior.

TERCERA: El alumno debe manifestar una actitud positiva hacia el aprendizaje significativo, debe mostrar una disposición para relacionar el material de aprendizaje con la estructura cognoscitiva natural que posee.

Las tres condiciones deben estar presentes simultáneamente y que su ausencia, así fuera de una sola de ellas impediría que se diera un aprendizaje significativo. Lo anterior significa que un material potencialmente significativo, puede no ser aprendido significativamente.

5.2.1.4 APRENDIZAJE COLABORATIVO Y EL TRABAJO EN GRUPO

Se define como la adquisición y construcción de conocimientos o destrezas con la ayuda de la interacción con los compañeros, bien sea esta interacción en forma de críticas, comparaciones, discusiones sobre los distintos puntos de vista, etc. Se ha demostrado en varias ocasiones que el trabajo en grupo es favorable al aprendizaje, ya que facilita cambios cognitivos, conllevan a discusiones que surgen de los distintos puntos de vista de los compañeros y además los distintos razonamientos que se exponen conllevan a un aprendizaje y una interacción CONSTRUCTIVISTA. [Joiner, Miyake, 1990]
De manera general, los resultados de investigaciones según la cual el trabajo colectivo es un factor de progreso cognitivo. Sin embargo, en ciertas ocasiones de co – acción, los aportes de cada uno de los miembros del grupo son menores que las de los sujetos cuando trabajan solos.

En suma seria ilusorio pensar que el simple hecho de poner a trabajar en grupo a los alumnos nos garantiza automáticamente un progreso, si no se modifican sustancialmente las relaciones y los acuerdos de trabajo en el salón de clases.

La organización de situaciones tutoriales puede permitir a los estudiantes poco aventajados, beneficiarce del trabajo con los alumnos más avanzados.

5.2.1.5 LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDACTICAS [Brousseau]

Para Brousseau, desde la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. Sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y el diseño de las buenas preguntas que generen los conflictos cognitivos y sociocognitivos detonadores del aprendizaje; estas buenas preguntas constituyen las situaciones didácticas. [*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; MEN, Pag 56*].

La teoría de las situaciones didácticas pone al profesor en una interacción asimétrica con respecto a los estudiantes puesto que es él quien conoce los propósitos y efectos didácticos de la situación presentada. Sin embargo en el desarrollo de la actividad cognitiva, los participantes desarrollan una interacción simétrica en la búsqueda de soluciones a la situación planteada.

LA SITUACION PROBLEMA

La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero, a la vez, debe ser accesible a él.
- Debe permitir que el alumno use conocimientos anteriores.
- Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.
- Debe contener su propia validación.

La resolución de una situación problema supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación problema. [*Ibidem, Pag 56*]

5.2.1.6 LA COGNICION SITUADA

En los años recientes, la investigación en educación matemática ha tenido como uno de sus interese principales demostrar que el aprendizaje y la practica de las matemáticas no son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar. Que la Enseñanza y el Aprendizaje siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales que no solo tienen una influencia sino que determinan la naturaleza del conocimiento construido. [*ibidem, Pag 58]*

Las investigaciones realizadas desde la perspectiva situada sostienen que los factores sociales y lingüísticos son básicos para el estudio de los procesos de aprendizaje. En particular del aprendizaje de las matemáticas.

5.2.2 TEORIAS SOBRE ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

5.2.2.1 LA RESOLUCION DE PROBLEMAS [POLYA Y SCHOENFELD]]

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático[5]

En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje principal del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

---

[5] Lineamientos Curriculares, Matemáticas; Ministerio de Educación Nacional; Bogotá D.C. 1998.

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores POLYA y ALAN SCHOENFELD.

Para Polya "resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, de salir de una dificultad, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados".

Polya describe las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva.

Alan Schoenfeld, considera que en el proceso de resolver problemas, influyen los siguientes factores:

- **El dominio del conocimiento**, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

- **Estrategias cognoscitivas**, que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir un problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y error, uso de tablas, la búsqueda de patrones, y la reconstrucción del problema.

- **Estrategias metacognitivas**, se relaciona con el monitoreo y el control y acciones tales como planear, evaluar y decidir.

- **El sistema de creencias**, Se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima la persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras. [*Serie Lineamientos Curriculares, MEN*]

5.2.2.2 UTILIZACION DEL CONOCIMIENTO Y DE LAS ESTRATEGIAS EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS[6]

Los conocimientos almacenados sobre el contenido no son capaces por si solos, de resolver los problemas. Debe existir también un mecanismo que dirija la búsqueda mental por las redes, para recuperar la información. Y debe existir un mecanismo que permita generar y probar de forma activa las nuevas relaciones entre conceptos y estructuras, cuando la información que se necesita no está almacenada exactamente de la forma que se necesita.
Las teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento, un repertorio de estrategias de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados, y a generar relaciones nuevas entre los ítems almacenados en la memoria por separado. Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento, y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que sea capaz de resolver la tarea planteada. Por lo tanto debemos considerar tres aspectos fundamentales que ligan tanto los tipos de estructuras matemáticas que poseen las personas, los tipos de rutinas algoritmicas como las estrategias que poseen para acceder a sus conocimientos:
1) Como se representan los problemas; 2) Cómo sé interrelacionan las características del entorno de la tarea con el conocimiento de un individuo; y 3) Cómo se analizan los problemas y Cómo se exploran las estructuras del conocimiento para conseguir asociar a una tarea la información que en un principio no se había relacionado con la misma.

5.2.2.3 LA MEDIACION INSTRUMENTAL

La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido nuevos órganos para la adaptación al mundo exterior.

[6] LAUREN RESNICK, WENDY FOR; la Enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológico.

En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del principio de mediación instrumental que se puede expresar de la siguiente manera: Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico. En este principio convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. [*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; MEN, Pags 57 - 58*].

En el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas [Duval, 1998].

5.2.2.4 NUEVOS SISTEMAS DE REPRESENTACION, [Enfoque de DUVAL, 1998]

En la actualidad, los instrumentos computacionales(calculadoras algebraicas como la TI-92, las computadoras) encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: Son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privadas de los seres humanos.

Estos nuevos sistemas de representación(ejecutables) permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognitivos. Esto quizá nos este indicando que un cambio central dentro la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de fluidez algoritmica y sustituirlo por e objetivo de fluidez representacional, es decir, que el estudiante pueda representar un problema en varios sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se le de a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga. [*Ibidem, Pags 58, 59*]

Las matemáticas como toda actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo las tecnologías se tornan invisibles y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas independientes de aquella tecnología. Surge así la noción de una actividad matemática pura, al margen de su entorno sociocultural.

Los sistemas de representación clásicos (álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.) tienen una característica central: Son sistemas de representación diseñados para poder actuar sobre ellos mediante reglas de transformación bien definidas. Un caso elemental lo constituye la aritmética. En cambio, las representaciones ejecutables necesitan la mediación de un procesador sintáctico, como es un lenguaje de programación. Allí se transforma el trabajo cognitivo del estudiante: La actividad de construcción de significados se torna central.

5.2.3 TEORÍAS SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

5.2.3.1 LA TECNOLOGIA Y LA RESOLUCION DE PROBLEMAS[7].

Hace algunos años, cuando la computadora empezó a vislumbrarse como un instrumento importante capaz de realizar diversas operaciones de manera eficiente y rápida, también se empezó a vislumbrar su potencia en la educación. En esta discusión hubo varias posiciones donde se señalaba la necesidad de tener más información acerca de cómo este instrumento podría utilizarse en el aprendizaje de varias disciplinas.

En Matemáticas por ejemplo, muchos profesores no permitían a sus estudiantes el uso de la calculadora en la resolución de problemas; esto era porque creían que la calculadora le restaba al estudiante posibilidades de desarrollar habilidades básicas necesarias en matemáticas (cálculos aritméticos, manipulaciones algebraicas, análisis discreto del comportamiento de relaciones o funciones matemáticas, etc.).
La discusión acerca de si los estudiantes deben o no usar instrumentos como la calculadora o la computadora en sus experiencias de aprendizaje está relacionada directamente con la pregunta: ¿Qué es lo que importa que el estudiante aprenda en matemáticas?. El estudiante debe ser escéptico, hacer conjeturas, buscar evidencias, utilizar ejemplos y contraejemplos,

---

[7] LUZ MANUEL SANTOS TRIGO; Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas; Segunda Edición; Grupo Editorial Iberoamérica

y apoyar sus ideas con argumentos. El uso de la tecnología juega papel importante en el desarrollo de habilidades matemáticas por parte del estudiante, es decir, la tecnología ayuda a que el estudiante no sea solo un espectador o receptor del conocimiento, sino que pase a ser un ente activo vinculado directamente con el quehacer matemático.

Afortunadamente se ha reconocido la importancia del uso de la computadora en el aprendizaje y ahora el asunto es determinar cómo debe usarse este instrumento en las experiencias de aprendizaje de los estudiantes.

5.2.3.2 LAS CALCULADORAS ALGEBRAICAS Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS.

Son numerosos los trabajos que consideran las implicaciones posibles de las tecnologías informáticas, en particular de las calculadoras graficadoras, para el curriculum. En términos generales, el punto de vista adoptado por los distintos autores consiste en estimar el impacto sobre la práctica escolar de dichos instrumentos. Es decir, su punto de vista consiste en imaginar (y evaluar) el desarrollo del trabajo escolar cuando las calculadoras se introducen en un curriculum ya establecido. [*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnolgías en el aula de Matemáticas; MEN, Pag 93*].

En este sentido el papel de los instrumentos va más allá que el de servir de prótesis para la acción. La presencia de tales instrumentos puede re-organizar todo el funcionamiento cognitivo [Wertsch, 1993, pag 46]. Por ejemplo puede contribuir al re-diseño de las estrategias de resolución de problemas y a la re-conceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación. No olvidemos que: "Todo aprendizaje está mediado por instrumentos". [*Ibidem, Pags 93, 94*]

5.2.3.3 LA CALCULADORA COMO AMPLIFICADOR Y REORGANIZADOR DEL APRENDIZAJE.

Frente a la calculadora, estamos entonces ante dos posibilidades:

- Entenderla como herramienta de amplificación
- Entenderla como herramienta de reorganización cognitiva.

En realidad, es inevitable que al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una nueva actividad matemática que, a su vez, genere una reorganización del conocimiento de los estudiantes.

Uno de los objetivos de la investigación en este terreno es tratar de entender cómo hay que realizar la implementación de la tecnología. Bien sabemos que la primera etapa puede implicar que tengamos que trabajar dentro del marco de un curriculum ya establecido. Pero las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de erosionar los curriculos tradicionales. Aquí es donde la comprensión que alcancemos sobre el conocimiento producido con la mediación de las harramientas informáticas, se torna necesaria. [*Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; MEN, Pag 94*].

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a un nivel de realidad novedoso. Se abre la posibilidad de estudiar algo nuevo y con ello, de acceder a un conocimiento nuevo.

La diferencia entre el impacto amplificador y el impacto reorganizador de las tecnologías puede apreciarse si distinguimos entre los efectos mientras se trabaja con la tecnología y los efectos que resultan de haber trabajado con la tecnología. La reorganización no puede separarse de la amplificación [Dorfler, 1993, p. 165].

5.3 MARCO CONCEPTUAL

5.3.1 ¿QUÉ ES CABRI GEOMETRE?

Cabri es un programa computacional desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellamain y Jean-Marie Laborde del **laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del instituto de informática y matemáticas aplicadas Genoble, Francia de la Universidad Joseph Fourier con el apoyo del centro Nacional de la Investigación Científica de Francia**.

Es un programa netamente geométrico, es decir, un programa que ayuda a estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes, para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones. En ningún caso el programa tiende a desplazar la labor del profesor en la clase o del texto guía, simplemente es otra ayuda al servicio del estudiante para afianzar sus conocimientos.

Fue desarrollado para permitir la exploración y manipulación directa y dinámica de la geometría, a través de la interacción didáctica. Es un medio de trabajo donde el estudiante tiene la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma que los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que no es posible tener de otra forma. Por consiguiente es natural esperar que los estudiantes que trabajen con Cabri podrán avanzar en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que ofrecen los medios tradicionales. Los estudiantes que trabajen con el programa serán capaces de enfrentar problemas diferentes y más amplios.

5.3.2 EL RAZONAMIENTO

Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos.

De manera general, entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del como y el porque de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

5.3.3 LA COMUNICACIÓN

Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos. Los retos que nos plantea el siglo XXI requieren que en todas las profesiones científicas y técnicas las personas sean capaces de saber comunicarse.

A nivel de aula, para que el estudiante pueda comunicarse matemáticamente, necesitamos establecer un ambiente en clase tal que la comunicación sea una practica natural y que permita que los estudiantes:

- Adquieran seguridad para hacer conjeturas, para preguntar, para explicar, para argumentar y para resolver problemas.
- Se motiven a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.
- Escriban sobre las matemáticas y sus impresiones y creencias en cualquiera actividad de evaluación.
- Hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficas, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.
- Frecuentemente estén pasando del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.

5.3.4 LA MODELACION

Actualmente con la aparición de la era informática, uno de los énfasis que se hace es la búsqueda y construcción de modelos matemáticos. La tecnología moderna seria imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta.

La **resolución de problemas** en un amplio sentido se considera en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la Modelación.

Treffers y Goffree, describen la modelación como "una actividad estructurante y organizada, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas". Ellos proponen que para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema n diferentes formas.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema sea transferido a un problema más o menos matemático, puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas, para la cual se pueden realizar las siguientes actividades:

- Representar una relación en una fórmula
- Probar o mostrar regularidades
- Reafinar y ajustar modelos
- Utilizar diferentes modelos
- Combinar e integrar modelos
- Formular un concepto matemático nuevo y hasta generalizar.

5.3.5 LA MEDICION[8]

Medir es la tercera actividad universal e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor o importancia. Aunque todas las culturas reconocen la importancia de ciertas cosas, de nuevo vemos que no todas las cultura valoran las mismas cosas en la misma medida. Gran parte depende del entorno local y de las necesidades que este provoca.

Medir se ocupa básicamente de comparar cosas en función de una cualidad compartida, y su desarrollo va de las comparaciones de pares a las comparaciones de muchos, y de las unidades normalizadas y los sistemas de unidades. La noción de cualidad como cantidad continua está ahí (a diferencia de las cantidades discretas al contar) y, en consecuencia, los problemas explicados por la medición son problemas que responden a la pregunta ¿Cuánto? a diferencia de los que responden a la pregunta ¿Cuántos? Que genera la actividad de contar.

5.3.6 LA GENERALIZACION

Se concibe como la manera de abstraer lo que es común y esencial en muchas cosas para formar un concepto que las comprenda a todas. Se generaliza cuando abarcamos a un conjunto de objetos, a partir del establecimiento de patrones de regularidad. La generalización se introduce a partir del estudio de los cuantificadores.

5.3.7 LA VARIACIÓN

Es considerado como uno de los ejes conceptuales más importantes evaluados por el ICFES en el área de las matemáticas. En este eje se incluye el concepto de variable como articulador de los problemas que se plantean. Desde este concepto, es posible indagar por

[8] ALAN J. BISHOP; Enculturación Matemática(La Educación Matemática desde una perspectiva cultural); Temas de educación “Paidós”; España 1999.

las diferentes significaciones sobre “lo que cambia” en una situación determinada; el reconocimiento de diversos elementos asociados a situaciones de variación, como reglas de transformación, universos numéricos; reconocimiento y uso de regularidades, patrones; sentido y uso de las relaciones que se posibilitan desde estas situaciones, (como ecuaciones, inecuaciones, funciones); sentido, significado y uso de distintas formas de representación en situaciones de variación[9].

5.3.8 FUNCION (Algunas ideas sobre su concepto y posibles maneras de abordarla en la escuela)

Indudablemente uno de los primeros conceptos matemáticos que aparecieron en la humanidad es el de **Función**. Es muy posible que antes de aparecer la noción de número entero, el hombre haya utilizado la asociación de cantidad con algún objeto. KLEINER (1980), menciona que 3700 años antes de aparecer el concepto de función se tenían anticipaciones del mismo. Lo cierto es que, se tenían registros en tablillas babilónicas de relaciones entre números y sus cuadrados, números y sus raíces cuadradas. Para que el concepto de función llegara a surgir se requirió del desarrollo de cuestiones fundamentales en las matemáticas como: la extensión del concepto de número (de los enteros a los complejos), la geometría, el álgebra simbólica, la unión de ambas y la introducción del movimiento como un problema central en la ciencia.

La palabra “Función” apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz de agosto de 1673 y en particular en el titulado “The inverse method of tangents or abaut functions” y fué introducida para designar un objeto geométrico asociado con una curva. La notación “f(x)” fué introducida por Clauriant y definida por Euler alrededor de 1734. Además EULER fue el primero en darle al concepto de función un papel central y explícito en su “Introduction analysis Infinitorum”, este define a una función como una cantidad variable, como una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esa cantidad variable y números ó cantidades constantes. EULER mismo menciona que cualquier curva dibujada a

[9] Documento de orientación (Examen de Estado), ICFES, pag 63, Santafe de Bogotá 2002.

mano libre en un lugar determina una relación funcional que puede no ser representada, ya sea explícita o implícitamente, en forma analítica ordinaria[10]

Según lo establecido en los Lineamientos Curriculares el estudio de las Funciones tiene más sentido sí se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio. Es importante que los alumnos se sensibilicen ante los patrones que se encuentren a diario en diversas situaciones, a describirlos y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones.

Las tablas son otra forma de introducir la noción de Función, se pueden usar posteriormente para llevar los estudiantes a la graficación de situaciones problemas de tipo concreto. La identificación de la variable dependiente e independiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas.

Por su parte las gráficas cartesianas sirven para mirar la relación explícita entre las variables que determinan una gráfica que puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de **Función como dependencia**.

5.3.9 LOS PROBLEMAS DE CAMBIOS Y DE OPTIMIZACION

Para **Crisologo Florez**; resolver problemas de cambios y de optimización, en términos generales consiste en comprender la existencia de al menos dos variables involucradas en la situación, establecer su papel de dependencia o independencia, mirar sus relaciones y establecer una ley o patrón que permita medir los cambios que estas sufren en un determinado momento.

Los lineamientos curriculares plantean la importancia de abordar en la escuela situaciones problemáticas referidas a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica como los

[10] Carlos Cuevas y otros. Una propuesta constructivista, para la enseñanza del concepto de función, en un entorno inteligente de aprendizaje. Universidad de Sonor.

problemas de optimización, ya que a través de su solución se puede dar inicio al estudio y desarrollo del proceso de la variación en el ámbito escolar y además el estudiante se acerca a procesos, procedimientos y acciones que le permiten acceder al desarrollo del pensamiento variacional.

5.3.10 PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS[11]

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar alguno de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrado la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- La función como dependencia y modelos de función;
- Las magnitudes;
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- Modelos matemáticos de tipos de variación: Aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio relativo y el cambio absoluto. La proporcionalidad cobra especial significado.

[11] Lineamientos curriculares

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representaciones asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional, la mecánica, las formulas y las expresiones analíticas.

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucre procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las formulas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación.

Las tablas se pueden usar posteriormente para llevar los estudiantes a la graficación de situaciones problemas de tipo concreto. La identificación de la variable dependiente e independiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas.

Por su parte las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados.
Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia. Los contextos donde aparece

la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.

En lo que concierne a la conceptualización de lo que se entiende por pensamiento variacional, rescatamos:

"El pensamiento variacional Puede describirse, aproximadamente, como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas de tal forma que covarían de forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos de la realidad. Como la covariación de cantidades de magnitud en el tiempo"[12]

Es importante resaltar el hecho de que pensamiento variacional NO ES SOLO:

- Saber la definición de función.
- Saber fórmulas de áreas y volúmenes.
- Saber los modelos usuales de la física matemática.
- Saber dibujar y manejar gráficas de las funciones cartesianas.

Si no que su propósito fundamental apunta a tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad Y que su desarrollo sólo es posible en la medida que el estudiante pueda lograr desarrollar:

- Pensamiento numérico.
- Pensamiento métrico.
- Pensamiento proporcional.
- Una notación apropiada.
- El pensamiento espacial, espacio temporal.

---

[12] Carlos Vasco. Seminario Internacional de Matemáticas y Nuevas Tecnologías realizado en Bogotá en el mes de mayo del 2002.

- Representaciones semióticas diferentes (gestuales, representaciones de máquinas y circuito, representaciones sagitales)

Y que en el trabajo de aula se posibilite adelantar acciones como:

- Captación del patrón de variación.
- Creación del modelo mental.
- Echar a andar el modelo.
- Confrontar el modelo.
- Revisar el modelo mental.

Siguiendo a Vasco, para poder lograr desarrollar el pensamiento variacional es necesario que el estudiante modele procesos y fenómenos de la realidad. Entendida la modelación como:

- Un arte.
- El arte de producir modelos matemáticos.
- Un arte del que depende cualquier progreso de la ciencia.
- Un **modelo** es un Sistema de componentes, relaciones y transformaciones.

5.3.11 LA COMPRENSION DE PROBLEMAS [Polya][13]

Es tonto el contestar a una pregunta que no se comprende. Es deplorable trabajar para un fin que no se desea. Sin embargo, tales errores se cometen con frecuencia, dentro o fuera de la escuela. El maestro debe tratar de evitar que se produzca en su clase. El alumno debe comprender el problema, Pero no solo debe comprenderlo sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy fácil ni muy difícil, y debe dedicarse tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante. Ante todo el enunciado verbal del problema debe ser comprendido. El alumno debe estar en condición para separara las partes principales del problema, la incógnita, los datos y las condiciones del problema.

[13] George Polya; Como plantear y resolver problemas; Trillas ; México 2001, Pag 28.

Como familiarizarse con el problema:

¿Por donde puedo empezar? Empiece por el enunciado del problema. **¿Qué puedo hacer?** Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento. **¿Qué gano haciendo esto?** Comprendera el problema, se familiarizará con él, grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

Como trabajar para una mejor comprensión:

¿Por donde debo empezar? Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo. **¿Qué puedo hacer?** Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la Conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; las incógnita, los datos y las condiciones son las principales partes de un "problema por resolver". Ocúpese de las principales partes del problema, considérelas una por una, reconsidérelas, considérelas después cambiándolas entre si, estableciendo las relaciones que puedan existir entre cada detalle y los otros y entre cada detalle y el conjunto del problema. **¿Qué gano haciendo esto?** Esta usted preparando y aclarando detalles que probablemente entraran en juego más tarde.

En el "trabajo de aula" que pretendemos abordar cobra importancia el Marco Teórico y el Marco Conceptual que hemos esbozado, ya que hace detallar el papel que ha de cumplir el Docente , el Alumno y la Calculadora en el proceso de ejecución del mismo.

PAPEL DEL ALUMNO

- El enfrentamiento de situaciones novedosas y de nuevas experiencias cognitivas.
- La comprensión de las situaciones problemas que va a enfrentar.

- La comunicación de ideas, conjeturas o generalizaciones ya sean habladas o escritas a través de la cual el estudiante interactúa con el docente y los demás estudiantes.
- La construcción de modelos y el uso de sistemas de representaciones.
- La formulación de preguntas o inquietudes
- La utilización de conceptos previos que le permitan sortear obstáculos presentados. Entre otros

PAPEL DEL DOCENTE

El papel del docente durante el proceso de ejecución de los talleres no consiste solamente en entregar las guías de trabajo y esperar que los estudiante trabajen a la deriva, si no que debe ser parte activa durante la ejecución de los mismos, tal que haga provechoso el proceso enseñanza y aprendizaje de los estudiantes; Para lo cual consideramos que debe realizar actividades como las que siguen:

- Aclarar ideas, conjeturas o generalizaciones hechas por los estudiantes.
- Guiar las discusiones de sus alumnos a partir de preguntas, comentarios y sugerencias, para que logren alcanzar metas cognitivas.
- Ofrecer situaciones interesantes en las circunstancias que se presenten, que le permitan al estudiante utilizar sus conocimientos y experiencias previas.
- Crear grupos de trabajos que posibiliten el aprendizaje colaborativo.
- Proporcionar terminología apropiada y presenta la formalización requerida por el conocimiento matemático establecido.
- Presentar contextos diferentes que muestran la misma temática y que permitan ampliar el campo de significados del concepto en cuestión. Entre otras.

PAPEL DE LA CALCULADORA

- Instrumento mediador entre estudiante y conocimiento.
- Instrumento como amplificador y reorganizador del conocimiento.

- Formadora de un nuevo ambiente de trabajo que permite hacer representaciones formales de objetos y relaciones matemáticas.
- Permitir la manipulación de objetos matemáticos y sus relaciones.
- Permitir la prueba de resultados, verificar ideas usando sistemas de representaciones de tipo pictóricos, cartesianos y tabulares.
- Acercar al fenómeno de la variación a través del arrastre

CAPITULO III

6. METODOLOGIA

6.1 TIPO DE TRABAJO

Este trabajo está enmarcada en el paradigma cualitativo y es de tipo descriptivo, por cuanto lo que se quiere es describir avances y/o dificultades de los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemas referidas a la optimización que involucran:

- Abordaje de situaciones.
- Uso de conceptos previos.
- Relación de conceptos
- Comunicación de ideas o inquietudes.
- Hacer conjeturas
- Formulación de generalizaciones.
- Estrategias de solución.
- Uso de la tecnología
- Aprendizaje logrado.

Los cuales se amplían en la siguiente tabla:

Abordaje de las situaciones	Tiene que ver en como el estudiante aborda los problemas que se le plantean • Si usa la calculadora de forma inmediata • Si hace modelos a lápiz y papel y luego usa la calculadora • Si lee detenidamente el problema y luego usa la calculadora • Si hace primero el modelo en la calculadora para luego comprender el problema • Si identifica variables, reconoce el modelo que se ajusta a la situación y luego usa la calculadora.

Utilización de conceptos previos	Se tiene en cuenta si el estudiante usa conceptos conocidos que le sean útiles para sortear obstáculos que le impidan avanzar en el proceso de solución de un problema de optimización.
Relación de conceptos	Si hace relación entre conceptos ya conocidos o entre conceptos que apenas conoce • Relaciona el concepto de variación, con los cambios que visualiza en la calculadora. • El concepto de variable, con los objetos que cambian • El concepto de función con la gráfica que se genera al poner en correspondencia los cambios de las variables involucradas en la situación, en el plano cartesiano. • El concepto de variable independiente, con los objetos que sufren cambios al cambiar otros
Comunicación de ideas o inquietudes	Si el estudiante es capaz de comunicar ante sus compañeros y el profesor, ideas ya sean referidas a responder preguntas que se hallan hecho o dar pautas de posibles soluciones o bien comunicar inquietudes propias que él tenga
Hace conjeturas	Si el estudiante hace afirmaciones acerca el comportamiento de los objetos que se manipulan en el proceso de solución del problema.
Formulación de generalizaciones	El estudiante ante un problema solucionado es capaz de generalizar sobre el enunciado del mismo o generalizar sobre el comportamiento de algunos objetos que se manipulan en el proceso de solución de un problema.
Estrategias de solución	El estudiante ante un problema planteado es capaz de hallar un método, para darle solución con **Cabri** o ante un mismo problema plantea varias estrategias para darle solución.
Uso de la tecnología	Tiene que ver con la creatividad del estudiante en el uso de la calculadora • Si explora con las herramientas de **Cabri**, a fin de obtener un modelo apropiado para dar solución al problema planteado.

	• Comprueba resultados que le parecen ser no - confiables. • Usa los sistemas de representaciones que le brinda **Cabri**, para comprobar resultados. • Usa el arrastre para visualizar cambios.
Aprendizaje logrado	Además de que los estudiantes aprenden a solucionar ciertos problemas con **Cabri**, tiene que ver con aprendizajes como: • Nueva forma de ver el concepto de variación, función, variable, entre otros. • La comprensión de un concepto desde otro punto de vista. • La adquisición de nuevos conceptos(Máximos, Mínimos, entre otros)

6.2 INSTRUMENTOS

Para la ejecución de la "propuesta de trabajo de aula" que esperamos nos ayude a alcanzar los objetivos propuestos, tendremos en cuenta la realización de los siguientes tres tipos de talleres:

.

- **Talleres de familiarización**: La intención de estos talleres es inducir a los estudiantes al uso y manejo de la calculadora TI-92, en particular al uso del software CABRI y familiarizarlos con las herramientas de construcción de CABRI necesarias para abordar los problemas de optimización.

- **Talleres guiados:** En estos talleres se presentaran algunas formas de solucionar ciertos problemas de optimización con CABRI, para esto el orientador tendrá a la mano un **retroproyector** y un **view scrim**, con los cuales guiará a los estudiantes en el proceso de resolución; Los estudiantes tendrán a la mano una calculadora TI-92, para ir trabajando simultáneamente con el orientador. La intención es que a medida que los estudiantes son guiados estos participen en el proceso de resolución, dando respuesta a los cuestionamientos hechos por el orientador, cuestionamientos basados en la identificación de variables, utilización de preconceptos para hallar variables en función de otras y el establecimiento de relaciones y reglas que liguen las variables implicadas, entre otros. Todo esto con el fin de ir fortaleciendo el proceso de comprensión de los problemas de optimización.

- **Talleres de profundización**: En estos talleres se les propone a los estudiantes una situación problema, cada estudiante aborda la situación, luego se reúnen en grupos para socializar y discutir las posibles soluciones, por ultimo cada grupo expone su propuesta de solución. Durante este proceso el docente orientara a los estudiantes en las inquietudes y hará sugerencias necesarias que encaminen a la solución de los problemas. El objetivo aquí es que los estudiantes se familiaricen con los procesos de comprensión, construcción de modelos y de resolución de los problemas planteados.

Cabe anotar que todos los talleres serán Evaluados, para observar los avances y/o dificultades que se están generando en el proceso de ejecución.

6.3 POBLACION Y MUESTRA

6.3.1 POBLACION

La población estará conformada por estudiantes de undécimo grado del colegio LICEO CARMELO PERCY VERGARA, jornada vespertina

6.3.2 MUESTRA

Para la ejecución del trabajo de campo se trabajará con el curso UNDECIMO DOS, que fue tomado al azar de los grados undécimos del colegio LICEO CARMELO PERCY VERGARA, jornada vespertina

6.4 FUENTES DE INFORMACION

La información que nos permitirá describir los resultados obtenidos en el proceso de ejecución del presente trabajo, se pretende obtener con las siguientes fuentes:

- La producción escrita de los estudiantes en los talleres.
- La observación directa en el aula.
- El proceso de comunicación y relación Docente y Estudiante dentro y fuera del aula.

CAPITULO IV

7. ANALISIS E INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS

A continuación se describen las experiencias del trabajo de aula con los estudiantes de Undécimo Dos del colegio Liceo Carmelo Percy Vergara, producto de la ejecución de los Talleres de familiarización, Talleres Guiados y los Talleres de Profundización, que hacen parte del trabajo de campo "Problemas de optimización con Cabri". Se hablara de las experiencias adquiridas en cada una de ellas en su orden teniendo en cuenta los parámetros descritos en la metodología.

7.1 EXPERIENCIA EN LOS TALLERES DE FAMILIARIZACIÓN

Cuatro talleres hicieron parte del proceso de familiarización, que se llevó a cabo en cuatro sesiones de tres horas cada uno, es decir, un taller por sesión.

La adaptación al uso y manejo de la calculadora TI-92 y en particular a las herramientas del programa computacional CABRI fue rápida y exitosa, lo cual se vio reflejado en:

- Los seguimientos oportunos y ágiles que hacían los estudiantes acordes a las orientaciones de los profesores a través del VIEW SCRIM
- La construcción de figuras a partir de exploraciones
- Algunas orientaciones que hacían a sus compañeros en el momento de la ejecución de cualquier taller, entre otros aspectos.

Quizá esta rápida familiarización se debió al orden de ejecución de los talleres, por la conformación de grupos de trabajos, la manera no instruccional de los talleres que invitan a la exploración, a la ayuda visual del VIEW SCRIM o a que los estudiantes en su mayoría manejan programas de computación como Excel, Paint, Power Point, Word, lo que les facilita la manipulación y exploración de herramientas en cualquier programa computacional.

Durante la ejecución de estos talleres solo se construyeron figuras y se manejaron herramientas de construcción de CABRI necesarias para abordar los problemas de optimización que serian planteados en los talleres guiados y de profundización. (ver anexos)

7.2 EXPERIENCIA EN LOS TALLERES GUIADOS

En estos talleres se inicia la solución de algunos problemas de optimización, con la ayuda de la calculadora TI-92 y el Software CABRI. En todos ellos se trabajo con tres grandes grupos, cada uno conformado por máximo cinco subgrupos de dos estudiantes cada uno quienes trabajaban conjuntamente con una calculadora, la idea es que estos subgrupos socialicen sus experiencias con los demás subgrupos del grupo.

La experiencia en el **Taller guiado # 1** (ver anexos), fue poco exitosa. En el momento de haberles comentado el problema que se iba a trabajar, no hubo abordaje de la situación por parte de los estudiantes, incluso hacían comentarios como:

"¿Que es lo que hay que hacer?", "No entiendo", "Ahora si empezó lo difícil". Teniendo en cuenta que el objetivo de estos talleres es guiarlos en la solución de los problemas que se le plantean, se decidió iniciar la orientación indicando paso por paso como se construía el modelo que nos ayudaría a solucionar el problema y ellos simplemente seguían instrucciones.

(Una vez construido el modelo se les invitó a dar respuestas a las preguntas que se formularon en el taller).

Hay que señalar que la mayoría de los estudiantes comprendieron el problema sólo cuando ya el modelo estaba listo, Entendimos que gran parte de esta dificultad se debió a fallas nuestras, porque en un principio no se detuvo a indicarles hacia donde se quería llegar, cual era la intención en sí, no se les hizo ver el porque de las construcciones, porque se hacía el modelo de esas manera y no de otra. Lo que conllevó a que solo se centraran en la parte de la manipulación de la máquina y no en la comprensión de la situación planteada(Motivo que se tubo en cuenta para la ejecución del taller guiado # 2).

Sin embargo, hay que destacar la experiencia con un estudiante el cual ante la pregunta ¿Hacia donde tiende la máxima altura del triángulo?, Referida a la situación del taller guiado # 1, pero que fue planteada anteriormente en la prueba exploratoria, dio como respuesta "Hasta 20m puede llegar", pero luego de realizado y explorado el modelo que se hizo en CABRI [ver figura (*)], dio cuenta de su error y comentó:

"Me equivoque en la prueba que hicieron la clase pasada, pense e imagine que la máxima altura del triángulo tendía a 20m, pero ahora me doy cuenta que es hasta 10m que debe llegar".

Ante esto concluimos que lo que quizá hizo darse cuenta de su error fue la apreciación real que tubo de la situación, gracias a la manipulación de los objetos que hacían parte del modelo hecho en CABRI, cosa que a lápiz y papel le tocó imaginar y ahí el error en la imaginación.

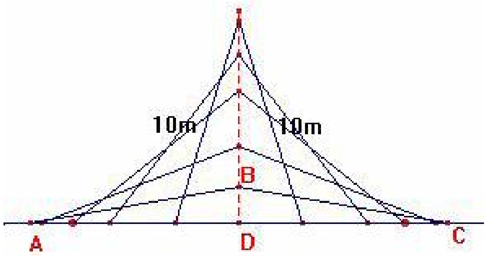


Figura (*) "El punto B es desplazado por el estudiante hacia arriba"

Varias conclusiones fueron expresadas por los estudiantes acerca de la ejecución de este taller, a saber:

- Este taller es importante con respecto a las actividades que tienen que ver con los problemas matemáticos de nuestra vida cotidiana.

- Al utilizar la calculadora nos ayuda a tener una experiencia práctica a la hora de resolver problemas que nos son cotidianos en el transcurrir diario.
- La actividad fue muy productiva, ya que nos permite adquirir más conocimiento sobre el tema tratado de geometría(área, altura, base, etc.).

Algunos aprendizajes:

- Aprendí a utilizar de manera más fácil la calculadora, descubrir que se pueden utilizar para distintas incógnitas que tengan que ver con las matemáticas.
- Aprendimos como resolver problemas usando la calculadora sin necesidad de realizar operaciones en forma algebraica.
- Aprendí como hallar la altura y él área tanto máxima como mínima de un triángulo.
- Dar solución a un problema usando la TI-92, instruirnos en temas tratados ya que con el pasar del tiempo se olvidan.
- Hacer circunferencia, triángulo, hallar área, altura, distancia de un punto a otro, etc.

En el **Taller guiado # 2** (ver anexos), hubo mejor experiencia que en el taller # 1.

Al iniciar el taller sé tubo en cuenta la presentación de la situación, se les planteó en forma oral y escrita, se hizo saber el objetivo del taller y hacia donde se quería llegar.

Se inició la orientación trabajando en el VIEW SCRIM, se hacían preguntas que atendían a la construcción del modelo, como por ejemplo:

¿Qué clase de curva es la que hay que Gráficar?, ¿Qué necesito para hacer la gráfica de esa curva?. A lo que respondían: "es una función cuadrática", "necesitamos un plano cartesiano", "darle valores a X", entre otras. (Mediante este proceso de preguntas y respuestas se pudo construir el modelo apropiado).
Luego se inició el proceso de reconocimiento de variables, dando respuesta a las preguntas: **¿Cuál crees que son las variables que intervienen en esta situación?, ¿Cuál consideras que se comportan como dependientes y cuales como independientes?.**

La mayoría de los estudiantes respondió: "las variables son la base, la altura y el área del rectángulo porque ellas son las que cambian cuando muevo a P", el inconveniente se produjo a la hora de decidir sobre el papel de dependencia o independencia de ellas. Algunos conjeturaron:

"Las dependientes son el área y la altura, porque dependen de la base"
"La dependiente es solo el área, porque depende de la base y la altura y como área es base por altura".
"La altura es dependiente, porque depende de X que es la independiente".

Ante esto se medió la discusión con las siguientes indicaciones: Muevan la base de tal manera que cambie su medida, **¿Qué pasa con la altura y el área?**, No muevan la base, **¿Qué sucede ahora?**, **¿Será que el área y la altura cambian por si solas sin cambiar la base?**. Dando respuesta a estos interrogantes pudieron concluir que la variable independiente era la base y la dependiente el área, pero todavía no era claro el papel de dependencia o independencia de la variable **altura**, porque es de aceptar que el área depende de la altura, pero también la altura depende de los cambios de la base.

Luego de varias intervenciones y discusiones, entre profesores y estudiantes se concibió que la altura del rectángulo inscrito se comporta como variable dependiente si se pone en correspondencia con los cambios de medida de la base, ya que $\mathbf{h = 27- (b/2)^2}$, donde **h** es la altura y **b** la base, pero si la relacionamos con la variable área entonces juega el papel de independiente, porque el Area depende también de ella, aunque esta se pueda expresar en términos de la base solamente.
El taller arrojó los siguientes aprendizajes y conclusiones, por parte de los estudiantes:

APRENDIZAJES

- Al mover el punto P cambian las coordenadas de (x,y).
- La relación entre la medida de la altura y la base, cuando se obtiene el rectángulo mayor es que la altura es el triple de la base.
- Area máxima = 108 cm^2, Altura = 18 cm, Base = 6 cm.

- La mínima área a que tiende el rectángulo es cero y la máxima es 108 cm^2.
- Al mover a P cambian las coordenadas de Q.
- A medida que cambia la base y la altura cambia el área y así se va haciendo el área máxima o mínima.

CONCLUSIONES

- Podemos manejar la calculadora con temas vistos hoy día y nos ayuda a recordar los temas anteriormente vistos.
- Me pareció interesante por el manejo de gráficas con la calculadora.
- En cada actividad se aprenden muchos temas de los cuales no teníamos conocimiento, ojalá y sigamos aprendiendo mucho más.
- Si se mueve P hacia la izquierda el rectángulo llega a su área menor y si se mueve hacia la derecha llega a su máxima área.
- Es muy importante para el desarrollo intelectual que podemos adquirir cada día aprendiendo cosas nuevas.
- Ya sabemos solucionar problemas de optimización y entenderlos más.

El **Taller guiado # 3** (ver anexos), fue el más productivo en cuanto a las experiencias y los aprendizajes obtenidos. Incluso el ánimo hacia el abordaje de la situación por parte de los estudiantes fue bueno, ellos se le midieron a resolver el problema, unos se acercaron a la construcción del modelo requerido, otros después de intentar desistieron y otros solo esperaban orientaciones, pero no lograban realizar el modelo adecuado. Se pudo seguir en ese intento, pero por motivos de tiempo tocó hacer las orientaciones pertinentes que posibilitaran la construcción del modelo adecuado (proceso en el cual no se tardó mucho porque ya los estudiantes habían explorado posibles construcciones).

Una vez construido el modelo, obtener el valor del **Costo de construcción** del oleoducto en cualquier momento se torno fácil para los estudiantes, algunos afirmaban:

"Si por cada kilómetro construido por tierra, es decir, por AP me cobran 25000 dólares entonces el costo es 25000 por AP y si por cada kilómetro construido por el pantano o sea por PC me cobran 50000 dólares, entonces el costo es 50000 por PC, luego el costo total de la construcción es la suma de 25000 * AP + 50000 * PC.

Refiriéndonos a las preguntas: **¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación planteada?, ¿Cuáles consideras se comportan como dependientes y cuales como independientes?** (Para entrar en el ámbito de reconocimiento de variables), las respuestas fueron inmediatas, la mayoría de los estudiantes respondieron: "Las variables que intervienen son AP, PC y el costo", los profesores formalizaron "Las variables que intervienen son la medida de la longitud AP, la medida de la longitud PC y el Costo de construcción del oleoducto". A la segunda pregunta la mayoría respondió que el costo es el que se comporta como variable dependiente porque depende de las medidas de AP y PC, y que las medidas de AP y PC son las independientes. Lo que permitió mirar de mejor manera la relación **Costo = 25000*AP + 50000*PC.**

Otros conjeturaron que para ellos las variables independientes son AB y BC, porque no se mueven y por tanto no dependen de nadie y las variables dependientes son AP y PC, porque ellas se mueven y cambian. Es decir, relacionaban la independencia con la invariabilidad y la dependencia con la variabilidad, lo que es erróneo. Entonces para hacerlos caer en cuenta de su error se estableció la siguiente conversación(Profesor- Estudiantes):

Profesor: Dicen que AB y BC son variables independientes; ¿Acaso algo que no cambia se puede considerar como variable?.

Estudiante 1: Eso parece absurdo, porque si no cambia entonces no varia y las variables varían.

Estudiante 2: Insiste de nuevo, Lo que pasa es que eso se mantiene constante y como no dependen de nada, entonces son independientes.

Profesor: Que sea independiente es una cosa, que sean variables independientes es otra.

Estudiante 2: Entonces AB y BC no son variables.

Profesor: No, son constantes. Para tu considerar que algo se comporta como variable independiente, además de no depender de otra variable tiene que variar, sufrir cambios o cualquier tipo de variación.

Quedando esto aclarado se pudo de mejor manera comprender el problema que se solucionaba, por cuanto se hizo el reconocimiento de las variables que intervenían y se pudo establecer una relación algebraica entre ellas que les permitía encontrar el costo de construcción del oleoducto para cualquier valor de AP y PC.

Al tratar de dar respuesta a la pregunta, **¿Cómo se debe construir el oleoducto, para que el costo de construcción sea mínimo?**, Algunos estudiantes conjeturaron "Se debe construir en línea recta, porque la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta". Ante esto se les preguntó, **¿Cuánto es el costo cuando construyes el oleoducto en línea recta?**, Respondieron que **216.892,16** dólares (ver figura # 1), Ahora se les propuso que movieran el punto P hacia la derecha y se preguntó, **¿Qué sucede con el costo?**, A lo que respondieron Disminuye, es menor, sale más barato, entre otras (ver figura # 2); Llegando a la conclusión que construyéndolo en línea recta sale mas caro y que había que seguir explorando.

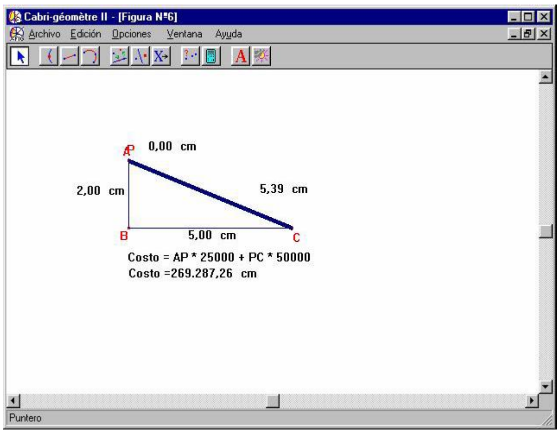


Figura # 1

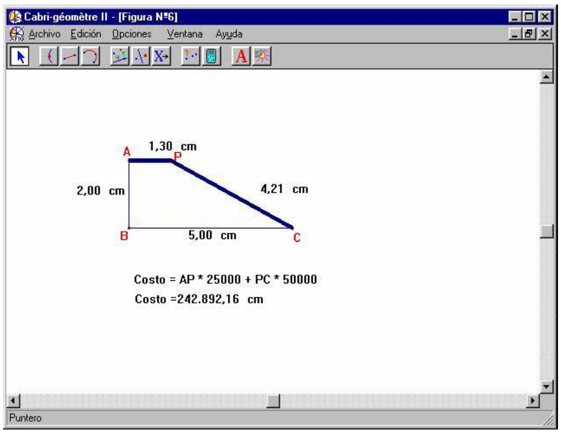
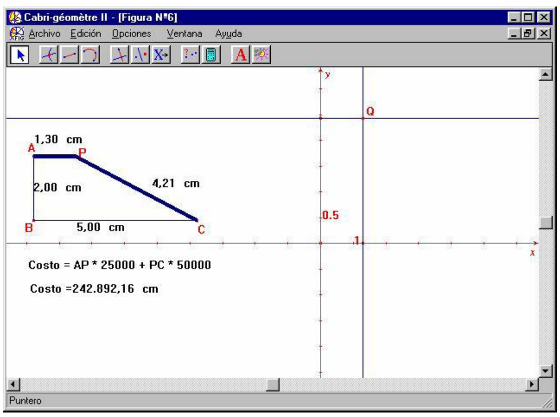
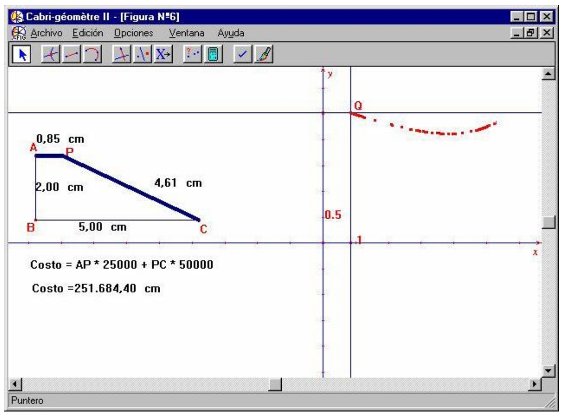


Figura # 2

Otros estudiantes exploraron haciendo movimientos laterales de P, encontrando como respuesta que el mínimo costo es de **211604,83 dólares** y se obtiene cuando la medida de AP es de **3.86 Km** y la de PC es **2.30 Km**

Luego se invitó a los estudiantes a realizar la gráfica entre la medida de AP contra el Costo de construcción del oleoducto, para ver que se obtenía. Para iniciar todos eran conscientes que había que tener a la mano el plano cartesiano, el inconveniente se presentó cuando se preguntó, **¿Qué variable se debía transferir al eje X y cual al eje Y?**, Tal inconveniente duró poco, un estudiante ayudó conjeturando: "AP se debe transferir al eje X, porque es una variable independiente y el costo al eje Y, porque es variable dependiente", sorprendido con esta conjetura se le preguntó, **¿Por qué consideras que debe ser así?**, Respondiendo: " A nosotros nos enseñaron que la variable independiente es X y la dependiente Y, porque a X es la que le damos siempre valores para encontrar a Y".
Aceptando esta conjetura se procedió a transferir las medidas correspondientes a cada eje, se trazaron las rectangulares tal que se cortaran en el punto Q. Se les pidió poner traza al punto Q y movieran a P (ver figuras), luego se preguntó: **¿Qué pasa con el punto Q cuando mueven a P?, ¿Qué pasa con la variable costo que transferiste, cuando mueves a P?, ¿Qué clase de gráfica crees que se obtiene?**.





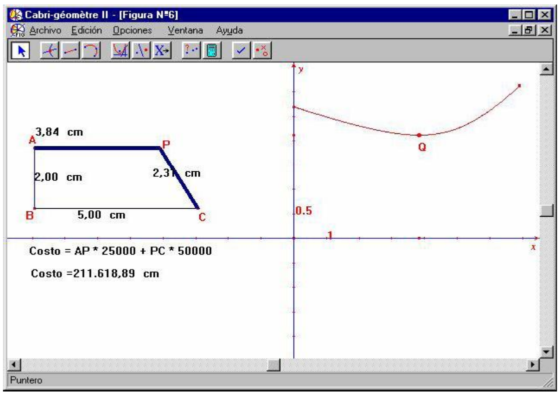
Al dar respuesta a estos interrogantes y con algunas orientaciones hechas, los estudiantes pudieron comprender que el papel del punto Q consiste en Gráficar el comportamiento entre la distancia AP y el Costo de construcción, además observaron la relación de dependencia entre el Costo y AP, es decir, que a medida que cambia AP también cambia el Costo.

Refiriéndonos a la pregunta, **¿Qué clase de gráfica crees que se obtiene?**, Algunos respondieron que una función cuadrática, otros una parábola, otros fueron más concretos "Se obtuvo una curva rara, pero lo que me gustó fue la forma como se hizo, haciendo movimientos de una variable y de otra, ahora si sabemos de donde es que salen las funciones que hemos visto con el profesor".

Con estos cuestionamientos, los orientadores pretendieron acercar a los estudiantes al concepto de función como **dependencia**, es decir, como una forma de relacionar dos variables, las cuales poseen una relación de dependencia tal que los cambios en una dependen de los cambios en la otra y que esa relación puede ser representada en forma algebraica o en forma gráfica como se obtuvo.

Otra idea que se quiso vender es la de ver las funciones como algo que surgen de situaciones de la vida cotidiana como la abordada y que no son solo expresiones algebraicas que no sirven para nada como no las hacen ver algunos profesores de matemáticas.

Una vez hecha la gráfica de **AP** contra el **Costo**, se pidió a los estudiantes que la hicieran de nuevo, pero con lugar geométrico, se les indicó que movieran el punto P y observaran donde se encontraba el punto Q, cuando se obtenía el costo mínimo y que significaba para ellos ese comportamiento (ver figura).



Unos respondieron “A medida que muevo a P el punto Q se baja y llega un momento en que vuelve a subir”, se les preguntó nuevamente ¿Qué significa para ustedes eso?, Respondieron: “Lo que sucede es que a medida que muevo a P hacia la derecha o hacia la izquierda, el costo baja y vuelve a subir”.
Otros respondían: “El punto Q se encuentra en lo mas bajo de la gráfica y lógico que debe estar allí porque la gráfica me indica el costo y el costo mínimo se encuentra abajo donde está Q”.
“Debe encontrarse ahí, porque es el punto más bajo de la gráfica yo no veo otro más bajo”.

Lo anterior se hizo con el fin de permitirle a los estudiantes acceder al concepto de el **Mínimo de una función** y que apreciaran lo que esto significa en algunas situaciones de la vida diaria como la que se les planteó.

Por ultimo se orientó a los estudiantes, para capturar los datos (AP, PC y el Costo) en una tabla y mirar el comportamiento de las variables e invitarlos a la exploración, para comparar los resultados que mostraba la tabla con los obtenidos anteriormente y ver si coincidían. Trabajo que hizo sentir a los estudiantes motivados y confiados del proceso de solución que habían construido hasta el momento, porque pudieron apreciar desde tres enfoques diferentes el mismo resultado a un mismo problema y mirar desde tres sistemas de representaciones, distintas formas de dar solución a un problema y de ver la variación de las variables en forma conjunta.

A continuación mostramos algunas de los aprendizajes y conclusiones expresadas por los estudiantes en forma escrita:

APRENDIZAJES

- A medida que se mueve el punto P cambian la distancia de AP y de PC.
- Aprendí a realizar operaciones con variables y a entender mejor un problema desde varios puntos de vista.

- Aprendimos a hallar el costo mínimo, a partir del punto P y a reconocer las variables de un problema.
- A medida que AP aumenta el costo disminuye.
- Mientras PC aumenta hacia la izquierda AP disminuye, pero cuando PC aumenta hacia la derecha AP aumenta.
- Obtener el valor mínimo a un proyecto de alto presupuesto, mediante la utilización de gráficas, a través de la calculadora TI-92.
- Entendí para que sirven las funciones que vemos a cada rato.

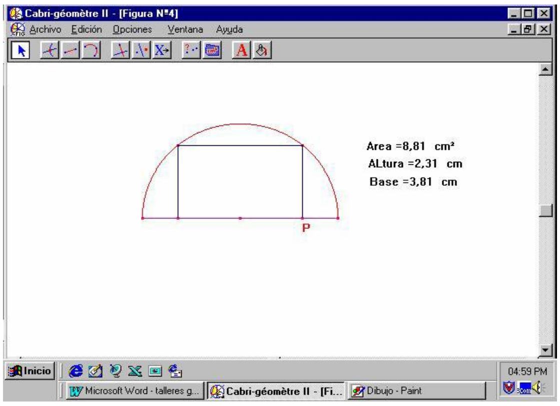
CONCLUSIONES

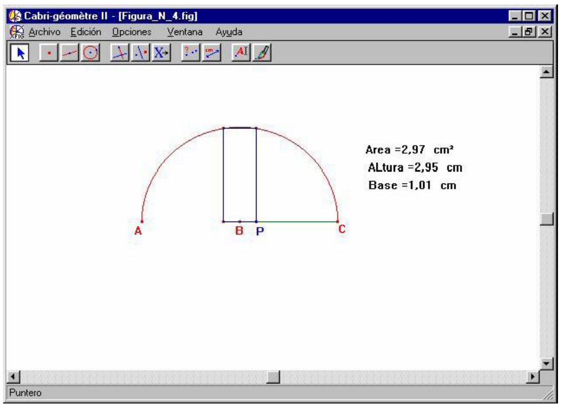
- El costo no depende de sí P se mueve mas a la derecha o mas ala izquierda.
- Comprendimos el manejo de las distintas teclas de la TI-92.
- Cuando muevo a P se halla el mayor o menor valor para realizar la obra.
- Esta actividad nos permite afianzar en el manejo de la TI-92 por un lugar, por otro sirve para entender mejor los problemas que queremos resolver.
- Esto nos permite mas adelante en nuestras vidas analizar y realizar actividades tomando las calculadoras en nuestras manos.
- Fue una actividad de mucho provecho para nuestra vida diaria, ya que en un futuro si llegamos a estudiar alguna carrera de ingeniería nos puede servir como base, para resolver dichos problemas.
- Es imposible pensar en la construcción de un oleoducto moviendo el punto P Hacia la derecha de C, porque el costo se hace mas y más grande.

7.3 EXPERIENCIA EN LOS TALLERES DE PROFUNDIZACION

En los talleres de profundización se vivió una experiencia muy buena, por cuanto el papel del profesor consistió en proponer una situación problema referida a la optimización y orientar a los estudiantes en la búsqueda de estrategias que les permitiera dar solución al problema, usando la calculadora TI-92.

El **Taller de profundización # 1**, se inicia dando a conocer a los estudiantes la situación que se debía resolver, las preguntas que se debían responder y hacia donde se quería llegar. El abordaje de la problemática fue excelente, unos leían de nuevo el problema y recurrían luego a la calculadora, otros iniciaron de inmediato a usar la calculadora, otros ya pensaban en cuales serian las variables, en fin. Casi la totalidad de los estudiantes la tarea de construir el modelo o estrategia que les permitiría dar respuestas a las preguntas hechas y por tanto dar solución al problema. Durante el proceso de construcción del modelo, unos creían haber logrado la construcción, pero a la hora de hacer los movimientos se desconfiguraban. La mayor dificultad estuvo en la realización de la semicircunferencia, porque no encontraban la herramienta con cual hacerla, algunos imaginaban que con arco de pronto pero no sabían usarlo y aquí donde se orientó a los estudiantes, por fin y después de 45 minutos dos estudiantes lograron obtener un modelo muy bueno, pero que fue perfeccionado luego por los profesores en el momento de la socialización general, por cuanto el punto móvil P que construyeron recorría todo el diámetro de la semicircunferencia y solo era necesario que recorriera el radio porque si se pasaba de ahí encontrábamos áreas de rectángulos que ya obtenidos. (las figuras que siguen muestran tal situación)





El punto P está sobre el diámetro. El punto P esta sobre el radio

Se aprovechó de inmediato este momento, para entrar en detalle acerca del dominio de una función, tomando como ejemplo la restricción de la variable Base y se concluyó que la mínima medida de la Base de la puerta tendía a cero y la máxima medida tendía a cuatro, es decir, que el dominio de la función que relaciona Base y Area, es el intervalo abierto:]0,4[(lo que se pudo verificar cuando se hizo la gráfica).

Hecha la socialización general del modelo, se les pidió a los estudiantes que dieran respuestas a los interrogantes planteados en el taller, presentamos a continuación unas de ellas:

- Las variables encontradas son: Base, Altura y el área del rectángulo inscrito.
- La variable dependiente es el Area y las independientes son: La Base y La Altura, porque de estas es que depende el Area.
- Las dimensiones de la puerta que permitirán el mayor acceso de luz deben ser 2.83m de Base y 1.41m de Altura.
- La puerta de máxima área es la de 4.00m^2.
- Cuando se obtiene la puerta de mayor área, la relación entre la base y la Altura es que la Base es el doble de la Altura.

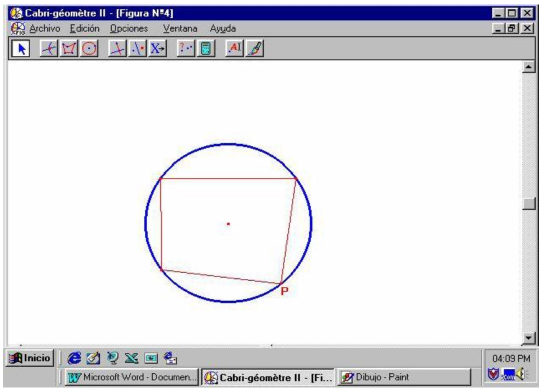
A la hora de realizar la gráfica Base contra Area, no hubo inconveniente alguno, ya que se habían familiarizado con la idea que la variable independiente se debía transferir al eje X y la dependiente al eje Y. A continuación se muestran algunos de los aprendizajes y conclusiones a las que llegaron los estudiantes:

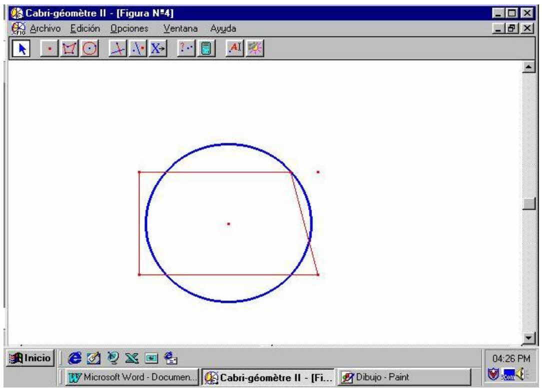
- Fue una actividad muy aplicada, donde aprendí a resolver problemas.
- El trabajo realizado en la sesión de hoy me pareció muy interesante, porque ya podemos resolver problemas explorando las distintas herramientas de la calculadora.
- El aprendizaje fue muy bueno, ya que cada día adquirimos conocimientos nuevos que nos pueden servir en un futuro.
- La forma de enseñanza con la calculadora es buena ya que uno aprende a identificar las distintas partes de una figura y sus variables y como resolver problemas matemáticos y de ingeniería.
- Fue una actividad muy recreativa y de mucho provecho para la vida diaria.
- Fuimos capaces de realizar la figura, con alguna ayuda de los profesores. Entre más Altura tenga la puerta, menos luz deja pasar y la Base tiene que ser más grande que la altura para obtener la puerta que deje pasar más luz.

Lo anterior da muestra el avance que sé logro tanto en materia de manipulación de la calculadora como en los procesos de reconocimiento de variables y la comprensión de los problemas planteados, ya que de no haber sido así los estudiantes no hubiesen sido capaces modelar la situación y de haberle dado solución al problema planteado.

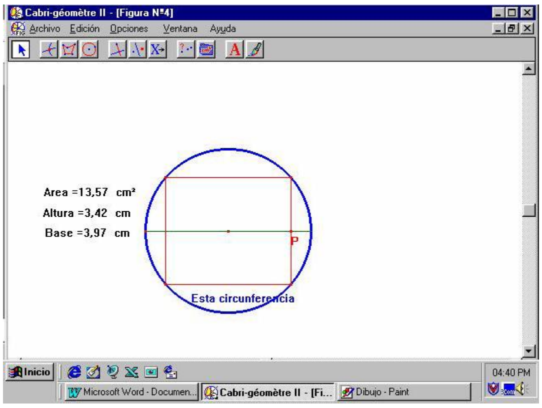
En el **Taller de profundización # 2**, el abordaje de la situación fue más inmediato, la mayoría de los estudiantes recurrieron en primera instancia al uso de la calculadora. Hubo más equivocaciones en las construcciones, pero se vio más participación de los estudiantes.

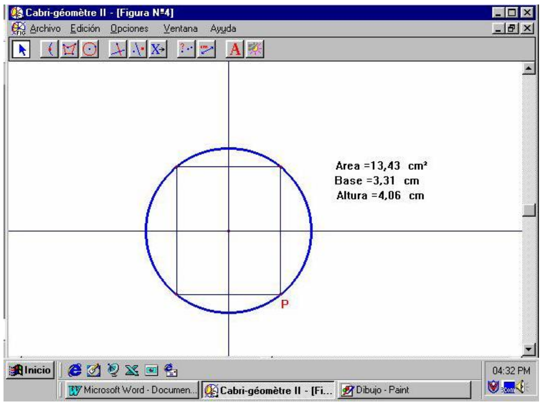
Aquí presentamos algunos de los modelos construidos por los estudiantes que no son los más adecuados, por cuanto presentan fallas como: Desconfiguración del modelo, mal uso de algunas herramientas de construcción de CABRI, construcción de rectángulos no inscritos como lo exigía la situación, entre otros detalles.





El proceso de creación del modelo duró casi 40 minutos, esta vez la construcción fue realizada por más estudiantes, aunque las estrategias usadas fueron diferentes. Aquí presentamos dos de ellos:





Una vez construido el modelo, se pidió a uno de los estudiantes que lo socializara ante los demás grupos, usando el VIEW SCRIM y el Retroproyector.

Luego se inicio el proceso de reconocimiento de variables y se dieron respuestas a las preguntas planteadas en el taller escrito, verificando así la afirmación que planteaba el problema.
Por motivos de tiempo, la realización de la gráfica que relaciona las variables Base y Altura, no alcanzó a ser realizada por los estudiantes, pero los profesores orientaron la construcción de manera rápida con algunas intervenciones de los estudiantes.

Aquí se muestran algunos de los aportes de los estudiantes, en cuanto a los aprendizajes obtenidos y algunas conclusiones a las que llegaron:

APRENDIZAJES:

- En la actividad de hoy aprendimos a resolver por si solos y con la ayuda de los profesores el problema que nos plantearon.
- Aprendimos a identificar más rápido las variables dependientes e independientes del problema.
- Variables independientes: Base y Altura del rectángulo inscrito en el circulo. y la Variable dependiente es el Area del rectángulo.
- Aprendimos a resolver un problema con la calculadora que de pronto sin ella no hubiésemos podido resolver.
- Se aprendió a usar mejor las herramientas de la calculadora.
- Aprendí una nueva manera para inscribir un rectángulo en una circunferencia.
- Aprendí a graficar la función del problema en el plano cartesiano.

CONCLUSIONES:

- La actividad de hoy fue interesante porque ya pudimos resolver un problema con la ayuda de la calculadora.
- Aunque se cambie el radio de la circunferencia siempre el cuadrado va ser el de Area mayor.
- Usando la calculadora podemos resolver más fácil algunos problemas que nos parecen difícil resolver.

- Cuando el área es máxima la altura es igual que la base por eso es que el cuadrado es de área mayor que los demás.

En este taller se evidencia aun más el avance de los estudiantes en cuanto al manejo de las herramientas de construcción de CABRI, la exploración de objetos, la modelación de situaciones problemas, el proceso de reconocimientos de variables y la comprensión y solución de problemas de optimización, usando la calculadora TI- 92.

Para tener una evidencia más real, este taller fue sometido a filmación, es decir, que podemos observar por medio el vídeo toda la experiencia de aula que se vivió, pero sobre todo mirar la participación de los estudiantes en la construcción del modelo adecuado y el proceso de resolución del problema planteado.

8. CONCLUSIONES

La experiencia ganada durante el proceso de ejecución del "Trabajo de campo", nos permite llegar a Conclusiones que reflejan los resultados del abordaje del "trabajo de aula", adelantado con el fin de posibilitar la comprensión de problemas de optimización y el acercamiento a ciertos procesos que ayudan al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes. A continuación presentamos las más importantes:

- Aunque en principio el uso de la calculadora fue más que todo instruccional, poco a poco se convirtió en herramienta clave para comprender conceptos como: la variación, variables, dependencia e independencia de variable, funciones, y los problemas de optimización abordados, gracias a la capacidad de exploración y de interracción con los objetos que se manipulan.

- La comprensión de los problemas de optimización abordados se logra de mejor manera cuando los estudiantes son capaces de identificar las variables que intervienen en tal problema y establecen el papel de dependencia e independencia de cada una de ellas y sus relaciones.

- La conformación de grupos de trabajo fue crucial tanto para el proceso de familiarización al programa CABRI como para la resolución de los problemas planteados, por cuanto permitió la construcción de varias estrategias de solución a un mismo problema y la participación de la mayoría de los estudiantes en la resolución del mismo.

- Uno de los puntos clave que influyó en el proceso de resolución de algunos de los problemas planteados fue el de la significatividad de los mismos para los estudiantes, porque tenían que ver con su vida cotidiana y para algunos con su futuro desempeño profesional.

- El abordaje y solución de los problemas de optimización con CABRI ayudó en la **comprensión de conceptos como**: La función como dependencia, dominio, rango, máximo y mínimo de funciones, y el papel de la función en algunas situaciones de la vida cotidiana; La **realización de procesos como**: la Modelación, Algunas generalizaciones, la interpretación y la comunicación de ideas matemáticas; y el trabajo con diferentes sistemas de representaciones que le ayudaron en algún momento a verificar los resultados obtenidos ante un mismo problema.

- El proceso de exploración fue vital en la ejecución de los talleres, porque permitió conocer mejor las herramientas de construcción de CABRI y manipularlas en la construcción de los modelos que posibilitaron dar solución a las situaciones planteadas. Así como también mirar de mejor manera las relaciones entre las variables que intervenían en el problema y establecer su papel de dependencia e independencia.

- El impacto de la tecnología (en particular el uso de la calculadora TI-92) influyó en la motivación de los estudiantes para la realización del trabajo de aula y en la confiabilidad del proceso de resolución por parte de ellos por cuanto estos medios permiten comprobar desde varios ámbitos o sistemas de representaciones los resultados obtenidos.

- El trabajo de aula se puede abordar en la escuela para posibilitar en los estudiantes la comprensión del concepto de función como una forma de representar el comportamiento de ciertas situaciones de la vida cotidiana, antes de entrar en detalles como la formalización matemática de su concepto y el trabajo algebraico con ellas.

- Es importante que la Universidad de Sucre siga formando en los estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas, el ambiente del uso de las nuevas tecnologías como herramientas didácticas que mejoran de alguna manera el proceso de enseñanza de las matemáticas en la escuela.

ALGUNAS RECOMENDACIONES

La experiencia obtenida en el trabajo de campo da pie para atrevernos a dar algunas recomendaciones para los que deseen algún día ejecutar trabajos de aula encaminados al uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas o incluso por que no, a los que quieran experimentar con él nuestro o con los que proponemos al final del presente.

- A la hora de escoger las situaciones que se van a abordar, intente escoger aquellas que considera tengan que ver de alguna manera con el contexto de los estudiantes.

- Hacer grupos de trabajos no muy numerosos, los grupos deben estar conformados por estudiantes de distintos niveles de avance, para que los mas aventajados ayuden a los menos aventajados a lograr un buen nivel de avance.

- Tratar en lo más posible que los talleres no se tornen tan instruccionales o mecanicistas (evitar en lo máximo cosas como "presione la tecla tal" "haga clic en..."), estas cuestiones hacen que el estudiante no explore las herramientas de construcción.

- Invitar a los docentes en ejercicio a que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el uso de las nuevas tecnologías (como las calculadoras graficadoras o las computadoras).

BIBLIOGRAFIA

- SANCHEZ CATALAN ANGEL, Tecnología para la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias, Texas Instruments.

- CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS, Santa fe de Bogotá, Colombia; McGraw- Hill Interamericana, S. A. 2000.

- SERIE MEMORIAS, Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas; Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, D.C. Colombia, 2002.

- XII REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA; Revista Relme 13, Colombia 1998.

- DOLORES FLORES CRISOLOGO, CATALAN ALFONSO; Formación del concepto de derivada a través de la variación; Investigación en Matemática Educativa, Vol.2; México 1997.

- LINEAMIENTOS CURRICULARES(Matemáticas); Ministerio de Educación Nacional; Editorial Magisterio; Santa Fe de Bogotá, 1998.

- APOSTOL TOM M; Calculus; Editorial Reverté; segunda edición, España 1984.

- SHERMAN K. STEIN, ANTHONY BARCELLOS; Calculo y Geometría Analítica; Volumen 1; Quinta edición; Mc Graw Hill

- LOUIS LEITHOLD; El Calculo con Geometría Analítica; Sexta edición; Impreandes presencia S.A, 1997.

- EDWIN J. PURCELL, DALE VARBELG; Calculo con geometría analítica; Sexta edición; Prentice Hall; México 1992.

- LAUREN B. RESNICK, WENDY W. FOR; La Enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos; primera edición; Temas de Educación "Paidós"; España 1998.

- ALAN J. BISHOP; Enculturación Matemática(La Educación Matemática desde una perspectiva cultural); Temas de educación "Paidós"; España 1999.

- LUZ MANUEL SANTOS TRIGO; Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas; Segunda Edición; Grupo Editorial Iberoamérica; México 1997.

- NUEVAS TECNOLOGIAS Y CURRICULO DE MARTEMATICAS; Serie Lineamientos Curriculares; Ministerio de Educación Nacional; Primera edición; Santafé de Bogotá; 1999.

- CHARLES CROOK; Ordenadores y Aprendizaje Colaborativo; Ediciones Morata; Ministerio de Educación Nacional; Primera edición; Madrid – España; 1998.

- EMMA CASTELNUOVO; Didáctica de la Matemática Moderna; Serie de Matemáticas; Trillas; Segunda Edición; México; 1999.

- GEORGE POLYA; Como Plantear y Resolver problemas; Serie de Matemáticas; Trillas; México; 2001.